

Correction du TD n 12

Correction 1 On calcule son taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x^2},$$

et comme $\operatorname{ch}(x) - 1 \sim \frac{x^2}{2}$, on en déduit que le taux d'accroissement admet une limite finie en 0, égale à $\frac{1}{2}$ donc f est bien dérivable.

Correction 2 La fonction f est la composée de \cos , dérivable sur \mathbb{R} et de la fonction racine carrée, dérivable sur \mathbb{R}_+^* , elle est donc dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Étudions sa dérivabilité en 0. On a

$$\frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} \sim -\frac{(\sqrt{x})^2}{x} = -\frac{1}{2},$$

donc le taux d'accroissement en 0 admet une limite finie ce qui montre que f est dérivable en 0 de dérivée $-\frac{1}{2}$.

Correction 3 On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - e^0}{y} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et on peut prolonger par continuité en posant $f(0) = 0$. La fonction f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{2x^2 e^{x^2} - (e^{x^2} - 1)}{x^2} = 2e^{x^2} - \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}.$$

Le premier terme tend vers 2, le second vers 1 donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 1$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que f est de classe \mathcal{C}^1 .

Correction 4 La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^* . On calcule le taux d'accroissements en zéro:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = |x| \rightarrow 0$$

donc f est dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = 0$.

Remarque. Si on est curieux, on peut regarder si elle est de classe \mathcal{C}^1 . On a :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 0 \\ -2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2|x|$. On a $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ donc f est bien de classe \mathcal{C}^1 . Elle n'est pas deux fois dérivable car la fonction $x \mapsto 2|x|$ n'est pas dérivable en 0.

Correction 5 La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}^* en tant que composée de fonctions dérivables. On calcule le taux d'accroissements en 0 et on trouve :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{1}{1 + |x|} \rightarrow 1$$

donc g est dérivable en 0 de dérivée $g'(0) = 1$.

Remarque. On peut regarder si elle est de classe \mathcal{C}^1 . On a :

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = \frac{1}{(1+|x|)^2}$. On a $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 1$ donc g est de classe \mathcal{C}^1 . En revanche, elle n'est pas deux fois dérivable car $\frac{g'(x) - g'(0)}{x} = \frac{x^2 + 2|x|}{x(1+|x|)^2}$ n'a pas de limite en 0 puisque sa limite à gauche et sa limite à droite ne sont pas égales.

Correction 6 La fonction h est dérivable sur \mathbb{R}^* , on calcule le taux d'accroissements qui vaut $\frac{-|x|}{x(1+|x|)}$ et dont la limite à droite vaut -1 tandis que celle à gauche vaut 1. h n'est donc pas dérivable en 0.

Correction 7 La fonction f est la composée de $x \mapsto \ln(1+x)$, dérivable sur \mathbb{R}_+^* et de la fonction racine carrée, dérivable sur \mathbb{R}_+^* , elle est donc dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Étudions sa dérivabilité en 0. On a :

$$\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x} = \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

On reconnaît le taux d'accroissement de $x \mapsto \ln(1+x)$, on sait donc que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y) - \ln(1)}{y - 0} = 1.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, on en déduit que le taux d'accroissement de f admet une limite infinie en 0 donc f n'est pas dérivable en 0.

Correction 8 La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^* en tant que composée et produit de fonctions dérivables. En 0, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{x} = x \cos \frac{1}{x}$$

La fonction \cos est bornée et x tend vers 0 donc f est dérivable en 0 de dérivée nulle.

Correction 9 La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^* comme composée et produit de fonctions dérivables. En 0, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sin x \sin \frac{1}{x}}{x}$$

On sait que $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$ car c'est le taux d'accroissement de \sin en 0. On sait, de plus, que $\sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite quand $x \rightarrow 0$, ce qui montre que le taux d'accroissement n'admet pas de limite quand $x \rightarrow 0$ donc f n'est pas dérivable.

Remarque. Pour montrer que $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0, on peut considérer les deux suites $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ et $y_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$ qui tendent vers 0 mais $\sin \frac{1}{x_n} = 1$ et $\sin \frac{1}{y_n} = -1$.

Correction 10 Soit f une fonction paire définie sur un ensemble symétrique A , alors

$$\forall x \in A, f(-x) = f(x).$$

On dérive cette égalité, on a :

$$\forall x \in A, -f'(-x) = f'(x).$$

La dérivée est donc une fonction impaire.

Correction 11 Soit f une fonction impaire définie sur un ensemble symétrique A , alors

$$\forall x \in A, f(-x) = -f(x).$$

On dérive cette égalité, on a :

$$\forall x \in A, -f'(-x) = -f'(x),$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in A, f'(-x) = f'(x).$$

La dérivée est donc une fonction paire.

Correction 12 Il faut d'abord que la fonction soit continue en $x = 1$. La limite à gauche est $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x} = 1$ et à droite $\lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1$. Donc

$$a + b + 1 = 1.$$

Il faut maintenant que les dérivées à droites et à gauches soient égales: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2ax + b = 2a + b$. Donc

$$2a + b = \frac{1}{2}.$$

Le seul couple (a, b) solution des deux équations est $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Correction 13 1. On va tracer le tableau de variations de f . La fonction est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée $f' : x \mapsto -(x^2 + 2x)e^x$. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ par le théorème de croissances comparées et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. On a donc le

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+ \quad 0 \quad -$	
f	0	$1 - 4e^{-2}$	1	$-\infty$

tableau de variations suivant :

La fonction f est donc strictement croissante sur \mathbb{R}^+ donc injective. De plus, $f(\mathbb{R}^+) =]-\infty, 1]$ donc g est surjective. Cette corestriction est donc bien bijective.

2. La fonction réciproque g^{-1} est dérivable en tout x tel que $g' \circ g^{-1}(x) \neq 0$. La fonction g' s'annule en 0 donc g^{-1} n'est pas dérivable en $g(0) = 1$, elle est donc dérivable sur l'intervalle $] -\infty, 1[$.

3. On a $g(1) = 1 - e$ et pour tout $x \in] -\infty, 1[$, $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g' \circ g^{-1}(x)}$. On a donc $(g^{-1})'(1 - e) = \frac{1}{g' \circ g^{-1}(1 - e)} = \frac{1}{g'(1)} = -\frac{1}{3e}$.

Correction 14 L'application f est strictement croissante donc injective. De plus, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

donc, par continuité de f , $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$. La fonction f est donc bijective.

Sa bijection réciproque est dérivable si f' ne s'annule pas ce qui est le cas. On sait, de plus, que

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(0)}.$$

On a $f^{-1}(0) = 0$ car $f(0) = 0$ et, comme $f'(x) = 1 + 3x^2$, on a :

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{1 + 3 \cdot 0^2} = 1.$$

Correction 15 La fonction f est C^∞ sur \mathbb{R}^* .

- Comme sinus est bornée, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ donc la fonction est prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$.
- Le taux d'accroissement est

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x}.$$

Comme ci-dessus il y a une limite (qui vaut 0) quand x tend vers 0 car sinus est bornée. La fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

- Sur \mathbb{R}^* , $f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$, Donc $f'(x)$ n'admet pas de limite quand x tend vers 0. On en déduit que f' n'est pas continue en 0.

Correction 16 Pour que la fonction soit continue, elle doit être continue en $1/2$ car elle l'est ailleurs par les théorèmes usuels. On a :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(2x - 1) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f(y) = f(0)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(2x) = \lim_{y \rightarrow 1^-} f(y) = f(1)$$

il faut donc avoir $f(0) = f(1)$.

On sait que f est dérivable en dehors de $\frac{1}{2}$. Calculons la limite à gauche à droite du taux d'accroissement en $\frac{1}{2}$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{g(x) - g(1/2)}{x - 1/2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{f(2x - 1) - f(0)}{x - 1/2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(y) - f(0)}{y} = f'(0)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{g(x) - g(1/2)}{x - 1/2} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{f(2x) - f(1)}{x - 1/2} = \lim_{y \rightarrow 1^-} \frac{f(y) - f(1)}{y - 1} = f'(1)$$

on doit donc avoir $f'(0) = f'(1)$.

On en déduit que f est dérivable si $f(0) = f(1)$ et $f'(0) = f'(1)$.

Correction 17 On commence par déterminer si f admet une limite finie en 0. Par définition de la partie entière, on a l'encadrement :

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x},$$

d'où, en multipliant par x^2 ,

$$x(1 - x) \leq f(x) \leq x.$$

Par le théorème d'encadrement, on sait que f admet une limite en 0 et que celle-ci vaut 0 donc f est prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$.

Pour savoir si son prolongement, que l'on note encore f , est dérivable, on étudie le taux d'accroissement en 0. On a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

D'après l'encadrement de la partie entière, on a :

$$1 - x \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1,$$

donc, par le théorème d'encadrement, le taux d'accroissement de f en 0 admet une limite finie en 0 égale à 1. Ainsi, le prolongement continu de f en 0 est bien dérivable en 0.

Correction 18 On suppose par l'absurde que f' n'est pas identiquement nulle. Il existe alors $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f'(\alpha) \neq 0$. Comme f' est continue, on peut trouver un intervalle ouvert I , centré en α , sur lequel f' ne s'annule pas. On a alors :

$$\forall x \in I, f'(x)f(x) = 0 \text{ et } f'(x) \neq 0$$

donc $\forall x \in I, f(x) = 0$ ce qui montre que f est constante sur cet intervalle. Cela implique que f' est nulle sur cet intervalle ce qui est absurde. On a donc montré, par l'absurde, que f' est la fonction nulle.

Correction 19 Pour $y = 0$, on obtient $f(0) = 0$ puis en dérivant l'égalité $f(x+y) = f(x) + f(y)$ par rapport à x , on obtient :

$$\forall y \in \mathbb{R}, f'(x+y) = f'(x).$$

On en déduit que f' est une constante d'où, comme $f(0) = 0$, $f : x \mapsto ax$. Réciproquement, une telle fonction vérifie bien l'égalité donc on a trouvé toutes les solutions.

Correction 20 On sait que φ est continue sur $[-1, 0]$ et $\varphi(-1)\varphi(0) < 0$, on applique le TVI entre -1 et 0: il existe $c \in]-1, 0[$ tel que $\varphi(c) = 0$. On applique maintenant le théorème de Rolle entre c et 1: φ est continue sur $[c, 1]$, dérivable sur $]c, 1[$ et $\varphi(c) = \varphi(1) = 0$. Il existe donc $d \in]c, 1[$ tel que $\varphi'(d) = 0$ donc φ' s'annule.

Correction 21 On a f continue sur $[-1, 0]$ et $f(0) < \frac{1}{2} < f(-1)$. On applique le TVI entre -1 et 0: il existe $c \in]-1, 0[$ tel que $f(x) = \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, f étant continue, on sait que $f([0, +\infty[)$ est un intervalle. Il est non borné puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$ et il contient 0 puisque $f(0) = 0$. On en déduit qu'il

contient $[0, +\infty[$ donc il contient le réel $\frac{1}{2}$. Ainsi, il existe $d > 0$ tel que $f(d) = \frac{1}{2}$.

On a maintenant f continue sur $[c, d]$, dérivable sur $]c, d[$ et telle que $f(c) = f(d) = \frac{1}{2}$. On peut appliquer le théorème de Rolle : il existe $e \in]c, d[$ tel que $f'(e) = 0$ donc f' s'annule.

Correction 22 On suppose, sans nuire à la généralité, que $g(1) < 0$. On commence par appliquer le TVI entre 1 et 2: il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

- On a $g(1) < \frac{g(1)}{2} < g(0)$ donc il existe $a \in]0, 1[$ tel que $g(a) = \frac{g(1)}{2}$.

- On a $g(1) < \frac{g(1)}{2} < g(\alpha)$ donc il existe $b \in]1, \alpha[$ tel que $g(b) = \frac{g(1)}{2}$.

On applique maintenant le thm de Rolle entre a et b : il existe $a_1 \in]a, b[\subset]0, \alpha[$ tel que $f'(a_1) = 0$.

On a

- $g(\alpha) < \frac{g(2)}{2} < g(2)$ donc il existe $c \in]\alpha, 2[$ tel que $g(c) = \frac{g(2)}{2}$.

- $g(3) < \frac{g(2)}{2} < g(2)$ donc il existe $d \in]2, 3[$ tel que $g(d) = \frac{g(2)}{2}$.

On applique le thm de Rolle entre c et d : il existe $c_1 \in]c, d[\subset]\alpha, 3[$ tel que $g'(c_1) = 0$. Comme $a_1 < \alpha < c_1$, on a bien $a_1 \neq c_1$. On peut maintenant appliquer le thm de Rolle entre a_1 et c_1 et on obtient un réel en lequel g'' s'annule.

Correction 23 On pose $g : \begin{cases} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (f'(x) - f(x))e^x \end{cases}$. La fonction g est de classe \mathcal{C}^1 et on sait que $g(a) = g(b)$ donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. On a :

$$g'(c) = (f''(c) - f(c))e^c.$$

Comme $e^c \neq 0$, on a nécessairement $f''(c) = f(c)$.

Correction 24 On considère la fonction $g(x) = f(a + \tan x)$ définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = f(a)$ donc g est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$ en posant $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(a)$.

La fonction g est alors continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $g(0) = f(a) = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $\gamma \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(\gamma) = 0$. Or $g'(x) = (1 + \tan^2 x)f'(a + \tan x)$ donc $f'(a + \tan \gamma) = 0$. En posant $c = a + \tan \gamma$, on a bien l'existence d'un point d'annulation de f' .

Correction 25 Supposons qu'il existe $m_1 < m_2$ tels que $f(m_1) = f(m_2) = 0$. Si f est constante entre m_1 et m_2 , alors f' s'annule sur l'intervalle $]m_1, m_2[$. Sinon, il existe $m_0 \in]m_1, m_2[$ tel que $f(m_0) \neq 0$.

- Si $f(m_0) > 0$. Alors, par définition de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, il existe $A > 0$ tel que $\forall x > A, f(x) > f(m_0)$. On applique maintenant le TVI entre m_1 et m_0 , entre m_0 et m_2 puis entre m_2 et $A+1$, on obtient trois antécédents distincts de $\frac{f(m_0)}{2}$. On applique ensuite Rolle deux fois afin d'obtenir deux points d'annulation de la dérivée.

- Si $f(m_0) < 0$, on applique le TVI entre 0 et m_1 , entre m_1 et m_0 et entre m_0 et m_2 , on obtient trois antécédents distincts de $\frac{f(m_0)}{2}$. On applique à nouveau Rolle deux fois afin d'obtenir deux points d'annulation de la dérivée.

Dans tous les cas, on a montré que f' s'annule au moins deux fois.

Correction 26 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si $x = y$, le résultat est clair. Sinon, par le théorème des accroissements finis, il existe c strictement compris entre x et y tel que

$$\frac{\arctan(x) - \arctan(y)}{x - y} = \arctan'(c) = \frac{1}{1 + c^2}.$$

On a donc

$$\left| \frac{\arctan(x) - \arctan(y)}{x - y} \right| \leq 1.$$

Ceci étant vrai pour tout couple (x, y) , on a l'inégalité souhaitée.

Correction 27 On pose $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Alors l'encadrement se réécrit :

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} \leq f'(n) \leq \frac{f(n) - f(n-1)}{n - (n-1)}.$$

D'après le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe $\alpha_n \in]n, n+1[$ et $\beta_n \in]n-1, n[$ tels que

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(\alpha_n) \text{ et } \frac{f(n) - f(n-1)}{n - (n-1)} = f'(\beta_n).$$

On remarque, de plus, que la fonction f' est décroissante. On a $\beta_n < n < \alpha_n$ donc

$$f'(\alpha_n) \leq f'(n) \leq f'(\beta_n),$$

ce qui montre l'encadrement souhaité.

Correction 28 Pour tout $\epsilon > 0$, on sait qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geq A, |f'(x)| < \epsilon$. On sait également, que pour tout $x > A, \exists c_x \in]A, x[$ tel que $\frac{f(x) - f(A)}{x - A} = f'(c_x)$.

Pour tout $x > A$, on a donc $c_x > A$ et $\left| \frac{f(x) - f(A)}{x - A} \right| < \epsilon$. On écrit maintenant

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(A) + f(A)}{x} = \frac{x - A}{x} \frac{f(x) - f(A)}{x - A} + \frac{f(A)}{x}.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \left| \frac{x - A}{x} \frac{f(x) - f(A)}{x - A} \right| + \left| \frac{f(A)}{x} \right|.$$

Comme $\frac{x - A}{x} \leq 1$, le premier terme est majoré par ϵ , pour tout $x > A$.

On choisit A' tel que $\forall x > A', \left| \frac{f(A)}{x} \right| < \epsilon$. Pour tout $x \geq \max(A, A')$, on a alors

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| < 2\epsilon,$$

ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l$, on pose $g : x \mapsto f(x) - lx$. On a alors $g'(x) = f'(x) - l$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 0$. D'après ce qui précède, on a donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0,$$

Or $\frac{g(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - l$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l$ ce qui montre que le résultat reste vrai si la limite est non nulle.

Correction 29 On pose $f : x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{x}$. La fonction est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \neq 0, f'(x) = \frac{x \text{ch}(x) - \text{sh}(x)}{x^2}$. En explicitant les expressions de ch et sh , on obtient :

$$f'(x) = \frac{(x-1)e^x + (x+1)e^{-x}}{2x^2},$$

et, pour $x > 0$, on a $f'(x) \geq \frac{(x-1)e^x}{2x^2}$. Pour tout $x > 0$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)$. D'après ce qui précède, on sait que $f'(c_x) \geq \frac{(c_x-1)e^{c_x}}{2c_x^2}$. Utilisons maintenant l'encadrement

de c_x pour minorer $\frac{(c_x-1)e^{c_x}}{2c_x^2}$. On sait que $c_x \in]x, x+1[$ donc :

$$(x-1)e^x < (c_x-1)e^{c_x} < ((x+1)-1)e^{x+1} \text{ et } \frac{1}{2(x+1)^2} < \frac{1}{2c_x^2} < \frac{1}{2x^2}.$$

On en déduit que, comme toutes les quantités sont positives :

$$\frac{(c_x-1)e^{c_x}}{2c_x^2} > \frac{(x-1)e^x}{2(x+1)^2},$$

d'où :

$$f'(c_x) > \frac{(x-1)e^x}{2(x+1)^2},$$

ce qui est équivalent à :

$$f(x+1) - f(x) > \frac{(x-1)e^x}{2(x+1)^2}.$$

Il suffit maintenant d'écrire

$$\frac{(x-1)e^x}{2(x+1)^2} = \frac{e^x}{2x} \cdot \frac{(x-1).x}{(x+1)^2}.$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1).x}{(x+1)^2} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = +\infty$ par le théorème de croissances comparées. Par le théorème de minoration, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) - f(x) = +\infty$.

Pour tout $x \geq 1$, on a $x \text{ch}(x) - \text{sh}(x) \geq \text{ch}(x) - \text{sh}(x) \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$ et f est croissante sur $[1, +\infty[$. On a donc, pour tout $x \geq 1, f(c_x) \geq f(x)$. Or

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{x} = \frac{e^x}{x} (1 + e^{-2x})$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par croissances comparées. Par le théorème de minoration, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) - f(x) = +\infty$.

Correction 30 On pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$, on cherche à déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1+x)}{x}$.
On écrit

$$\frac{f(1-x) - f(1+x)}{x} = -2 \frac{f(1-x) - f(1+x)}{(1-x) - (1+x)}.$$

Par le théorème des accroissements finis, on sait que pour tout x , il existe c_x strictement compris entre $1-x$ et $1+x$ tel que

$$\frac{f(1-x) - f(1+x)}{(1-x) - (1+x)} = f'(c_x).$$

On a $f'(c_x) = -\frac{1}{5} c_x^{-\frac{6}{5}}$ et $f'(c_x)$ est compris entre $f'(1-x)$ et $f'(1+x)$. Quand x tend vers 0, $f'(1-x)$ et $f'(1+x)$ tendent vers $f'(1) = -\frac{1}{5}$ donc, par le théorème d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(c_x) = -\frac{1}{5}$. On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x}} - \frac{1}{\sqrt[5]{1+x}} \right) = \frac{2}{5}.$$

Correction 31 On pose $g : x \mapsto f(x) - f(-x)$, la fonction est dérivable. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x > 0$, il existe $c \in]0, x[$ tel que $\frac{g(x)}{x} = g'(c)$. On a $g'(x) = f(x) + f(-x)$ donc l'égalité $g(x) = xg'(c)$ est précisément l'égalité souhaitée.

Correction 32 On pose $g : x \mapsto f(2x)$, la fonction g est dérivable. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x > 0$, il existe $d \in]0, x[$ tel que $\frac{g(x)}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(d)$. On a $g'(x) = 2f'(2x)$ donc l'égalité $g(x) = xg'(d)$ est équivalente à $f(2x) = 2xf'(2d)$. En posant $c = 2d > 0$, on a bien l'égalité souhaitée.

Correction 33 Pour tout réel $M > 0$, il existe $A > 0$ tel que $\forall x > A$ $f'(x) > M$. Soit maintenant $x > A$, alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]A, x[$ tel que $\frac{f(x) - f(A)}{x - A} = f'(c_x)$. On a donc $f(x) > f(A) + (x - A)f'(c_x)$ et comme $c_x > A$, on a $f(x) > f(A) + (x - A)M$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(A) + (x - A)M = +\infty$ donc, par le théorème de minoration, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Correction 34 On suppose par l'absurde que $l \neq 0$. Quitte à prendre $-f$, on peut supposer $l > 0$. Par définition de la limite, il existe $M > 0$ tel que pour tout

$x \geq M$, $f'(x) \geq \frac{l}{2}$. On écrit $f(x) = f(x) - f(M) + f(M)$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x > M$ tel que $\frac{f(x) - f(M)}{x - M} = f'(c_x)$. On a donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(x) - f(M)}{x - M} (x - M) + f(M) \\ &= f'(c_x)(x - M) + f(M) \\ &\geq \frac{l}{2}(x - M) + f(M) \text{ car } c_x > M \end{aligned}$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{l}{2}(x - M) + f(M) = +\infty$ car l est strictement positif. Par le théorème de minoration, on obtient que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ce qui est une contradiction avec le fait que f est bornée. L'hypothèse $l \neq 0$ est absurde, on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Correction 35 Comme f'' est positive, on sait que f' est croissante. Supposons par l'absurde qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$.

• Si $f'(a) > 0$ alors pour tout $x > a$, il existe $c_x \in]a, x[$ tel que :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Par croissance de f' , on a alors

$$f'(a) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

ce qui implique

$$f(x) > f(a) + (x - a)f'(a)$$

car $(x - a) > 0$. Or $f'(a) > 0$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - a)f'(a) = +\infty$$

et, par le théorème de minoration, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ce qui contredit le fait que f est bornée.

• Si $f'(a) < 0$ alors pour tout $x < a$, il existe $c_x \in]x, a[$ tel que :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x).$$

Par croissance de f' , on a alors

$$f'(a) > \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

ce qui implique

$$f(x) < f(a) + (x - a)f'(a)$$

car $x - a > 0$. Or $f'(a) < 0$ donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - a)f'(a) = -\infty$$

et, par le théorème de majoration, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ce qui contredit le fait que f est bornée.

On a montré, par l'absurde, que f' est nulle donc f est constante.

Correction 36 La fonction f est continue sur $[0, 1]$ car dérivable, dérivable sur $]0, 1[$ et $f(0) = f(1)$. On peut appliquer le théorème de Rolle : il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f'(\alpha) = 0$. Comme on sait que $f'' \leq 0$, la fonction f' est décroissante donc elle est négative ou nulle sur $[0, \alpha]$ et positive ou nulle sur $[\alpha, 1]$.

Soit $x \in [0, \alpha]$, alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\beta \in]0, x[$ tel que $\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(\beta)$. Comme $f'(\beta) \geq 0$ et $x \geq 0$, on a $f(x) - f(0) \geq 0$ donc $f(x) \geq 0$.

Soit maintenant $x \in]\alpha, 1]$, alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\gamma \in]x, 1[$ tel que $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(\gamma)$. Comme $f'(\gamma) \leq 0$ et $x - 1 \leq 0$, on a $f(x) - f(1) \geq 0$ donc $f(x) \geq 0$.

On a montré que $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) \geq 0$ donc la fonction f est positive.

Correction 37 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On va montrer tout d'abord que :

$$\forall t \in]0, 1], |f^{(n)}(t)| \leq t \Rightarrow \forall t \in]0, 1], |f^{(n-1)}(t)| \leq t^2.$$

Soit donc $t \in]0, 1]$, alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_t \in]0, t[$ tel que $\frac{f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0)}{t} = f^{(n)}(c_t)$. Or :

$|f^{(n)}(c_t)| < c_t < t$. On en déduit que :

$$\left| \frac{f^{(n-1)}(t)}{t} \right| < t,$$

d'où $|f^{(n-1)}(t)| < t^2$. En appliquant le même raisonnement à $f^{(n-2)}$, on en déduit que :

$$\forall t \in]0, 1], |f^{(n-2)}(t)| < t^3.$$

Par récurrence descendante, on peut affirmer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0, 1]$, $|f(t)| \leq t^n$.

Pour tout $t \in]0, 1[$, on fait tendre n vers $+\infty$ et on obtient $f(t) = 0$. La fonction f est donc nulle sur $]0, 1[$ et comme elle est continue en 0 et en 1, elle est nulle sur tout le segment $[0, 1]$.

Correction 38 1. La fonction f_1 est de classe \mathcal{C}^n en tant que produit de fonctions de classe \mathcal{C}^n . On pose $g_1 : x \mapsto x$ et $h_1 : x \mapsto e^{-x}$. On va appliquer la formule de Leibniz.

- On a $g_1' = 1$ et $\forall k \geq 2$, $g_1^{(k)} = 0$.
- On a $h_1' : x \mapsto -e^{-x}$, $h_1'' : x \mapsto e^{-x}$ donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $h_1^{(k)} = (-1)^k h_1$.

On applique maintenant la formule de Leibniz: pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_1^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g_1^{(k)}(x) h_1^{(n-k)}(x) \\ &= g_1(x) h_1^{(n)}(x) + n g_1'(x) h_1^{(n-1)}(x) + 0 \\ &= x(-1)^n e^{-x} + n(-1)^{n-1} e^{-x} = (-1)^n (x - n) e^{-x}. \end{aligned}$$

2. La fonction f_2 est de classe \mathcal{C}^n en tant que produit de fonctions de classe \mathcal{C}^n . On pose $g_2 : x \mapsto x^2$ et $h_2 : x \mapsto e^x$. On va appliquer la formule de Leibniz.

- On a $g_2' : x \mapsto 2x$, $g_2'' : x \mapsto 2$ et $\forall k \geq 3$, $g_2^{(k)} = 0$.
- On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $h_2^{(k)} = h_2$.

On applique maintenant la formule de Leibniz: pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_2^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g_2^{(k)}(x) h_2^{(n-k)}(x) \\ &= g_2(x) h_2^{(n)}(x) + n g_2'(x) h_2^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} g_2''(x) h_2^{(n-2)}(x) \\ &= (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x. \end{aligned}$$

3. La fonction f_3 est de classe \mathcal{C}^n en tant que puissance d'une fonction affine qui est donc de classe \mathcal{C}^n .

On a $f_3' : x \mapsto ak(ax + b)^{k-1}$, $f_3'' : x \mapsto a^2 k(k-1)(ax + b)^{k-2}$, pour $n \leq k$, on a $f_3^{(n)} : x \mapsto a^n \frac{k!}{(k-n)!} (ax + b)^{k-n}$ et pour $n > k$, $f_3^{(n)} = 0$.

4. On a f_4 de classe \mathcal{C}^n sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ en tant qu'inverse d'une fonction de classe \mathcal{C}^n qui ne s'annule pas. On calcule ses dérivées successives:

- $f_4' : x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$

- $f''_4 : x \mapsto \frac{2}{(1-x)^3}$
- $f_4^{(3)} : x \mapsto \frac{3!}{(1-x)^4}$
- $\forall k \in \mathbb{N}, f_4^{(k)} : x \mapsto \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$

On a donc $f_4^{(n)} : x \mapsto \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

5. On remarque que $f_5 = \frac{1}{2}f'_4$, on a donc $f_5^{(n)} = \frac{f_4^{(n+1)}}{2} = \frac{(n+1)!}{2(1-x)^{n+2}}$.
6. On a f_6 de classe \mathcal{C}^n sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$ en tant qu'inverse d'une fonction de classe \mathcal{C}^n qui ne s'annule pas. On a $f_6' : \frac{-a}{(ax+b)^2}$, $f_6'' : x \mapsto \frac{2a^2}{(ax+b)^3}$, $f_6^{(3)} : x \mapsto \frac{-3!a^3}{(ax+b)^4}$ et, par une récurrence immédiate, $\forall k \in \mathbb{N}, f_6^{(k)} : x \mapsto \frac{(-1)^k a^k k!}{(ax+b)^{k+1}}$.

Correction 39 On pose $f : x \mapsto x^{n-1}$ et $g : x \mapsto \ln(x)$. On veut appliquer la formule de Leibniz, il faut donc calculer les dérivées successives de f et g .

- On a $f' : x \mapsto (n-1)x^{n-2}$, $f'' : x \mapsto (n-1)(n-2)x^{n-3}$ puis, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et tout $x \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) = (n-1)(n-2)\dots(n-k)x^{n-k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}x^{n-k-1}$. On a, de plus, $f^{(n)} = 0$.
- On a $g' : x \mapsto \frac{1}{x}$, $g'' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$, $g^{(3)} : x \mapsto \frac{2}{x^3}$, $g^{(4)} : x \mapsto -\frac{3!}{x^4}$ puis, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $g^{(k)} : x \mapsto \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$.

On applique maintenant la formule de Leibniz. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (fg)^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} x^{n-k-1} \cdot \frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!}{x^{n-k}} + 0 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (n-1)! \frac{(-1)^{n-k-1}}{x} \\ &= \frac{(n-1)!(-1)^{n-1}}{x} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k \end{aligned}$$

On sait que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = (1+(-1))^n = 0$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \right) - (-1)^n$. On a donc

$$(fg)^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}.$$

Correction 40 Posons $f = \arctan$, on a $f' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et $f'' : x \mapsto -\frac{2x}{1+x^2}$.

Nous allons montrer, par récurrence sur $n \geq 2$ que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(1+x^2) \arctan^{(n)}(x) + 2(n-1)x \arctan^{(n-1)}(x) + (n-2)(n-1) \arctan^{(n-2)}(x) = 0.$$

On fixe $x \in \mathbb{R}$, on commence par montrer que la propriété est vraie au rang 2 pour initialiser.

On a :

$$(1+x^2) \cdot \frac{-2x}{1+x^2} + 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \frac{1}{1+x^2} + 0 = 0,$$

la propriété est donc vraie au rang 2.

On suppose que la propriété est vraie au rang n , on a donc :

$$(1+x^2) \arctan^{(n)}(x) + 2(n-1)x \arctan^{(n-1)}(x) + (n-2)(n-1) \arctan^{(n-2)}(x) = 0.$$

On dérive cette égalité, on obtient:

$$\begin{aligned} 2x \arctan^{(n)}(x) + (1+x^2) \arctan^{(n+1)}(x) + 2(n-1) \arctan^{(n-1)}(x) \\ + 2(n-1)x \arctan^{(n)}(x) + (n-2)(n-1) \arctan^{(n-1)}(x) = 0, \end{aligned}$$

soit, après simplification :

$$(1+x^2) \arctan^{(n+1)}(x) + 2nx \arctan^{(n)}(x) + (n-1)n \arctan^{(n-1)}(x) = 0.$$

La propriété est vraie au rang $n+1$, elle est héréditaire.

Par le principe de récurrence, on a montré que la propriété est vraie pour tout entier n .

On souhaite maintenant calculer $\arctan^{(n)}(0)$. En prenant $x = 0$ dans l'égalité, on obtient :

$$\arctan^{(n)}(0) + (n-2)(n-1) \arctan^{(n-2)}(0) = 0,$$

donc

$$\arctan^{(n)}(0) = -(n-2)(n-1) \arctan^{(n-2)}(0).$$

Par récurrence descendante, on a donc arriver à exprimer $\arctan^{(n)}(0)$ en fonction de $\arctan^{(2)}(0)$ ou $\arctan^{(1)}(0)$ selon la parité de n .

- Si n est pair, comme $\arctan^{(2)}(0) = 0$, on obtient $\arctan^{(n)}(0) = 0$.

- Si n est impair, on l'écrit $n = 2p + 1$, on a alors

$$\begin{aligned} \arctan^{(2p+1)}(0) &= -(2p-1) \cdot 2p \arctan^{(2p-1)}(0) \\ &= 2p(2p-1)(2p-2)(2p-3) \arctan^{(2p-3)}(0) \\ &= -2p \cdot (2p-1) \dots (2p-5) \arctan^{(2p-5)}(0) \\ &= (-1)^p 2p! \arctan^{(1)}(0) \end{aligned}$$

par une récurrence descendante. On a donc $\arctan^{(2p+1)} = (-1)^p (2p!)$.

Correction 41 On a $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$ et, par une récurrence immédiate, $f^{(k)}(x) = n(n-1) \dots (n-k+1)(1+x)^{n-k}$, pour $k \leq n$. On a donc le résultat souhaité.

Correction 42 On écrit

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}.$$

On pose $h : x \mapsto \frac{1}{x-1}$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x+1}$. Les deux fonctions sont dérivables. On a $h'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$, $h^{(2)}(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$ et $h^{(3)}(x) = -\frac{6}{(x-1)^4}$. Par une récurrence immédiate, on a :

$$h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

De même, on a

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

On en déduit que :

$$\forall n \geq 0, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(x+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n ((x+1)^{n+1} + (x-1)^{n+1})}{2(x^2-1)^{n+1}}.$$

Correction 43 1. On le montre par récurrence sur n . On sait que $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et

$$\begin{aligned} \cos \arctan(x) \cdot \sin \left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2} \right) &= \cos^2 \arctan(x) \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 \arctan(x)} \\ &= \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

La formule est vraie au rang 1. On suppose qu'elle est vraie au rang n et on dérive la formule :

$$\begin{aligned} &f^{(n+1)}(x) \\ &= -(n-1)! n f'(x) \sin(f(x)) \cos^{n-1}(f(x)) \cdot \sin \left(n f(x) + \frac{n\pi}{2} \right) \\ &\quad + (n-1)! \cos^n(f(x)) n f'(x) \cos \left(n f(x) + \frac{n\pi}{2} \right) \\ &= n! f'(x) \cos^{n-1}(f(x)) \left[-\sin(f(x)) \sin \left(n f(x) + \frac{n\pi}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos(f(x)) \cos \left(n f(x) + \frac{n\pi}{2} \right) \right] \\ &= n! f''(x) \cos^{n-1}(f(x)) \cos \left((n+1)f(x) + \frac{n\pi}{2} \right) \\ &= n! f''(x) \cos^{n-1}(f(x)) \sin \left((n+1)f(x) + \frac{(n+1)\pi}{2} \right) \\ &= n! \cos^{n+1}(f(x)) \cos \left((n+1)f(x) + \frac{n\pi}{2} \right) \\ &\quad \text{car on a vu que } f'(x) = \cos^2(f(x)) \end{aligned}$$

La formule est vraie au rang $k+1$ donc, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

2. D'après la formule montrée à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} &f^{(n)}(x) = 0 \\ \Leftrightarrow &\cos^n(f(x)) = 0 \text{ ou } \sin \left(n f(x) + \frac{n\pi}{2} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow &\sin \left(n f(x) + \frac{n\pi}{2} \right) = 0 \text{ car } \cos \arctan(x) \neq 0 \\ \Leftrightarrow &n f(x) + \frac{n\pi}{2} \equiv 0[\pi] \\ \Leftrightarrow &n f(x) = k\pi - \frac{n\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow &f(x) = \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow &x = \tan \left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2} \right), k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow &x = \frac{\sin \left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2} \right)}{\cos \left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2} \right)}, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow &x = -\cotan \left(\frac{k\pi}{n} \right), k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow &x = -\cotan \left(\frac{k\pi}{n} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \text{ car } \tan \text{ est } \pi\text{-périodique} \end{aligned}$$

Les racines de $f^{(n)}$ sont donc $-\cotan \left(\frac{k\pi}{n} \right)$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Correction 44 On commence par calculer les premières dérivées :

$$f'(x) = (n-1)x^{n-2} \ln(x) + x^{n-2},$$

$$f^{(2)}(x) = (n-1)(n-2)x^{n-3} \ln(x) + (n-1)x^{n-3} + (n-2)x^{n-3}.$$

Il semble donc qu'on ait $f^{(k)}(x) = x^{n-k-1} \prod_{j=1}^k (n-j) \ln(x) + \alpha_k x^{n-k-1}$ où α_k est un réel. On le montre par récurrence sur k . La formule est vraie aux rangs 1 et 2, on suppose qu'elle l'est au rang k et on dérive la formule :

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (n-k-1)x^{n-k-2} \prod_{j=1}^k (n-j) \ln(x) + x^{n-k-2} \prod_{j=1}^k (n-j) \\ &\quad + (n-k-1)\alpha_k x^{n-k-2} \\ &= x^{n-k-2} \prod_{j=1}^{k+1} (n-j) \ln(x) + \alpha_{k+1} x^{n-k-2} \end{aligned}$$

en posant $\alpha_{k+1} = \prod_{j=1}^k (n-j) + (n-k-1)\alpha_k$. L'hypothèse est vraie au rang k , par le principe de récurrence, elle l'est pour tout entier.

Pour $k = n-1$, on obtient :

$$f^{(n-1)}(x) = \prod_{j=1}^{n-1} (n-j) \ln(x) + \alpha_{n-1} = (n-1)! \ln(x) + \alpha_{n-1},$$

d'où

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}.$$

Correction 45 On pose $h : x \mapsto (x^2 + 1)$. On a $h'(x) = 2x$, $h''(x) = 2$ et $h^{(k)} = 0$, $\forall k \geq 3$. On pose $g : x \mapsto e^x$, on a $g^{(k)} = g$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

D'après la formule de Leibniz, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^{(k)}(x) g(x) \text{ d'après ce qui précède .} \\ &= h(x)e^x + nh'(x)e^x + \frac{n(n-1)}{2}e^x \\ &= (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x \end{aligned}$$

Correction 46 On pose $h : x \mapsto x^2$, on a $h'(x) = 2x$, $h''(x) = 2$ et $h^{(k)} = 0$, $\forall k \geq 3$.

On pose $g : x \mapsto (1+x)^n$, on a $g^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} (1+x)^{n-k}$. D'après la formule de

Leibniz, on a donc :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= x^2 g(x) + 2xng'(x) + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} g''(x) \\ &= x^2(1+x)^n + 2xn^2(1+x)^{n-1} + n^2(n-1)^2(1+x)^{n-2} \end{aligned}$$

Correction 47 On pose $f : x \mapsto \cos(x)$. On a $f^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$. On utilise la formule de Leibniz :

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) e^x = e^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right).$$

Correction 48 Posons $f_r : x \mapsto x^r$. Pour tout entier r et tout $k \leq r$, on a $f_r^{(k)}(x) = \frac{r!}{(r-k)!} x^{r-k}$ d'après l'exercice ???. On a donc :

$$f_{2n}^{(n)}(x) = \frac{2n!}{n!} x^n.$$

On écrit ensuite $f_{2n} = f_n \cdot f_n$ et on applique la formule de Leibniz:

$$\begin{aligned} f_{2n}^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_n^{(k)}(x) f_n^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} x^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} x^k \\ &= n! x^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2. \end{aligned}$$

En utilisant les deux expressions, on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Correction 49 L'équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$ admet pour racines 1 et -2. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-2x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On remarque que z_p est une solution particulière (complexe) de l'équation $z'' + z' - 2z = 2e^{ix}$ si et seulement si sa partie imaginaire

y_p est une solution particulière de $y'' + y' - 2y = 2 \sin x$. Cherchons une solution particulière de l'équation complexe sous la forme $z_p : x \mapsto \alpha e^{ix}$ puisque i n'est pas racine de l'équation caractéristique. On a $z_p'(x) = i\alpha e^{ix}$ et $z_p''(x) = -\alpha e^{ix}$. La fonction z_p est solution de l'équation si et seulement si $(-\alpha + i\alpha - 2\alpha)e^{ix} = 2e^{ix}$ c'est-à-dire $\alpha = \frac{2}{i-3}$.

Déterminons maintenant la partie imaginaire de la fonction $z_p : x \mapsto \frac{2}{i-3}e^{ix}$. On écrit

$$\frac{2}{i-3}e^{ix} = -\frac{3+i}{5}e^{ix},$$

on en déduit que $y_p : x \mapsto -\frac{3}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x$.

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions :

$$x \mapsto -\frac{3}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x \lambda e^x + \mu e^{-2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 50 L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ a pour racines 1 et 2, les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Pour chercher une solution particulière, on écrit $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) \right) = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$. On en déduit que z_p est une solution complexe de $z'' - 3z' + 2z = \sqrt{2}e^{i(x-\frac{\pi}{4})}$ si et seulement si sa partie réelle y_p est solution de $y'' - 3y' + 2y = \sin x + \cos x$.

On cherche z_p sous la forme αe^{ix} car i n'est pas racine de l'équation caractéristique. On a $z_p'(x) = i\alpha e^{ix}$ et $z_p''(x) = -\alpha e^{ix}$. La fonction z_p est solution de l'équation si et seulement si $-\alpha - 3i\alpha + 2\alpha = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$ donc $\alpha = \frac{1}{1-3i}e^{-\frac{i\pi}{4}} = \frac{1+3i}{10}e^{-\frac{i\pi}{4}}$ et $z_p : x \mapsto \frac{1+3i}{10}e^{i(x-\frac{\pi}{4})}$.

On en déduit que $y_p = \Re(z_p)$ est solution de l'équation. On a $y_p : x \mapsto \frac{1}{10} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$. On en déduit que les solutions de l'équation sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{10} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \lambda e^x + \mu e^{2x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 51 L'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ a pour racine i et $-i$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $x \mapsto \alpha \sin(x) + \beta \cos(x), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On remarque que z_p est solution de l'équation $z'' + z = e^{ix}$ si et seulement si sa partie imaginaire y_p est solution de l'équation $y'' + y = \sin x$. On cherche une solution particulière z_p sous la forme $z_p(x) = \alpha x e^{ix}$ car i est racine simple de l'équation caractéristique. On a $z_p'(x) = (i\alpha x + \alpha)e^{ix}$ et $z_p''(x) = (-\alpha x + 2i\alpha)e^{ix}$. La fonction

z_p est solution de l'équation si et seulement si $(2i\alpha - \alpha x + \alpha x)e^{ix} = e^{ix}$ ce qui impose $\alpha = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$. Une solution particulière de $z'' + z = e^{ix}$ est $z_p : x \mapsto -\frac{ie^{ix}}{2}$ donc une solution particulière de $y'' + y = \sin(x)$ est $y_p : x \mapsto -\frac{1}{2} \cos(x)$.

Les solutions sont les fonctions :

$$x \mapsto -\frac{1}{2} \cos(x) + \alpha \sin(x) + \beta \cos(x), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Correction 52 On note $I_1 = \mathbb{R}_+^*$, $I_2 = \mathbb{R}_-^*$. On sait que l'ensemble des solutions sur $I_i, i = 1, 2$ est

$$\left\{ x \mapsto \frac{\lambda_i e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}, \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

On cherche maintenant une solution définie sur \mathbb{R} . On suppose qu'une telle solution existe et on la note f . Il est clair que $f|_{\mathbb{R}_+^*}$ est une solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation donc il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{\lambda_1 e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}.$$

De même, $f|_{\mathbb{R}_-^*}$ est une solution sur \mathbb{R}_-^* donc il existe $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x < 0, f(x) = \frac{\lambda_2 e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}.$$

On a supposé f solution, elle est donc dérivable, ce qui implique continue. Calculons la limite à gauche et à droite de f en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_1 e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}.$$

Cette limite est finie si et seulement si $\lambda_1 = 0$. De même,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\lambda_2 e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$$

est finie si et seulement si $\lambda_2 = 0$. Il n'existe donc pas de solution, autre que la solution nulle, définie sur tout \mathbb{R} .

Correction 53 On note $I_1 = \mathbb{R}_+^*$, $I_2 = \mathbb{R}_-^*$. On sait que l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur $I_i, i = 1, 2$ est :

$$\left\{ x \mapsto \lambda_i e^{-\frac{1}{x}}, \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

La fonction identité est une solution particulière, l'ensemble des solutions sur I_i , $i = 1, 2$ est donc :

$$\left\{ x \mapsto \lambda_i e^{-\frac{1}{x}} + x, \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

On cherche maintenant une solution définie sur \mathbb{R} . On suppose qu'une telle solution existe et on la note f . Il est clair que $f|_{\mathbb{R}_+^*}$ est une solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation donc il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x > 0, f(x) = \lambda_1 e^{-\frac{1}{x}} + x.$$

De même, $f|_{\mathbb{R}_-^*}$ est une solution sur \mathbb{R}_-^* donc il existe $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x < 0, f(x) = \lambda_2 e^{-\frac{1}{x}} + x.$$

On a supposé f solution, elle est donc dérivable, ce qui implique continue. Calculons la limite à gauche et à droite de f en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \lambda_2 e^{-\frac{1}{x}} + x.$$

Cette limite est finie si et seulement si $\lambda_2 = 0$. En revanche,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \lambda_1 e^{-\frac{1}{x}} + x = 0, \forall \lambda_1 \in \mathbb{R}.$$

On suppose donc $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 = 0$ et on a f continue avec $f(0) = 0$. Nous allons calculer la limite du taux d'accroissement en 0^+ et 0^- afin de déterminer si f est bien dérivable en 0. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1,$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_1 e^{-\frac{1}{x}} + x - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_1 e^{-\frac{1}{x}}}{x} + 1.$$

Par croissance comparée, cette limite est toujours égale à 1, quelque soit $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. On en déduit que les solutions de l'équation définies sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \begin{cases} \lambda_1 e^{-\frac{1}{x}} + x & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Correction 54 On travaille sur un intervalle sur lequel $(1-x)^2$ ne s'annule pas.

On note $I_1 =]-\infty, 1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$.

On remarque que :

$$\frac{2-x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions sur I_i , pour $i = 1, 2$ est :

$$x \mapsto \frac{\lambda_i e^{\frac{1}{1-x}}}{1-x}, \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

On suppose qu'il existe une solution réelle f . Alors $f|_{I_i}$ est solution sur I_i donc il existe λ_i , $i = 1, 2$ tels que :

$$f(x) = \frac{\lambda_i e^{\frac{1}{1-x}}}{1-x}, \forall x \in I_i, i = 1, 2.$$

Par croissance comparée, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\lambda_2 e^{\frac{1}{1-x}}}{1-x} = 0,$$

tandis que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\lambda_1 e^{\frac{1}{1-x}}}{1-x} = +\infty,$$

dès lors que $\lambda_1 \neq 0$. Si $\lambda_1 = 0$, en revanche, on a bien une fonction continue en 1.

Est-elle dérivable? On calcule le taux d'accroissement. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = 0,$$

puisque $f(x) = 0, \forall x \leq 1$ et

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1} = 0,$$

par croissance comparée. L'ensemble des solutions réelles est donc l'ensemble des fonctions de la forme :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{\frac{1}{1-x}}}{1-x} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}.$$