Lycée du Parc
PCSI 842 — Année 2023-2024
DS 5

Devoir d'entrainement 5.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1.
On note $C_{p,n}$ l'ensemble des applications croissantes de $[|1,p|]$ dans $[|1,n|]$. On note $C^s_{p,n}$ l'ensemble des applications strictement croissantes de $[|1,p|]$ dans $[|1,n|]$.

1. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application croissante. Montrer que $f + id$ est une application strictement croissante.
2. Calculer $C^s_{p,n}$ pour $(p,n) \in [\![1,2,]\!]2$.
3. Calculer $C^s_{p,n}$ pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$.
4. Construire une bijection de $C_{p,n}$ sur $C^s_{p,n+p-1}$.
5. En déduire le cardinal de $C_{p,n}$.
6. Combien y a-t-il de p-uplets $(a_1, \ldots, a_p)$ dans $[|0,n|]^p$ vérifiant: $a_1 + a_2 + \ldots + a_p \leqslant n$?
   indication: on pourra poser $S_k = a_1 + \ldots + a_k$ et utiliser la question précédente.
7. Combien y a-t-il de p-uplets $(a_1, \ldots, a_p)$ dans $[0,n]^p$ vérifiant: $a_1 + a_2 + \ldots + a_p = n$?

Exercice 2 ((sujet 1))**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $f \in \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$ une fonction continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

1. Montrer que:
$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \exists x_k \in \left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[,\ \frac{1}{n} f'(x_k) = f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right).$$
2. Montrer qu'il existe $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$ et:
$$\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = n.$$

1. On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{2+x} \end{array} \right.$
   (a) Montrer que f est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ avec $k < 1$. On précisera la valeur de k.
   (b) Montrer que f admet un unique point fixe α sur $\mathbb{R}_+$, que l'on déterminera.
   (c) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
      i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant k\,|u_n - \alpha|$.
      ii. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Exercice 3 (sujet 2).
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ et $I =]a, b[$. Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

Soit $f \in C^1(I)$ strictement croissante et convexe.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$.
   (b) Montrer que f s'annule au plus une fois sur I.

2. On suppose qu'il existe $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$
   (a) Montrer que $\forall x \in [\alpha, b[, x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \in [\alpha, b[$.
   (b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) > 0$ et
   $$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
   Justifier que la suite est bien définie.
   (c) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (d) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Partie 2

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$ et $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $\eta_1 > 0$ tel que $]\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1[\subset I$ et
$$\forall x \in \,]\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1[\,, f'(x) \neq 0.$$

2. On considère la fonction F suivante :
$$F : \left\{ \begin{array}{ccc}]\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{array} \right.$$
Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

3. On rappelle que toute fonction g de classe $C^2(I)$ possède un DL_2 en tout point a de I de la forme
$$g(x) = g(a) + (x - a)g'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} g^{(2)}(a) + o\left((x-a)^2\right).$$
   (a) Calculer $F(\alpha)$ et $F'(\alpha)$.
   (b) Écrire le DL_2 de f en α et le DL_1 de f' en α.
   (c) En déduire que F admet un DL_2 en α que l'on précisera.

4. En déduire qu'il existe $\eta_2 \in \,]0, \eta_1[$ et $c > 1$ tel que
$$\forall x \in \,]\alpha - \eta_2, \alpha + \eta_2[\,, |F(x) - \alpha| \leqslant c(x - \alpha)^2.$$

5. En déduire qu'il existe $\eta \in \,]0, \eta_1[$ tel que
   - $]\alpha - \eta, \alpha + \eta[\subset I$,
   - $\forall x \in \,]\alpha - \eta, \alpha + \eta[\,, F(x) \in \,]\alpha - \eta, \alpha + \eta[$,

- $\forall x \in \,]\alpha - \eta, \alpha + \eta[, \; |F(x) - \alpha| \leqslant c(x-\alpha)^2$.

Dans toute la suite du problème, on considèrera η et c vérifiant ces conditions.

6. Soit (x_n) la suite définie par $x_0 \in \,]\alpha - \eta, \alpha + \eta[\,\cap \left]\alpha - \frac{1}{c^2}, \alpha + \frac{1}{c^2}\right[$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = F(x_n)$$
   (a) Justifier que la suite est bien définie.
   (b) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - \alpha| \leqslant c^{-2^n - 1}.$$
   (c) En déduire que la suite (x_n) converge vers α.

Exercice 4 (sujet 1).
Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice U est-elle inversible? Donner son rang.
2. Pour p un entier naturel non-nul donné, calculer U^p.
3. Soit $A = \alpha I + \beta U$.
   (a) Calculer A^p en fonction de α, β, U, I et p, p désignant un entier naturel.
   (b) En utilisant A^2, trouver une condition suffisante sur α et β pour que A soit inversible.
   (c) Montrer que cette condition est nécessaire.
   (d) Exprimer l'inverse de A en fonction de α, β, U et I.
   (e) A quelle(s) condition(s), portant sur α et β, A est-elle inversible?

Exercice 5 (sujet 1).
Deux banquiers A et B se livrent une concurrence financière féroce. Chaque jour, le banquier B vole une proportion p de la fortune du banquier A ($p \in]0,1[$ fixé), simultanément que le banquier A vole une proportion q de la fortune du banquier B ($q \in]0,1[$ fixé).
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n et b_n les fortunes respectives des banquiers A et B au jour n, on modélise donc cette situation par les relations de récurrence :
$$\begin{cases} a_{n+1} &= (1-p)a_n + qb_n \\ b_{n+1} &= pa_n + (1-q)b_n \end{cases}$$
L'objectif de l'exercice est de déterminer comment se comportent en temps long les fortunes de A et B en fonction de p, q, et des conditions initiales.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que l'on a $X_{n+1} = MX_n$ pour une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à préciser.
   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de X_n en fonction de M, n et X_0.
2. On pose la matrice $Q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ p & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $Q^2 + (1-q)Q - (p+q)I_2 = 0$.

(b) En déduire que Q est inversible, et préciser son inverse.
Note : à ce stade, on doit trouver $Q^{-1} = \dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p & -q \end{pmatrix}$

3. On pose la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-(p+q)) \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que $M = QDQ^{-1}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = QD^nQ^{-1}$.
   Conseil : on pourra commencer par regarder M^2, M^3,...

   (c) Calculer D^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que $D^n \underset{n\to+\infty}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & o(1) \end{pmatrix}$, où $o(1)$ désigne une quantité qui tend vers 0.

4. Déduire des questions précédentes les limites des suites a et b (on s'appliquera à donner ces limites en fonction de p, q, et de la quantité $(a_0 + b_0)$).

Exercice 6 (sujet 2)**.**
Une matrice carrée A est dite **nilpotente** s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Dans ce cas, l'**indice de nilpotence** de A désigne le plus petit entier p qui vérifie l'égalité $A^p = 0$. On définit alors l'exponentielle de A par :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} A^k$$

On pose enfin les deux matrices :

$$M = \begin{pmatrix} -10 & 8 & -8 \\ -7 & 6 & -5 \\ 5 & -4 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que M et N sont nilpotentes et déterminer leur indice de nilpotence.

2. Calculer $\exp(N)$.

3. A l'aide des matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que la somme (respectivement le produit) de deux matrices nilpotentes peut ne pas être nilpotente.

4. Montrer qu'une matrice inversible ne peut pas être nilpotente.

5. Soit A une matrice nilpotente et $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Montrer que pour tout $q \geqslant p$: $\exp(A) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} A^k$

6. Soit A, B deux matrices carrées (de même taille) qui commutent : $AB = BA$. On suppose A et B nilpotentes, d'indices de nilpotence respectifs p et q.

   (a) Montrer que AB est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur à $\min(p, q)$.

   (b) Montrer que $A + B$ est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur à $p + q$.

   (c) On admet que $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. Est-ce que $\exp(A)$ et $\exp(B)$ commutent ?

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente.

   (a) Déduire de la question précédente que $\exp(A)$ est inversible, et préciser son inverse (on pourra s'intéresser à ce que vaut $\exp(0)$).

(b) $\exp(A)$ est-elle nilpotente ?

(c) Montrer que $\exp(A) - I_n$ est nilpotente.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$.

   (a) Montrer que si A est nilpotente, alors B aussi, de même indice de nilpotence que A.

   (b) Montrer qu'alors on a $\exp(B) = P^{-1}(\exp(A))\,P$.

9. On pose $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que Q est inversible, et déterminer son inverse.

   (b) On admet que $M = Q^{-1}NQ$ (il s'agit d'une simple vérification). Exprimer $\exp(M)$ et $(\exp(M))^{-1}$ en fonction de Q, Q^{-1}, et de matrices explicites.

Correction du DS d'entrainement n 5

Exercice 1 1. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application croissante, on a donc $f(n+1) \geqslant f(n)$ pour tout n. Cela implique $f(n+1)+(n+1) \geqslant f(n)+(n+1) > f(n)+n$ donc $f+id$ est strictement croissante.

2. On considère les applications croissantes de $[|1,p|]$ dans $[|1,n|]$ pour $(p,n) \in [|1,2|]$.

   - Lorsque $p=1$, toutes les applications de $[|1,p|]$ dans $[|1,n|]$ sont strictement croissantes.
   - Lorsque $p=2$ et $n=1$, il n'y en a aucune.
   - Lorsque $p=2=n$, il n'y en a qu'une qui est l'identité.

3. On remarque qu'une application strictement croissante est injective donc son image est de même cardinal que l'ensemble de départ. Par ailleurs, étant donnée une fonction f strictement croissante, elle est déterminée par son image. En effet, le plus petit élément de son image est nécessairement l'image de 1, le deuxième plus petit est l'image de 2 etc. Le nombre d'applications strictement croissantes est donc égale au nombre d'images possibles c'est-à-dire au nombre de parties à p éléments de $[|1,n|]$. On a donc $\text{Card}C^s_{n,p} = \binom{n}{p}$.

4. On considère l'application
$$\varphi \left\{ \begin{array}{lll} C_{p,n} & \to & C^s_{p,n+p-1} \\ f & \mapsto & f+id-1 \end{array} \right.$$
On sait que si f est croissante, $f+id$ est strictement croissante donc $f+id-1$ aussi ce qui montre que φ est bien définie. Pour la bijectivité, on remarque qu'un antécédent d'une fonction g est la fonction $g-id+1$ et cet antécédent est unique donc φ est bien bijective. On a donc $\text{Card}C_{p,n} = \text{Card}C^s_{n,n+p-1}$. Reste à calculer le cardinal de l'ensemble des applications strictement croissantes entre deux ensembles finis.

5. En utilisant la question précédente et le fait que deux ensembles finis en bijection ont même cardinal, on a $\text{Card}C_{n,p} = \text{Card}C^s_{p,n+p-1} = \binom{n+p-1}{p}$.

6. On suit l'indication et on pose $S_k = \sum\limits_{k=1}^{k} a_i$. On remarque que si $(a_1,\dots,a_p)$ est un p-uplet tel que $\sum\limits_{i=1}^{p} a_i \leqslant n$, alors S_k est une application croissante de $[|1,p|]$ dans $[|1,n|]$. Réciproquement, étant donné une application f croissante, le p-uplet
$$(a_1,\dots,a_p) = (f(1), f(2)-f(1), \dots, f(p)-f(p-1))$$
satisfait la condition demandée et de plus $f(k) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$ pour tout $k = 1\dots p$ donc on a montré qu'il y a en bijection entre l'ensemble des p-uplets recherché et l'ensemble des applications croissantes de $[|1,p|]$ dans $[|1,n|]$. Il y a donc $\binom{n+p-1}{p}$ tels p-uplets.

7. Utilisons un raisonnement analogue à celui de la question précédente. On montre sans difficulté que le nombre de p-uplets recherché est égal au cardinal de l'ensemble des applications croissantes de $[|1,p|]$ dans $[|1,n|]$ telles que $f(p)=n$. Reste à déterminer ce cardinal. On remarque qu'une telle application est déterminée par les images de $1\dots p-1$ (puisque l'image de p est imposée égale à n). Le nombre de telles applications est donc égal au nombre d'applications croissantes de $[|1,p-1|]$ dans $[|1,n|]$ soit $\binom{n+p-2}{p-1}$.

Exercice 2 1. (a) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la fonction f est continue sur $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$, dérivable sur $\left]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe donc $x_k \in \left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ tel que

$$\frac{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = f'(x_k),$$

c'est à dire :

$$f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \frac{1}{n}f'(x_k)$$

Certains m'ont cité les hypothèses entre 0 et 1 ce qui n'a pas de sens car on applique le TAF entre $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$.

(b) D'après la question précédente, les réels $x_1,\dots,x_n$ trouvés vérifient

$$0 < x_1 < \frac{1}{n} < x_2 < \frac{2}{n} < \dots < x_{n-1} < \frac{n-1}{n} < x_n < 1$$

donc on a bien $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$. On somme les égalités $\frac{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = f'(x_k)$ pour k variant de 1 à n. On a

$$n\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} f'(x_k).$$

On reconnaît une somme télescopique, on a donc

$$\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = n\left(f(1)-f(0)\right) = n.$$

On a bien l'égalité souhaitée.

Globalement tout le monde a compris ce qu'il fallait faire mais c'est vraiment rédigé avec les pieds. Pensez notamment à bien montrer TOUT ce qu'on vous demande (notamment les x_i ordonnés)

2. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ donc pour tout $x \geqslant 0$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$. On en déduit que f est k-lispchitzienne avec $k = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. On peut aussi choisir $k = \frac{1}{2}$ si on veut se simplifier les calculs.

(b) On résout $f(x)=x$:

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -1$$

On a bien montré que f admet un unique point fixe positif, égal à 2.

Certains ont perdu du temps à montrer que f s'annulait un unique fois avec un tableau de variations... perte de temps

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - 2| &= |f(u_n) - f(2)| \text{ car } f(2) = 2 \\ &\leqslant k\,|u_n - 2| \text{ car } f \text{ est } k\text{-lipschitzienne} \end{aligned}$$

(d) Par une récurrence immédiate, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 2| \leqslant k^n\,|u_0 - 2|\,,$$

et $k \in [0,1[$ donc $k^n \to 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - 2) = 0$ donc $u_n \to 2$.

Exercice 3 **Partie 1**

Soit $f \in C^1(I)$ strictement croissante et convexe.

1. (a) On a f strictement croissante donc $\forall x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$. Supposons, par l'absurde, que f' s'annule. Comme f est convexe et dérivable, sa dérivée f' est croissante. Si elle s'annule, elle est donc négative avant ce point puis positive. Cela implique que f change de monotonie ce qui est absurde. On en déduit que pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$.
   Attention, la stricte croissance de f n'implique pas que f' est strictement positive. Pensez à $f : x \mapsto x^3$, elle est strictement croissante mais sa dérivée s'annule en 0.

   (b) À nouveau, on raisonne par l'absurde en supposant que f s'annule en deux points distincts. En appliquant le thm de Rolle, on obtient l'annulation de f' entre ces ceux points ce qui contredit la question précédente. On en déduit que f s'annule au plus une fois sur I.

2. On suppose qu'il existe $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$

   (a) Soit $x \in [\alpha, b[$. On sait que f est strictement croissante et $f(\alpha) = 0$ donc $f(x) > 0$. Par ailleurs, on a montré que $f'(x) > 0$ donc $\dfrac{f(x)}{f'(x)} > 0$. On en déduit que $x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} < x \leqslant b$.
   Montrons l'autre inégalité. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \alpha \leqslant x - \frac{f(x)}{f'(x)} &\Leftrightarrow f'(x)\alpha \leqslant xf'(x) - f(x) \text{ car } f'(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha - x)f'(x) + f(x) \leqslant 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha - x)f'(x) + f(x) \leqslant f(\alpha) \end{aligned}$$

   La dernière inégalité traduit le fait que le graphe de f en le point d'abscisse α est au-dessus de la tangente en le point d'abscisse x ce qui est vrai puisque f est convexe. On en déduit, par équivalence, que $x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} > \alpha$.

   On a bien $\forall x \in [\alpha, b[, x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \in [\alpha, b[$.

   (b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

   On pose $g : x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. On a $f(x_0) > f(\alpha)$ donc, pas stricte croissance de f, $x_0 > \alpha$ c'est-à-dire $x_0 \in [\alpha, b[$. D'après la question précédente, on a montré que $[\alpha, b[$ est stable par g et $[\alpha, b[\subset I$. On en déduit que la suite est bien définie.
   Certains se sont contentés de dire que $f'(x) \neq 0$, c'est insuffisant

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $x_{n+1} - x_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Or $x_n > \alpha$ donc $f(x_n) > 0$ et on sait que $f' > 0$. On en déduit que $\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} > 0$ donc $x_{n+1} - x_n < 0$. Ceci étant vrai pour tout n, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > \alpha$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée donc convergente. Notons l sa limite. On a $x_{n+1} \to l$ et $x_{n+1} \to l - \dfrac{f(l)}{f'(l)}$ par continuité de f et f'. Par unicité de la limite, on a donc $l = l - \dfrac{f(l)}{f'(l)}$ donc $f(l) = 0$ puis $l = \alpha$ par injectivité de f. On a montré que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Partie 2

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$ et $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$.

1. D'après la première question, on sait que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$.

   On sait également que α est un point intérieur à I car I est un intervalle ouvert. Il existe η_1 tel que $]\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1[\subset I$.

   On a alors $]\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1[\ \subset I$ et

$$\forall x \in\ ]\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1[\,, f'(x) \neq 0.$$

2. On considère la fonction F suivante :

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc}]\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \end{array} \right.$$

   Montrons que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

   D'après la question précédente, la fonction est le quotient de deux fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc C^1.

3. On rappelle que toute fonction de classe $C^2(I)$ g possède un DL_2 en tout point a de I de la forme

$$g(x) = g(a) + (x-a)g'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} g\text{''}(a) + o\left((x-a)^2\right).$$

   (a) On a $F(\alpha) = \alpha - \dfrac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha$ et

$$\forall x \in]\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1[, F'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x) f\text{''}(x)}{f'(x)^2},$$

   donc $F'(\alpha) = 0$.

   (b) D'après la formule rappelée ci-dessus, on a

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f\text{''}(\alpha)(x-\alpha)^2}{2} + o\left((x-\alpha)^2\right),$$

   et

$$f'(x) = f'(\alpha) + f\text{''}(\alpha)(x-\alpha) + o\left(x-\alpha\right).$$

(c) En utilisant les DL trouvés à la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
F(x) &= x - \frac{f'(\alpha)(x-\alpha) + \dfrac{f"(\alpha)(x-\alpha)^2}{2} + o\left((x-\alpha)^2\right)}{f'(\alpha) + f"(\alpha)(x-\alpha) + o\left(x-\alpha\right)} \\
&= x - (x-\alpha)\left(\frac{1 + (x-\alpha)\frac{f"(\alpha)}{2f'(\alpha)} + o\left(x-\alpha\right)}{1 + \frac{f"(\alpha)}{f'(\alpha)}(x-\alpha) + o(x-\alpha)}\right) \\
&= x - (x-\alpha)\left(1 + (x-\alpha)\frac{f"(\alpha)}{2f'(\alpha)} + o\left(x-\alpha\right)\right)\left(1 + \frac{f"(\alpha)}{f'(\alpha)}(x-\alpha) + o(x-\alpha)\right) \\
&= x - (x-\alpha)\left(1 - \frac{f"(\alpha)}{f'(\alpha}(x-\alpha) + \frac{f"(\alpha)}{2f'(\alpha}(x-\alpha) + o(x-\alpha)\right) \\
&= \alpha + \frac{f"(\alpha)}{2f'(\alpha}(x-\alpha)^2 + o\left((x-a)^2\right)
\end{aligned}$$

On a montré que F admet un DL_2 en α.

Attention, F n'est pas C^2, vous ne pouvez donc pas affirmer qu'elle admet un DL2

4. D'après la question précédente, on sait que

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{F(x)-\alpha}{(x-\alpha)^2} = \frac{f"(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Par définition de la limite, on sait qu'il existe $\nu > 0$ tel que

$$\forall x \in \left]\alpha-\nu, \alpha+\nu\right[\cap \left]\alpha-\eta_1, \alpha+\eta_1\right[, \left|\left|\frac{F(x)-\alpha}{(x-\alpha)^2}\right| - \frac{f"(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right| < 1.$$

On pose $c = \dfrac{f"(\alpha)}{2f'(\alpha)} + 1 > 1$ car $\dfrac{f"(\alpha)}{2f'(\alpha)} > 0$, alors

$$\forall x \in \left]\alpha-\eta_1, \alpha+\eta_1\right[\cap \left]\alpha-\nu, \alpha+\nu\right[,$$

$$\left|\frac{F(x)-\alpha}{(x-\alpha)^2}\right| \leqslant \left|\frac{F(x)-\alpha}{(x-\alpha)^2} - \frac{f"(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right| + \left|\frac{f"(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|$$

par l'inégalité triangulaire donc

$$\forall x \in \left]\alpha-\eta_1, \alpha+\eta_1\right[\cap \left]\alpha-\nu, \alpha+\nu\right[, \left|\frac{F(x)-\alpha}{(x-\alpha)^2}\right| < c.$$

On pose enfin $\eta_2 = \dfrac{1}{2}\min(\nu, \eta_1)$, on a bien $0 < \eta_2 < \eta_1$ et

$$\forall x \in \left]\alpha-\eta_2, \alpha+\eta_2\right[, |F(x)-\alpha| \leqslant c(x-\alpha)^2.$$

5. On veut montrer qu'il existe $c > 1$ et $\eta \in \left]0, \eta_1\right[$ tel que

- $\left]\alpha-\eta, \alpha+\eta\right[\subset I$,
- $\forall x \in \left]\alpha-\eta, \alpha+\eta\right[, F(x) \in \left]\alpha-\eta, \alpha+\eta\right[$,
- $\forall x \in \left]\alpha-\eta, \alpha+\eta\right[, |F(x)-\alpha| \leqslant c(x-\alpha)^2$.

On sait déjà qu'il existe $c > 1$ et $\eta_2 \in \left]0, \eta_1\right[$ tel que

$$\forall x \in \left]\alpha - \eta_2, \alpha + \eta_2\right[, |F(x) - \alpha| \leqslant c(x-\alpha)^2.$$

Reste à montrer que quitte à restreindre l'intervalle, on peut le choisir stable par F. On sait que $F'(\alpha) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to \alpha} F'(x) = 0$ par continuité de F'. Ainsi, il existe $\eta_3 > 0$ tel que

$$\forall x \in]x - \eta_3, x + \eta_3[\cap]x - \eta_1, x + \eta_1[, |F'(x)| < 1.$$

On a donc

$$\forall (x, y) \in]x - \eta_3, x + \eta_3[\cap]x - \eta_1, x + \eta_1[, |F(x) - F(y)| \leqslant |x - y|,$$

puis

$$\forall x \in]x - \eta_3, x + \eta_3[\cap]x - \eta_1, x + \eta_1[, |F(x) - \alpha| \leqslant |x - \alpha| < \eta_3.$$

On choisit maintenant $\eta = \min \eta_2, \eta_3$. On a bien les trois points vérifiés.

Dans toute la suite du problème, on considèrera η et c vérifiant ces conditions.

6. Soit (x_n) la suite définie par $x_0 \in \left]\alpha - \eta, \alpha + \eta\right[\cap \left]\alpha - \frac{1}{c^2}, \alpha + \frac{1}{c^2}\right[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = F(x_n)$$

   (a) Par définition de η, $\left]\alpha - \eta, \alpha + \eta\right[$ est stable par F et $\left]\alpha + \eta, \alpha - \eta\right[\subset I$ donc la suite est bien définie. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \left]\alpha - \eta, \alpha + \eta\right[$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $x_n \in \left]\alpha - \eta, \alpha + \eta\right[$ donc

$$|F(x_n) - \alpha| \leqslant c\,|x_n - \alpha|^2,$$

donc

$$|x_{n+1} - \alpha| \leqslant c\,|x_n - \alpha|^2.$$

On a également

$$|x_n - \alpha| \leqslant c\,|x_{n-1} - \alpha|^2,$$

donc

$$|x_{n+1} - \alpha| \leqslant c.c^2\,|x_{n-1} - \alpha|^4.$$

Par récurrence descendante, on en déduit que

$$|x_{n+1} - \alpha| \leqslant c.c^2.\dots.c^{2^n}\,|x_0 - \alpha|^{2^{n+1}}.$$

Soit, pour $n \geqslant 1$,

$$|x_n - \alpha| \leqslant c.c^2.\dots.c^{2^{n-1}}\,|x_0 - \alpha|^{2^n}.$$

On a $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} c^{2^k} = c^{\sum_{k=0}^{n-1} 2^k} = c^{2^n - 1}$.

Par ailleurs, $|x_0 - \alpha| \leqslant \frac{1}{c^2}$ par hypothèse donc pour tout $n \geqslant 1$,

$$|x_n - \alpha| \leqslant \frac{c^{2^n - 1}}{c^{2^{n+1}}}.$$

On a $2^n - 1 - 2^{n+1} = -2^n - 1$ On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, |x_n - \alpha| \leqslant c^{-2^n - 1}.$$

L'inégalité reste vraie pour $n = 0$ par définition de x_0, on a donc bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - c| \leqslant c^{-2^n - 1}.$$

(c) On a $c > 1$ donc $c^{-2^n-1} \to 0$. On en déduit que la suite (x_n) converge vers α.

Exercice 4 1. On écrit le système associé :

$$\begin{cases} x+y+z &= a \\ x+y+z &= b \\ x+y+z &= c \end{cases}$$

que l'on triangularise :

$$\begin{cases} x+y+z &= a \\ 0 &= b-a \\ 0 &= c-a \end{cases}$$

On a donc $\mathrm{rg} U = 1$.

2. On calcule $U^2 = 3U$. Par itération, on obtient immédiatement $U^p = 3^{p-1}U, \forall p \geqslant 1$.

(a) Comme I et U commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton:

$$A^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (\beta U)^k \times (\alpha I)^{n-k} = \alpha^p I + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \beta^k 3^{k-1} \alpha^{n-k} U = \frac{1}{3}((3\beta+\alpha)^p - \alpha^p)U + \alpha^p I$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} A^2 &= \alpha^2 I + 2\alpha\beta U + \beta^2 U^2 \\ &= \alpha^2 I + (2\alpha\beta + 3\beta^2)U \\ &= \left(\alpha^2 - \alpha(2\alpha+3\beta)\right) I + (2\alpha+3\beta)A \\ &= -\alpha\left(\alpha+3\beta\right) I + (2\alpha+3\beta)A \end{aligned}$$

On a donc

$$A\left(A - (2\alpha+3\beta)I\right) = -\alpha\left(\alpha+3\beta\right) I.$$

Si $\alpha\left(\alpha+3\beta\right) \neq 0$ c'est-à-dire si $\alpha \neq 0$ et $\alpha + 3\beta \neq 0$, alors on peut écrire

$$A\left(-\frac{1}{\alpha(\alpha+2\beta)}\left(A - (2\alpha+3\beta)I\right)\right) = I$$

donc A est inversible.

(c) Montrons que la condition $\alpha \neq 0$ et $\alpha + 3\beta \neq 0$ est nécessaire. On va montrer que $\alpha = 0$ ou $\alpha + 3\beta = 0$ implique A non inversible.

On sait déjà que si $\alpha = 0$, alors $A = \beta U$ est non inversible puisque U est non inversible (car de rang 1). On suppose $\alpha + 3\beta = 0$, alors la somme des trois lignes de la colonne vaut 0 donc le système associé ne sera pas de rang 3. On en déduit que la matrice n'est pas inversible.

(d) On suppose désormais $\alpha \neq 0$ et $\alpha + 3\beta \neq 0$. On a vu que

$$A\left(-\frac{1}{\alpha(\alpha+2\beta)}\left(A - (2\alpha+3\beta)I\right)\right) = I$$

ce qui impose

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha(\alpha+3\beta)}((2\alpha+3\beta)I - \alpha I - \beta U) = \frac{1}{\alpha(\alpha+3\beta)}((\alpha+3\beta)I - \beta U) = \frac{1}{\alpha}I - \frac{\beta}{\alpha(\alpha+3\beta)}U$$

Exercice 5 1. (a) Par définition, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-p)a_n + qb_n \\ pa_n + (1-q)b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

Donc $M \hat{=} \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ convient.

(b) Récurrence. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{H}(n)$: "$X_n = M^n X_0$".

- Initialisation : $\mathcal{H}(0)$ signifie "$X_0 = X_0$", ce qui est vrai.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}(n)$. On a alors :

$$X_{n+1} = MX_n \underset{\mathcal{H}(n)}{=} M.M^n X_0 = M^{n+1} X_0$$

ce qui montre $\mathcal{H}(n+1)$.
- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

2. (a) On calcule $Q^2 = \begin{pmatrix} q^2+p & q-1 \\ pq-p & 1+p \end{pmatrix}$ donc :

$$\begin{aligned} Q^2 + (1-q)Q - (p+q)I_2 & \\ &= \begin{pmatrix} q^2+p & q-1 \\ pq-p & 1+p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q-q^2 & 1-q \\ p-pq & q-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -p-q & 0 \\ 0 & -p-q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) On en déduit :

$$Q\left(Q + (1-q)I_2\right) = (p+q)I_2$$

Puis :

$$Q \times \left[\frac{1}{p+q}(Q + (1-q)I_2)\right] = I_2$$

ce qui montre que Q est inversible, et $Q^{-1} = \frac{1}{p+q}(Q + (1-q)I_2)$.

On calcule alors $Q^{-1} = \dfrac{1}{p+q} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p & -q \end{pmatrix}$.

3. (a) On calcule : $QD = \begin{pmatrix} q & 1-(p+q) \\ p & (p+q)-1 \end{pmatrix}$ puis :

$$\begin{aligned} (QD)Q^{-1} &= \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & 1-(p+q) \\ p & (p+q)-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p & -q \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q+p-p^2-pq & q-q+(p+q)q \\ p+(p+q)p-p & p+q-q(p+q) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} (p+q)(1-p) & (p+q)q \\ (p+q)p & (p+q)(1-q) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \\ &= M \end{aligned}$$

(b) Récurrence. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{H}(n)$: "$M^n = QD^nQ^{-1}$".

- Initialisation : $\mathcal{H}(0)$ signifie "$I_2 = QQ^{-1}$", ce qui est vrai.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}(n)$. On a alors :

$$M^{n+1} = M^n.M \underset{\mathcal{H}(n)}{=} QD^n \underbrace{Q^{-1} \times Q}_{=I_2} DQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}$$

ce qui montre $\mathcal{H}(n+1)$.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

(c) Récurrence. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{H}(n)$: $\left[D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-(p+q))^n \end{pmatrix} \right]$.

- Initialisation : $\mathcal{H}(0)$ signifie "$I_2 = I_2$", ce qui est vrai.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}(n)$. On a alors :

$$D^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-(p+q))^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-(p+q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-(p+q))^{n+1} \end{pmatrix}$$

ce qui montre $\mathcal{H}(n+1)$.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

A ce stade, on remarque que comme $\begin{cases} 0 < p < 1 \\ 0 < q < 1 \end{cases}$, on a $0 < p+q < 2$.
Donc $-1 < 1-(p+q) < 1$, ce qui implique que $(1-(p+q))^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
En d'autres termes, $(1-(p+q))^n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, et $D^n \underset{n\to+\infty}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & o(1) \end{pmatrix}$.

4. Rappel : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = QD^nQ^{-1}X_0$. On calcule :

▶ $Q^{-1}X_0 = \dfrac{1}{p+q} \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ pa_0 - qb_0 \end{pmatrix}$

▶ $D^n(Q^{-1}X_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & o(1) \end{pmatrix} \times Q^{-1}X_0 = \dfrac{1}{p+q} \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ o(1) \end{pmatrix}$

▶ $Q \times (D^nQ^{-1}X_0) = \dfrac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & 1 \\ p & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ o(1) \end{pmatrix}$

Donc :

$$a_n = \frac{1}{p+q}\left[q(a_0+b_0) + o(1)\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{q}{p+q}(a_0+b_0)$$

et:

$$b_n = \frac{1}{p+q}\left[p(a_0+b_0) + o(1)\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{p}{p+q}(a_0+b_0)$$

Exercice 6 1. ▶ On a $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, et $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, M est nilpotente, d'indice 3.

▶ On a $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, N est nilpotente, d'indice 3.

2. On a, par définition,

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!}N^k = \mathrm{I}_3 + N + \frac{1}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Plusieurs personnes m'ont écrit $1 + N + \frac{1}{2}N^2$ ce qui n'a aucun sens puisque vous additionnez un réel avec une matrice!

3. Posons $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   ▶ On a $A^2 = 0_2 = B^2$, ce qui montre que A et B sont bien nilpotentes.

   ▶ On a $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $(A+B)^2 = \mathrm{I}_2$, $(A+B)^3 = (A+B)$, ... Par récurrence immédiate, on montre alors que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(A+B)^{2k} = \mathrm{I}_2$ et $(A+B)^{2k+1} = A+B$; la matrice $A + B$ n'est donc pas nilpotente.

   ▶ On a $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est une matrice diagonale. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$:

   $$(AB)^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   La matrice AB n'est donc pas nilpotente.

   On en déduit que le produit ou la somme de deux matrices nilpotentes peut ne pas être nilpotente.

   Attention aux subtilités du français, vous changez le sens de la phrase en écrivant "ne peut pas" au lieu de "peut ne pas"

4. Soit A une matrice carrée inversible. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, A^p est inversible (produit de matrices inversibles), et donc $A^p \neq 0$. A n'est donc pas nilpotente.

   Certains ont raisonné avec l'indice de nilpotence p en disant que $A^p = (0)$ implique, en multipliant par A^{-1}, que $A^{p-1} = (0)$ ce qui contredit la définition de p comme plus petit entier vérifiant ceci.

   D'autres encore ont écrit $AA^{-1} = I_n$ donc $(AA^{-1})^p = I_n$. Là il faut être rigoureux pour obtenir la contradiction. On va le voir plus loin, lorsque deux matrices commutent, la puissance du produit est le produit des puissances donc on a, ici, $(AA^{-1})^p = A^p(A^{-1})^p$ ce qui est absurde car on obtient alors $(0) = I_n$.

5. Soit $q \geqslant p$. On a

   $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} A^k + \sum_{k=p}^{q-1} \frac{1}{k!} A^k &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} A^k + \sum_{k=p}^{q-1} \frac{1}{k!} (0_n)^k \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} A^k \\ &= \exp(A)\end{aligned}$$

6. (a) Comme A et B commutent, on a:

   $$(AB)^p = A^p B^p = 0.B^p = 0$$

   ce qui prouve que (AB) est nilpotente, d'indice de nilpotence (notons-le i) inférieur à p.
   On a aussi :

   $$(AB)^q = A^q B^q = A^q.0 = 0$$

   ce qui prouve que i est aussi inférieur à q.
   Finalement, $i \leqslant \min(p, q)$.

(b) Comme A et B commutent, on a, par le binôme de Newton

$$(A+B)^{p+q}=\sum_{k=0}^{p+q}\binom{p+q}{k}A^kB^{p+q-k}$$

Or :

i. pour $k\in[\![0,p]\!]$, on a $p+q-k\geqslant q$ et donc $B^{p+q-k}=0$;
ii. pour $k\in[\![p+1,p+q]\!]$, on a $k\geqslant p$ et donc $A^k=0$.

Tous les termes de la somme sont donc nuls, et $(A+B)^{p+q}=0$. Cela prouve que $A+B$ est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à $p+q$.

(c) Dans un souci d'équité, j'ai neutralisé cette question car j'en avais déjà discuté avec certains d'entre vous.
Voilà quand même la démonstration du résultat:

En utilisant les résultats des questions 5 et 6b,

$$\begin{aligned}
\exp(A+B)&=\sum_{k=0}^{p+q}\frac{1}{k!}(A+B)^k=\sum_{k=0}^{p+q}\frac{1}{k!}\sum_{\ell=0}^{k}\left(\begin{array}{c}k\\ \ell\end{array}\right)A^\ell B^{k-\ell}\\
&=\sum_{0\leqslant\ell\leqslant k\leqslant p+q}\frac{1}{k!}\left(\begin{array}{c}k\\ \ell\end{array}\right)A^\ell B^{k-\ell}\\
&=\sum_{0\leqslant\ell\leqslant k\leqslant p+q}\frac{1}{\ell!}\frac{1}{(k-\ell)!}A^\ell B^{k-\ell}\\
&=\sum_{\ell=0}^{p+q}\sum_{k=\ell}^{p+q}\frac{1}{\ell!}\frac{1}{(k-\ell)!}A^\ell B^{k-\ell}\\
&=\sum_{\ell=0}^{p+q}\frac{1}{\ell!}A^\ell\sum_{k=\ell}^{p+q}\frac{1}{(k-\ell)!}B^{k-\ell}\\
&=\sum_{\ell=0}^{p+q}\frac{1}{\ell!}A^\ell\sum_{a=0}^{p+q-\ell}\frac{1}{a!}B^a\quad\text{(changement d'indice }\ a=k-l)\\
&=\sum_{\ell=0}^{p}\frac{1}{\ell!}A^\ell\sum_{a=0}^{p+q-\ell}\frac{1}{a!}B^a\quad(\text{car}\quad A^\ell=0\quad\text{si}\quad\ell>p)\\
&=\sum_{\ell=0}^{p}\frac{1}{\ell!}A^\ell\exp(B)\quad(\text{car}\quad p+q-\ell\geqslant p+q-p=q)\\
&=\exp(B)\sum_{\ell=0}^{p}\frac{1}{\ell!}A^\ell=\exp(A)\exp(B)
\end{aligned}$$

Une fois la formule établie (ou admise ici), on a, par commutativité de l'addition matricielle :

$$\exp(A)\exp(B)=\exp(A+B)=\exp(B+A)=\exp(B)\exp(A)$$

donc $\exp(A)$ et $\exp(B)$ commutent.

7. (a) D'après la question qui précède, on a en particulier:

$$\exp(0)=\exp(A-A)=\exp(A)\exp(-A)$$

Or, la matrice nulle est nilpotente d'indice 1, puisque $0^1 = 0$; on a donc $\exp(0) = \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} 0^k = \mathrm{I}_n$.

On a donc $\mathrm{I}_n = \exp(A)\exp(-A) = \exp(-A)\exp(A)$.

Ainsi, $\exp(A)$ est inversible, d'inverse $\exp(-A)$.

(b) On vient de démontrer que $\exp(A)$ est inversible. Par la question 4, on en déduit qu'elle ne peut pas être nilpotente.

(c) Par définition, et en notant p l'indice de nilpotence de A, on a

$$\exp(A) - \mathrm{I}_n = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k!} A^k = A + \frac{1}{2}A^2 + \ldots + \frac{1}{(p-1)!}A^{p-1}$$

- ▶ Chacune des puissances de A est nilpotente (par exemple, par le résultat de la question 6a, puisqu'il s'agit du produit de matrices nilpotentes qui commutent).
- ▶ Les matrices du type A^i commutent entre elles, car $A^iA^j = A^{i+j} = A^{j+i} = A^jA^i$.
- ▶ Donc, $\exp(A) - \mathrm{I}_n$ est une somme de matrices nilpotentes qui commutent entre elles, donc par la question 6b, elle est nilpotente.

8. (a) On a $B = P^{-1}AP$, puis par associativité du produit matriciel,

$$B^2 = \left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}A\left(PP^{-1}\right)AP = P^{-1}A^2P$$

Par une récurrence immédiate, on montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k = P^{-1}A^kP$. En particulier, si l'on note p l'indice de nilpotence de A, on obtient alors

$$B^p = P^{-1}A^pP = P^{-1}0_nP = 0_n$$

Ainsi, B est nilpotente, d'indice de nilpotence $q \leqslant p$.

De plus, si $q < p$, alors $A^q \neq 0_n$, et donc $B^q = P^{-1}A^qP \neq 0_n$. En effet, si $B^q = P^{-1}A^qP = 0_n$, cela donnerait $A^q = PB^qP^{-1} = P0_nP{-}1 = 0_n$: impossible. Ainsi, $q = p$.

J'ai vu des formules très fausse avec des P^p. Pensez à regarder sur les premiers termes que votre formule fonctionne (ou pas).

La plupart d'entre vous m'a montré que $B^p = (0)$ ce qui montre (seulement) que B est nilptente d'indice inférieur ou égal à l'indice de A. Il faut ensuite montrer l'égalité.

(b) Notons toujours p l'indice de nilpotence de A.

- ▶ On a montré que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k = P^{-1}A^kP$.
- ▶ On obtient ainsi:, en factorisant par P^{-1} à gauche et par P à droite:

$$\exp(B) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!}\left(P^{-1}AP\right)^k = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!}P^{-1}A^kP = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!}A^k\right)P = P^{-1}\exp(A)P$$

9. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$QX = Y \iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x_1 & \boxed{-x_2} & +2x_3 & = & y_1 \\ -3x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = & y_2 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ x_1 & & +2x_3 & = & y_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & y_1 \\ \boxed{x_1} & & +x_3 & = & 2y_1 + y_2 \\ x_1 & & +2x_3 & = & y_3 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & y_1 \\ x_1 & & +x_3 & = & 2y_1 + y_2 \\ & & x_3 & = & -2y_1 - y_2 + y_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrrr} x_1 & = & 4y_1 & +2y_2 & -y_3 \\ x_2 & = & 3y_1 & +2y_2 & \\ x_3 & = & -2y_1 & -y_2 & +y_3 \end{array} \right. \quad \text{(par remontée puis } L_1 \leftrightarrow L_2\text{)}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} Y$$

Par théorème, ce travail montre que Q est inversible, et $\boxed{Q^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$.

(b) D'une part :

$$\exp(M) = Q^{-1} \exp(N) Q = \boxed{Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q}$$

D'autre part, d'après la question 7a, $\exp(M)^{-1} = \exp(-M)$, et

$$-M = -Q^{-1} N Q = Q^{-1}(-N)Q$$

donc

$$\exp(-M) = Q^{-1} \exp(-N) Q$$

On calcule :

$$\exp(-N) = I_3 - N + \frac{1}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où finalement :

$$\boxed{\exp(M)^{-1} = Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q}$$