Devoir surveillé 5, sujet 1 .

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} f_n(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}} \end{cases}$

1. Étudier la continuité de f_n en 0 et les variations de f_n sur $\mathbb{R}_+$.
2. La fonction f_n est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?
3. Montrer qu'il existe des réels α, β et γ à préciser tel que
$$f_n(x) = \alpha + \beta x + \frac{\gamma}{x} + o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$
4. En déduire que la courbe représentative de f_n, notée C_n, admet une droite asymptote notée D_n en $+\infty$ dont on précisera l'équation. Indiquer la position de C_n par rapport à D_n au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2.
On s'intéresse aux fonctions $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad h\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(h(x) + h(y)\right) \qquad (E)$$
L'objectif de l'exercice est de montrer que les solutions sont les fonctions affines.

1. Dans cette question, on se fixe une fonction continue h qui vérifie (E) et $h(0) = h(1) = 0$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(2x) = 2h(x)$, puis que h est 1-périodique.
   (b) En déduire que h est bornée, puis que h est nulle.
2. Dans cette question, on se fixe une fonction continue h qui vérifie (E).
   (a) On note a la fonction affine telle que $a(0) = h(0)$ et $a(1) = h(1)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $a(x)$ en fonction de $h(0)$, $h(1)$ et x.
   (b) Montrer que la fonction $\tilde{h} = h - a$ vérifie les hypothèses de la question 1.
3. Conclure.

Exercice 3.

Tout au long de ce problème, M désigne la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par:

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

et I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

1. Une première méthode pour le calcul des puissances de M.
   Considérons la matrice A définie par: $A = \frac{1}{4}(M - I_3)$.
   (a) Calculer A puis A^2.
   (b) Montrer que pour tout entier n appartenant à $\{0, 1, 2\}$, il existe un réel u_n tel que: $M^n = I_3 + u_n A$.
   (c) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que: $M^n = I_3 + u_n A$.
   (d) i. Déterminer pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.
   ii. Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, en déduire une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n.
2. Une seconde méthode de calcul des puissances de M.
   On pose:
   $$J = \frac{1}{4}(M + 3I_3).$$
   (a) Calculer J^2, puis pour tout entier naturel non nul n, J^n.
   (b) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer une expression de M^n en fonction de n, I_3 et J.
   (c) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, en déduire une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n.
3. Une troisième méthode de calcul des puissances de M.
   (a) On pose:
   $$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (b) On pose:
   $$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Donner pour tout entier naturel n, l'expression de D^n.
   (c) On admet que $P^{-1}MP = D$, exprimer pour tout entier n, M^n en fonction de D^n, P et P^{-1}.
   (d) Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, en en déduire une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n.

Exercice 4.
Si E est un ensemble et k un entier naturel non nul, une partition de E est un ensemble $\{A_1, \ldots, A_k\}$ de parties de E non vides, deux à deux disjointes, et dont la réunion est égale à E:

$$\forall i \in [\![1,k]\!],\ A_i \neq \emptyset, \quad \forall i,j \in [\![1,k]\!],\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \bigcup_{i=1}^{k} A_i = E.$$

Par exemple $\{\{1\},\{2,3\},\{4,5\}\}$ est une partition de $E = [\![1,5]\!]$ en trois parties. On notera en particulier que l'ordre des parties $A_1, \ldots, A_k$ n'a pas d'incidence sur la définition de la partition.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$, on note $S_{n,k}$ le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k parties. On pose également, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_{0,0} = 1$ et $S_{n,0} = 0$.
Les nombres $S_{n,k}$ sont appelées nombres de Stirling de deuxième espèce.

1. (a) Déterminer la valeur de $S_{3,2}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, que valent $S_{n,1}$ et $S_{n,n}$?

2. Soit n un entier, $n \geqslant 2$, soit $k \in [\![1,n-1]\!]$ et soit $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble à n éléments. On souhaite établir une relation entre $S_{n,k}$, $S_{n-1,k-1}$ et $S_{n-1,k}$.
   (a) Dans cette question, on étudie l'exemple $E = \{1,2,3,4\}$ $(n = 4)$ et $k = 2$.
      i. Expliciter les partitions de E en deux parties, dont l'une est le singleton $\{4\}$.
      ii. Expliciter les partitions de E en deux parties, dont l'une contient 4 tout en étant différente du singleton $\{4\}$.
      iii. Vérifier, pour l'exemple traité, la relation: $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$.
   (b) On revient au cas général.
      i. Quel est le nombre de partitions de E en k parties dont l'une est $\{x_n\}$? On exprimera le résultat à l'aide d'un nombre de Stirling.
      ii. Quel est le nombre de partitions de E en k parties, dont l'une contient x_n tout en étant différente du singleton $\{x_n\}$? On exprimera le résultat à l'aide d'un nombre de Stirling.
      iii. En déduire que $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$.

3. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, $S_{n,n-1} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. On pourra, par exemple, procéder par récurrence.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $k \in \mathbb{N}^\star$ et deux ensembles $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $F = \{y_1, \ldots, y_k\}$. On note $\sigma_{n,k}$ le nombre d'applications surjectives de E dans F.
   (a) Que vaut $\sigma_{n,k}$ si $n < k$.
   (b) Que vaut $\sigma_{n,k}$ si $n = k$.
   (c) Expliciter les applications surjectives de E dans F lorsque $n = 3$ et $k = 2$ et préciser la valeur de $\sigma_{3,2}$.
   (d) Dans cette question, on souhaite obtenir une relation entre $\sigma_{n,k}$ et $S_{n,k}$.
   Si f est une application de E dans F et j un entier compris entre 1 et k, on note $A_j = f^{-1}(\{y_j\})$ l'ensemble des antécédents par f de y_j.
      i. Étant donné une application f surjective de E dans F, montrer que $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ est une partition de E en k parties. On note $\Pi(f)$ cette partition.
      ii. Étant donnée $\mathcal{A}' = \{A'_1, \ldots, A'_k\}$ une partition de E en k parties, combien y a-t-il d'applications f surjectives de E dans F telles que $\Pi(f) = \mathcal{A}'$?
      iii. En déduire la relation $\sigma_{n,k} = k!S_{n,k}$

5. Montrer, par exemple par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $S_{n,k} \leqslant (2k)^n$.

Correction du DS n 5

Exercice 1 1. (a) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}}$.
Comme $\frac{n}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, on a $e^{-\frac{n}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$, donc $f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 = f(0)$.
Ainsi $\boxed{f_n \text{ est continue en } 0.}$
Certains m'ont calculé la limite en 0^-, cela n'a aucun sens étant donné que f_n est définie sur $\mathbb{R}^+$. f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit et composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f_n'(x) = e^{-\frac{n}{x}} + x\left(\frac{n}{x^2}e^{-\frac{n}{x}}\right) = \left(1 + \frac{n}{x}\right)e^{-\frac{n}{x}} > 0$$

Ainsi $\boxed{f_n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.}$
On détermine ses limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ par croissances comparées, on a donc le tableau suivant :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$+$
f_n	$0 \nearrow +\infty$

Je ne veux pas voir de " par croissances comparées" alors qu'il n'y a pas de forme indéterminée

2. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f_n'(x) = \left(1 + \frac{n}{x}\right)e^{-\frac{n}{x}} = e^{-\frac{n}{x}} + \frac{n}{x}e^{-\frac{n}{x}}$.
Si on pose $X = \frac{n}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, on a $\frac{n}{x}e^{-\frac{n}{x}} = \frac{X}{e^X} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées. Donc :

$$\frac{n}{x}e^{-\frac{n}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \text{ et } f_n'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

De plus, f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme elle est continue en 0, elle est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Donc par théorème de la limite de la dérivée, f_n est dérivable en 0, $(f_n)'(0) = 0$ et f' est continue en 0 . Comme elle l'est également sur $\mathbb{R}_+^*$, on conclut que $\boxed{f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$

3. On a $e^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$. On applique ce développement limité à $u = -\frac{n}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Ainsi :

$$e^{-\frac{n}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 - \frac{n}{x} + \frac{n^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ et } f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

En posant $\alpha = -n$, $\beta = 1$ et $\gamma = \dfrac{n^2}{2}$, on a bien le résultat souhaité.

4. D'après la question précédente, on a $f_n(x) - (x - n) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\boxed{\text{la droite } D_n \text{ d'équation } y = x - n \text{ est asymptote à } C_n \text{ en } +\infty.}$
En outre, lorsque $x \to +\infty$, $f_n(x) - (x - n) \sim \frac{n^2}{2x} > 0$. Donc par théorème (deux quantités équivalentes ont même signe au voisinage concerné), il existe un voisinage de $+\infty$ sur lequel $f_n(x) - (x - n) > 0$. Donc $\boxed{C_n \text{ est au dessus de } D_n \text{ au voisinage de } +\infty.}$ Je suis très surprise de voir le nombre de personnes qui m'écrivent des équations de la tangente qui ne sont pas de la forme $y = ax + b$ (et donc pas l'équation d'une droite !!!)

Exercice 2 1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On applique l'égalité (E) aux nombres $2x$ et 0 :

$$h\left(\frac{2x+0}{2}\right) = \frac{1}{2}(h(2x) + \underbrace{h(0)}_{=0}) \quad \text{donc} \quad h(x) = \frac{1}{2}h(2x)$$

$$\text{donc} \quad \boxed{h(2x) = 2h(x)}.$$

Je l'ai déjà dit à l'oral, " on pose $x = 2x$" signifie que vous posez $x = 0$!

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité (E) pour $2x$ et 2 donne :

$$h\left(\frac{2x+2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(h(2x)+h(2)\right)$$

Or, $h(2x) = 2h(x)$ et $h(2) = 2h(1) = 0$. On obtient donc $\boxed{h(x+1) = h(x)}$.
Cela étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, h est donc 1-périodique.

(b) Comme h est continue, h est bornée sur tout segment, en particulier $[0,1]$. Puis par périodicité, h est bornée sur $\mathbb{R}$.
Certains m'ont dit que h était bornée par $h(0)$ et $h(1)$ alors que PAS DU TOUT (ou du moins, on n'en sait rien !)

Montrons maintenant que h est nulle.
Absurde : supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) \neq 0$. On sait que $h(2x) = 2h(x)$, et par récurrence, on a que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h(2^n x) = 2^n h(x)$.
Or, selon le signe de $h(x)$, $2^n h(x)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Dans les deux cas, la suite $(h(2^n x))_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée, ce qui **contredit** le fait que h est bornée.
Conclusion : h est la fonction nulle.

Certains m'ont dit que le fait qu'elle était 1-périodique et nulle en 0 et 1 impliquait qu'elle était nulle. C'est très faux: $x \mapsto \sin(2\pi x)$ n'est pas nulle mais vérifie ces conditions

2. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $a(x) = h(0) + (h(1) - h(0))x$.

(b) Pour simplifier les notations, posons $\left|\begin{array}{l}\lambda = h(0)\\ \mu = h(1)-h(0)\end{array}\right.$, de sorte que $a : x \mapsto \lambda + \mu x$.
On a alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{h}\left(\frac{x+y}{2}\right) = h\left(\frac{x+y}{2}\right) - a\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

D'une part, $h\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(h(x)+h(y))$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} a\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \lambda + \mu\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((\lambda+\mu x)+(\lambda+\mu y)\right) \\ &= \frac{1}{2}(a(x)+a(y)) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \tilde{h}\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \frac{1}{2}(h(x)+h(y)) - \frac{1}{2}(a(x)+a(y)) \\ &= \frac{1}{2}\left[h(x)-a(x)+h(y)-a(y)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\tilde{h}(x)+\tilde{h}(y)\right] \end{aligned}$$

Comme h est continue (somme de fonctions continues), h vérifie bien (E), et par définition de la fonction a, on a :

$$\tilde{h}(0) = h(0) - a(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \tilde{h}(1) = 0.$$

3. D'après la question 1, $\tilde{h}$ est la fonction nulle. Donc $h = a$.
Cela signifie que toute fonction solution est affine.

Montrons que réciproquement, toutes les fonctions affines sont solutions. Soit $h : x \mapsto \lambda + \mu x$, où λ et μ sont deux réels. h est continue, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \lambda + \mu\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[(\lambda+\mu x)+(\lambda+\mu y)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(h(x)+h(y)\right) \end{aligned}$$

h est donc solution.

Vous avez souvent oublié de montrer la synthèse

Exercice 3 On pose: $M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1. On pose: $A = \frac{1}{4} \times (M - I_3)$.

   (a) On a donc:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \times \begin{pmatrix} -8 & 0 & -8 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

puis:

$$\begin{aligned} A^2 &= A \times A \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -A. \end{aligned}$$

On a $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^2 = -A$.

Faites bien apparaître que $A^2 = -A$ (surtout si vous comptez l'utiliser ensuite)

   (b) De $A = \frac{1}{4} \times (M - I_3)$, on déduit:
$M = 4A + I_3$.
Posons $u_0 = 0$, $u_1 = 4$ et $u_2 = -8$. On a:

$$\begin{aligned} M^0 &= I_3 \\ &= I_3 + 0 \times A \\ &= I_3 + u_0 \times A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^1 &= M \\ &= 4A + I_3 \\ &= I_3 + u_1 \times A \\ M^2 &= (4A + I_3)^2 \\ &= 16A^2 + I_3^2 + 8A \text{ par la formule du binôme de Newton} \\ &\text{invoquable car } I_3 \text{ et } 4A \text{ commutent} \\ &= -16A + I_3 + 8A \\ &= -8A + I_3 \\ &= I_3 + u_2 \times A \end{aligned}$$

On peut donc conclure:
Pour tout k dans $\{0, 1, 2\}$, il existe un réel u_k tel que $M^k = I_3 + u_k A$.

   (c) Pour tout k entier naturel, on appelle $\mathcal{P}_k$ la proposition :

$$\mathcal{P}_k : \text{ "Il existe un réel } u_k \text{ tel que } M^k = I_3 + u_k A \text{ "}$$

On a déjà vu que $\mathcal{P}_0$ était vraie. On suppose $\mathcal{P}_k$ vraie pour un certain entier naturel k, montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est alors vraie. On a: $M^{k+1} = M \cdot M^k$. Or, d'après $\mathcal{P}_k$, il existe u_k tel que $M^k = I_3 + u_k A$ d'où:

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M + u_k A \times M \\ &= M + u_k A \times (4A + I_3) \text{ car on a vu que } M = 4A + I_3. \\ &= 4A + I_3 + 4u_k A^2 + u_k A \\ &= 4A + I_3 - 4u_k A + u_k A \text{ car on a vu que } A^2 = -A. \\ &= (-3u_k + 4)A + I_3 \\ &= u_{k+1} A + I_3 \end{aligned}$$

en posant $u_{k+1} = -3u_k + 4$. $\mathcal{P}_{k+1}$ est donc vraie si $\mathcal{P}_k$ l'est.
$\mathcal{P}_0$ est vraie et pour tout entier naturel k, $\mathcal{P}_k$ implique $\mathcal{P}_{k+1}$. $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout entier naturel k d'après le principe de récurrence. On définit la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par:

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall\, k \in \mathbb{N}, u_{k+1} = -3u_k + 4.$$

On peut d'après notre récurrence affirmer que:
Pour tout entier naturel k, on a: $M^k = I_3 + u_k A$.

(d) i. On pose $c = \dfrac{4}{1-(-3)} = 1$. On sait que la suite $(u_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -3. On a donc, pour tout entier naturel n: $u_n - 1 = (-3)^n(u_0 - 1)$. Or $u_0 = 0$.
On a donc:
Pour tout entier naturel n, $u_n - 1 = -(-3)^n$. On en déduit:
Pour tout entier naturel n, $u_n = -(-3)^n + 1$.
Calculer l'expression du terme général d'une suite arithmético-géométrique est qqch que vous devez savoir faire.

ii. Or, on a vu que, pour tout entier naturel n, $M^n = I_3 + u_n A$.
On en déduit que, pour tout entier naturel n, on a:

$$\begin{aligned}
M^n &= I_3 + (-(-3)^n + 1)A \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (-(-3)^n + 1)\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - 2(-(-3)^n + 1) & 0 & -2(-(-3)^n + 1) \\ -(-3)^n + 1 & 1 & -(-3)^n + 1 \\ -(-3)^n + 1 & 0 & (-(-3)^n + 1) + 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 + 2\times(-3)^n & 0 & -2(-(-3)^n + 1) \\ -(-3)^n + 1 & 1 & -(-3)^n + 1 \\ -(-3)^n + 1 & 0 & -(-3)^n + 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} -1 + 2\times(-3)^n & 0 & -2(-(-3)^n + 1) \\ -(-3)^n + 1 & 1 & -(-3)^n + 1 \\ -(-3)^n + 1 & 0 & -(-3)^n + 2 \end{pmatrix}$.
Quand on dit "écriture matricielle", on attend une matrice (écrit comme ça, vous allez dire que j'ai craqué mais je vous promets qu'un nombre certain d'entre vous n'ont PAS écrit la matrice

2. (a) Pour toute matrice J de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a:

$$\begin{aligned}
M = 4J - 3I_3 &\iff J = \frac{1}{4}\times(M + 3I_3) \\
&\iff J = \frac{1}{4}\times\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\
&\iff J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La seule matrice J de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = 4J - 3I_3$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) On a:

$$\begin{aligned}
J^2 &= J\times J \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= J.
\end{aligned}$$

Par une récurrence immédiate sur n, on en déduit que : pour tout entier naturel n non nul, on a donc: $J^n = J$.

(c) Soit n un entier naturel non nul. Les matrices $-3I_3$ et $4J$ commutent donc, par la formule du binôme de Newton, on obtient:

$$\begin{aligned} M^n &= (4J + (-3I_3))^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (4J)^i (-3I_3)^{n-i} \\ &= \binom{n}{0} (4J)^0 (-3I_3)^{n-0} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 4^i J^i (-3)^{n-i} I_3 \\ &= (-3)^n I_3 + \left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 4^i (-3)^{n-i} \right) J \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on a donc: $M^n = (-3)^n I_3 + \left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 4^i (-3)^{n-i} \right) J.$

(d) D'après la formule du binôme de Newton, on a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 4^i (-3)^{n-i} &= -\binom{n}{0} 4^0 (-3)^{n-0} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 4^i (-3)^{n-i} \\ &= -(-3)^n + (4-3)^n \\ &= -(-3)^n + 1 \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on a donc: $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 4^i (-3)^{n-i} = 1 - (-3)^n$.

De $M^n = (-3)^n I_3 + \left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 4^i (-3)^{n-i} \right) J$ et $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 4^i (-3)^{n-i} = 1 - (-3)^n$, on en déduit:

$$\begin{aligned} M^n &= (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n) J \\ &= \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} + (1 - (-3)^n) \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-3)^n - 1 + (-3)^n & 0 & -2(1-(-3)^n) \\ 1 - (-3)^n & (-3)^n + 1 - (-3)^n & 1 - (-3)^n \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2(-(-3)^n + 1) - (-3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + 2 \times (-3)^n & 0 & -2(-(-3)^n + 1) \\ -(-3)^n + 1 & 1 & -(-3)^n + 1 \\ -(-3)^n + 1 & 0 & -(-3)^n + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on a donc: $M^n = (-3)^n I_3 + (-(-3)^n + 1) J$.

(e) La formule montrée à la question précédente reste vraie pour $n = 0$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = \begin{pmatrix} -1 + 2 \times (-3)^n & 0 & -2(-(-3)^n + 1) \\ -(-3)^n + 1 & 1 & -(-3)^n + 1 \\ -(-3)^n + 1 & 0 & -(-3)^n + 2 \end{pmatrix}.$$

Attention, dans cette question comme dans la suivante, on ne peut pas utiliser les résultats de la question 1 étant donné qu'on cherche à calculer M^n par trois méthodes différentes.

3. (a) On étudie le système associe:

$$\begin{cases} -2x + z &= a \\ x + y &= b \\ x - z &= c \end{cases}$$

On montre qu'il possède une unique solution

$$\begin{cases} x &= -a - c \\ y &= a + b + c \\ z &= -a - 2c \end{cases}$$

On en déduit que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) On a, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La puissance d'une matrice diagonale est un résultat du cours, inutile donc de le démontrer (surtout par une récurrence sur une page!)

(c) On a $M = PDP^{-1}$ donc $M^2 = PD^2P^{-1}$ et, par une récurrence immédiate, $M^n = PD^nP^{-1}$.

(d) Pour tout entier naturel n, on a donc en utilisant les différentes questions précédentes:

$$\begin{aligned} M^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2(-3)^n & 0 & 1 \\ (-3)^n & 1 & 0 \\ (-3)^n & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + 2 \times (-3)^n & 0 & -2(-(-3)^n + 1) \\ -(-3)^n + 1 & 1 & -(-3)^n + 1 \\ 1 - (-3)^n & 0 & 2 - (-3)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 4 Certains ont mal compris la définition de partitions et/ou ont confondu avec les parties de E.

1. (a) La seule décomposition de 3 en somme de deux entiers non nuls est $3 = 1 + 2$.

Ainsi, si E est de cardinal 3, toute partition de E en deux, comporte deux ensembles de cardinal respectif 1 et 2 . Pour l'ensemble de cardinal 1 , il existe $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$ possibilités, l'ensemble de cardinal 2 est entièrement déterminé comme le complémentaire du premier dans E. On en déduit

$$S_{3,2} = 3$$

(b) La seule partition de E en une partie est $\{E\}$.

$$S_{n,1} = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$$

Il n'y a qu'une façon de faire une partition d'un ensemble de cardinal n en n sous-ensembles non vides : chaque sous-ensemble est un singleton (de cardinal 1); l'ordre de ces singletons n'ayant pas d'incidence, on a

$$S_{n,n} = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$$

2. (a) i. La seule partition de E en deux parties, dont l'une est le singleton $\{4\}$ est :

$$\{\{1,2,3\},\{4\}\}$$

ii. Les partitions de E en deux, qui ne contiennent pas le singleton $\{4\}$, sont :

$$\begin{array}{lll} \{\{1,4\},\{2,3\}\} & \{\{2,4\},\{1,3\}\} & \{\{3,4\},\{1,2\}\} \\ \{\{1\},\{2,3,4\}\} & \{\{2\},\{1,3,4\}\} & \{\{3\},\{1,2,4\}\} \end{array}$$

iii. Considérons une partition en deux parties de E. Soit elle contient le singleton $\{4\}$, soit elle ne le contient pas. On a donc $S_{4,2} = 7$. Par ailleurs, on a $S_{3,1} = 1$ et $S_{3,2} = 3$ d'après les questions précédentes. On a donc

$$S_{4,2} = S_{3,1} + 2S_{3,2}$$

ce qui est bien un cas particulier de

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$$

(b) i. Les partitions de E en k parties dont l'une est $\{x_n\}$ sont en bijection avec les partitions de $E - \{x_n\}$ en $k-1$ parties. Elles ont donc même cardinal Le nombre de partitions de E en k parties dont l'une est $\{x_n\}$ est $S_{n-1,k-1}$

ii. De toute partition de $E-\{x_n\}$ en k parties, on peut construire k partitions distinctes de E en k parties, il suffit d'ajouter x_n à l'une des k parties. On construit ainsi toutes les partitions de E en k parties qui ne comportent pas le singleton $\{x_n\}$ Le nombre de partitions de E en k parties dont aucune n'est $\{x_n\}$ est $kS_{n-1,k}$

iii. Soit une partition de E en k parties contient le singleton $\{x_n\}$, soit elle ne le contient pas. La réunion étant disjointe, le nombre de partitions de E en k parties est donc la somme du nombre de partitions de E en k parties qui contiennent $\{x_n\}$ et du nombre de partitions de E en k parties qui ne contiennent pas $\{x_n\}$:

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k} \quad \forall n \geqslant 2, \forall k \in \{1, \dots, n-1\}$$

Soit P_n la propriété $S_{n,n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$ pour $n \geqslant 2$. Démontrons la par récurrence. Pour $n = 2$, la propriété affirme $S_{2,1} = 1$, ce qui est cohérent avec le résultat de la question 1b Supposons P_n vraie à un certain rang n et démontrons-la à l'ordre $n+1$. On a

$$\begin{aligned} S_{n+1,n} &= S_{n,n-1} + nS_{n,n} \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} + n \times 1 \quad \text{(d'après la question I.A.1.b et l'hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{n(n-1)+2n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration.

$$S_{n,n-1} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \forall n \geqslant 2$$

On pouvait aussi le faire par récurrence descendante:

$$S_{n,n-1} = S_{n-1,n-2} + (n-1)\underbrace{S_{n-1,n-1}}_{=1} = S_{n-2,n-3} + (n-2)\underbrace{S_{n-2,n-2}}_{=1} + (n-1)$$

puis, par récurrence descendante :

$$S_{n,n-1} = S_{2,1} + 2S_{2,2} + \ldots + (n-2) + (n-1),$$

donc

$$S_{n,n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Bon, vu que le résultat vous était donné (et que je sais que vous savez que $\frac{n(n-1)}{2} = \sum_{k=1}^{n-1} k$), j'ai enlevé 1 point lorsque la dernière étape n'était pas indiquée ou lorsque vous m'avez écrit des $S_{1,0}$ alors que les nombres de Stirling ne sont définis que pour $k > 0$

3. (a) On suppose $n < k$. Soit f une application de E dans F. Le cardinal de $f(E)$ est inférieur ou égal à Card $(E) = n$, et donc l'image de E par f est de cardinal strictement plus petit que k. L'application f ne peut pas être surjective.

$$\sigma_{n,k} = 0 \text{ si } k < n$$

(b) On suppose $n = k$. Toute application surjective est alors nécessairement bijective. Compter le nombre de surjections, c'est compter le nombre de bijections dont on sait qu'il est égal à n !

$$\sigma_{n,k} = n! \text{ si } k = n$$

Il faut impérativement que vous disiez qu'une application surjective entre deux ensembles de même cardinal fini est bijective !

(c) Soit f une surjection de E dans F. On a $F = \{y_1, y_2\}$. Notons A_1 l'image réciproque de y_1 et A_2 celle de y_2; ce sont deux parties de E non vides puisque f est une surjection. De plus, $\{A_1, A_2\}$ est une partition de E. Toutefois, $\{A_2, A_1\}$ est la même partition de E mais correspond à une autre surjection de E dans F. Ainsi, à toute partition en deux parties de E correspond exactement deux surjections de E dans F. On en déduit

$$\sigma_{3,2} = 2S_{3,2} = 6$$

(d) i. Montrons que $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ est une partition de E : - Soit $i \in \{1, \dots, k\}$. L'ensemble A_i est une partie de E puisque c'est l'image réciproque par f d'une partie de F. - Soit $i \in \{1, \dots, k\}$. L'ensemble A_t n'est pas vide puisque f est surjective. - Soit $i, j \in \{1, \dots, k\}$ distincts. L'ensemble $A_1 \cap A_j$ est vide car sinon un élément de cette intersection aurait à la fois pour image y_1 et y_j; ce qui est impossible car y_i et y_j sont supposés distincts. - La réunion des A_4 pour $i \in \{1, \dots, k\}$ est par construction $f^{-1}(F) = E$

$$\mathcal{A}' = \left\{\mathcal{A}_\infty, \dots, \mathcal{A}_\|\right\} \text{ est bien une partition de } \mathcal{E}$$

ii. Soit $\mathcal{A}' = \left\{\mathcal{A}'_\infty, \dots, \mathcal{A}'_\|\right\}$ une partition de E. Le nombre de surjections associées à cette partition est égal au nombre de bijections entre $\{A'_1, \dots, A'_k\}$ et F; or le nombre de bijections entre deux ensembles de cardinal k est k ! . Le nombre de surjections associées à $\mathcal{A}\prime\ell'$ est k !

iii. On en déduit immédiatement

$$\sigma_{n,k} = k! S_{n,k}$$

4. Démontrons la propriété par récurrence sur n : Pour $n = 1$, les valeurs de k comprises entre 0 et 1 sont 0 et 1 et on vérifie que $S_{1,0} = 0 \leqslant 0^1$ et que $S_{1,1} = 1 \leqslant 2^1$.

Soit $n \geqslant 2$. Supposons la propriété vraie à l'ordre $n-1$, avec k compris entre 1 et $n-1$. On cherche à démontrer la propriété à l'ordre n, avec k compris entre 1 et n. Si $k = 1$ ou $k = n$, $S_{n,k} = 1 \leqslant 2^n$.

Considérons maintenant k un entier compris entre 2 et $n - 1$. On a

$$\begin{aligned} S_{n,k} &= S_{n-1,k-1} + k S_{n-1,k} \\ &\leqslant (2(k-1))^{n-1} + k(2k)^{n-1} \\ &\leqslant 2^{n-1}\left[(k-1)^{n-1} + k^n\right] \\ &\leqslant 2^{n-1}\left[k^n + k^n\right] \\ &\leqslant (2k)^n \end{aligned}$$

La propriété est vraie à l'ordre n pour toute valeur de k comprise entre 0 et n donc

$$S_{n,k} \leqslant (2k)^n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0, n]\!]$$

Là, évidemment, comme vous utilisez k sans définir ce que c'est, vous n'avez pas vu qu'il y avait un problème pour certaines valeurs