Lycée du Parc
PCSI 842
DS 5

Année 2023-2024

Devoir surveillé 5, sujet 2 .

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1.

Si E est un ensemble et k un entier naturel non nul, une partition de E est un ensemble $\{A_1, \dots, A_k\}$ de parties de E non vides, deux à deux disjointes, et dont la réunion est égale à E:

$$\forall i \in [\![1,k]\!],\ A_i \neq \emptyset, \quad \forall i,j \in [\![1,k]\!],\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \bigcup_{i=1}^{k} A_i = E.$$

Par exemple $\{\{1\},\{2,3\},\{4,5\}\}$ est une partition de $E = [\![1,5]\!]$ en trois parties. On notera en particulier que l'ordre dans lequel interviennent les parties $A_1, \dots, A_k$ n'a pas d'incidence sur la définition de la partition.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$, on note $S_{n,k}$ le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k parties. On pose également, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_{0,0} = 1$ et $S_{n,0} = 0$.

Les nombres $S_{n,k}$ sont appelées nombres de Stirling de deuxième espèce.

1. (a) Déterminer la valeur de $S_{3,2}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, que valent $S_{n,1}$ et $S_{n,n}$?

2. Soit n un entier, $n \geqslant 2$, soit $k \in [\![1,n-1]\!]$ et soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble à n éléments. On souhaite établir une relation entre $S_{n,k}$, $S_{n-1,k-1}$ et $S_{n-1,k}$.

   (a) Dans cette question, on étudie l'exemple $E = \{1,2,3,4\}$ $(n = 4)$ et $k = 2$.
      i. Expliciter les partitions de E en deux parties, dont l'une est le singleton $\{4\}$.
      ii. Expliciter les partitions de E en deux parties, dont l'une contient 4 tout en étant différente du singleton $\{4\}$.
      iii. Vérifier, pour l'exemple traité, la relation:
      $$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}.$$

   (b) On revient au cas général.
      i. Quel est le nombre de partitions de E en k parties dont l'une est $\{x_n\}$? On exprimera le résultat à l'aide d'un nombre de Stirling.
      ii. Quel est le nombre de partitions de E en k parties, dont l'une contient x_n tout en étant différente du singleton $\{x_n\}$? On exprimera le résultat à l'aide d'un nombre de Stirling.
      iii. En déduire que:
      $$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}.$$

3. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, $S_{n,n-1} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $k \in \mathbb{N}^\star$ et deux ensembles $E = \{x_1, \dots, x_n\}$, $F = \{y_1, \dots, y_k\}$. On note $\sigma_{n,k}$ le nombre d'applications surjectives de E dans F.

   (a) Que vaut $\sigma_{n,k}$ si $n < k$.
   (b) Que vaut $\sigma_{n,k}$ si $n = k$.
   (c) Expliciter les applications surjectives de E dans F lorsque $n = 3$ et $k = 2$ et préciser la valeur de $\sigma_{3,2}$.
   (d) Dans cette question, on souhaite obtenir une relation entre $\sigma_{n,k}$ et $S_{n,k}$.
   Si f est une application de E dans F et j un entier compris entre 1 et k, on note $A_j = f^{-1}(\{y_j\})$ l'ensemble des antécédents par f de y_j.
      i. Étant donné une application f surjective de E dans F, montrer que $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_k\}$ est une partition de E en k parties. On note $\Pi(f)$ cette partition.
      ii. Étant donnée $\mathcal{A}' = \{A'_1, \dots, A'_k\}$ une partition de E en k parties, combien y a-t-il d'applications f surjectives de E dans F telles que $\Pi(f) = \mathcal{A}'$?
      iii. En déduire la relation $\sigma_{n,k} = k!S_{n,k}$

5. Montrer, par exemple par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $S_{n,k} \leqslant (2k)^n$.

Exercice 2.

Pour tous réels $a < b$, une *subdivision* de $[a,b]$ est une liste de réels du type $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, où n est un entier naturel supérieur à 2 quelconque, et

$$a = s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n = b.$$

On notera $\mathcal{S}(a,b)$ l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$. Pour toute subdivision $s \in \mathcal{S}(a,b)$, on note $\ell(s)$ la longueur de s, de sorte qu'on a toujours :

$$\ell(s) \geqslant 2 \ , \quad s = (s_1, s_2, \ldots, s_{\ell(s)}) \ , \quad s_1 = a \ \text{ et } \ s_{\ell(s)} = b$$

Si f est une fonction réelle définie sur $[a,b]$ et $s \in \mathcal{S}(a,b)$, on appelle *variation de f selon s* et on note $v_f(s)$ le nombre :

$$v_f(s) = \sum_{i=2}^{\ell(s)} |f(s_i) - f(s_{i-1})|$$

Si l'ensemble

$$\mathcal{A}_f(a,b) = \{v_f(s) \ | \ s \in \mathcal{S}(a,b)\}$$

est majoré, on dit que f est à *variation bornée sur* $[a,b]$, et on définit la *variation de f sur* $[a,b]$ comme étant le nombre

$$V_f(a,b) = \sup\left(\mathcal{A}_f(a,b)\right).$$

Le principal objectif de cet exercice est de montrer l'équivalence (E) suivante, pour tous réels $a < b$ et toute fonction réelle définie sur $[a,b]$:

$$f \text{ est à variation bornée sur } [a,b] \underset{(E)}{\iff} \left(\begin{array}{c} f \text{ est la somme d'une fonction} \\ \text{croissante et d'une fonction décroissante} \end{array} \right)$$

Dans toute la suite, on fixe $a < b$ deux réels.

1. **Sur les fonctions monotones.**
   (a) Montrer qu'une fonction croissante sur $[a,b]$ est à variation bornée sur $[a,b]$, et déterminer ce que vaut sa variation sur $[a,b]$.
   (b) Montrer que la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante (sur $[a,b]$) est à variation bornée sur $[a,b]$.

2. **Sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.** Dans cette question, on considère une fonction $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$.
   (a) Justifier que f' est bornée sur $[a,b]$.
   (b) En déduire que f est à variation bornée sur $[a,b]$.

3. **Preuve de l'équivalence (E).** Soit f une fonction à variation bornée sur $[a,b]$.
   (a) Justifier que de façon générale, si $\mathcal{B}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée et M est un réel, on a l'équivalence :
   $$\sup(\mathcal{B}) \leqslant M \quad \iff \quad \big(\forall b \in \mathcal{B}\,,\ b \leqslant M\big)$$
   (b) Montrer que f est à variation bornée sur tout segment $[c,d]$ inclus dans $[a,b]$, et qu'on a :
   $$V_f(c,d) \leqslant V_f(a,b)$$
   (c) Soit $x < y < z$ trois réels de $[a,b]$. Établir la relation de Chasles :
   $$V_f(x,z) = V_f(x,y) + V_f(y,z)$$
   On pourra, pour montrer l'égalité, démontrer séparément les inégalités $\leqslant$ et $\geqslant$, à l'aide de la question 3a.
   (d) Soit g la fonction définie sur $[a,b]$ par $g(x) = V_f(a,x)$. Montrer que les fonctions g et $g - f$ sont toutes les deux croissantes.
   (e) Conclure sur l'équivalence (E).

4. **Variation d'une fonction continue.** L'objectif de cette question est de montrer qu'une fonction continue sur un segment peut ne pas être à variation bornée sur ce segment. On pose pour cela la fonction f définie sur $[0,1]$ par :
   $$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 \quad \text{si } x = 0 & \end{array} \right.$$
   (a) Montrer que f est continue sur $[0,1]$.
   (b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n\pi}$. Montrer, pour tout $n \geqslant 2$:
   $$\sum_{k=2}^{n} |f(u_k) - f(u_{k-1})| \geqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$
   (c) A l'aide d'une minoration simple, montrer : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \to_{n \to +\infty} +\infty$
   (d) Conclure.

Exercice 3.
Si n est un entier naturel, on note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
On note $m_{i,j}$ le coefficient sur la ligne i et la colonne j d'une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$.
On note Id la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$.

On appelle matrice semi-magique d'ordre n, une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un réel, noté $\sigma(M)$ vérifiant:

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \sigma(M), \text{ et } \forall j \in [\![1,n]\!], \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = \sigma(M).$$

On note SM_n l'ensemble des matrices semi-magiques d'ordre n.
On appelle matrice magique d'ordre n, une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes: M est semi-magique et:

$$\sigma(M) = \mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} \text{ et } \sigma(M) = \sum_{i,j \in [\![1,n]\!], i+j=n+1} m_{i,j}.$$

On note MG_n l'ensemble des matrices magiques d'ordre n.

1. Montrer que : "M est semi-magique" $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $MV = \lambda V = M^\top V$ où $V = (1\ 1\ \dots\ 1)^\top$
2. (a) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(M,N) \in SM_n^2$ (respectivement MG_n^2) $\Rightarrow \alpha M + \beta N \in SM_n$ (resp. MG_n).
   (b) Montrer que si M et N sont des matrices semi-magiques d'ordre n alors MN est semi-magique.
3. On désigne par E la matrice à coefficients réels telle que $\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,n]\!]$, $e_{i,j} = 1$.
   (a) Montrer que E est magique.
   (b) Montrer que $\forall p \geqslant 1$, $E^p = n^{p-1}E$.
4. Montrer que pour toute matrice semi-magique M de $M_n(\mathbb{R})$, on a $EM = \sigma(M)E = ME$.
5. Dans cette question, on impose $n = 3$.
   On se propose de montrer que si M est magique de MG_3, alors pour tout entier p impair, M^p est magique.
   (a) Soit M une matrice magique de trace nulle.
   On admettra le résultat suivant qu'on ne demande pas de démontrer: il existe un polynôme P du troisième degré $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ tel que $P(M) = M^3 + aM^2 + bM + cId = (0)$. Et de plus, le réel a est égal à $-Tr(M)$.
      i. Montrer que l'hypothèse $c \neq 0$ entraîne que M est inversible.
      ii. Montrer alors que la relation démontrée en 4. conduit à une contradiction.
      iii. En déduire l'existence d'un réel λ tel que $M^3 = \lambda M$.
      iv. Montrer que pour tout entier p impair, M^p est magique.
   (b) Soit M une matrice magique de MG_3. On pose $M_0 = M - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(M)E$.
      i. Calculer M^p.
      ii. Montrer que pour tout entier impair M^p est magique.
6. Dans cette question, on impose $n = 4$ et on considère la matrice magique d'ordre 4 de MG_4,
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (a) Vérifier que $A^2 = A + 2Id$.
   (b) Montrer qu'il existe deux entiers positifs a_p et b_p tels que $A^p = a_pA + b_pId$.
   (c) Démontrer que pour tout $p \geqslant 2$, A^p ne peut pas être magique.

Correction du DS n 5

Exercice 1 Certains ont mal compris la définition de partitions et/ou ont confondu avec les parties de E.

1. (a) La seule décomposition de 3 en somme de deux entiers non nuls est $3 = 1+2$. Ainsi, si E est de cardinal 3, toute partition de E en deux, comporte deux ensembles de cardinal respectif 1 et 2 . Pour l'ensemble de cardinal 1 , il existe $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$ possibilités, l'ensemble de cardinal 2 est entièrement déterminé comme le complémentaire du premier dans E. On en déduit

$$S_{3,2} = 3$$

(b) La seule partition de E en une partie est $\{E\}$.

$$S_{n,1} = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$$

Il n'y a qu'une façon de faire une partition d'un ensemble de cardinal n en n sous-ensembles non vides : chaque sous-ensemble est un singleton (de cardinal 1); l'ordre de ces singletons n'ayant pas d'incidence, on a

$$S_{n,n} = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$$

2. (a) i. La seule partition de E en deux parties, dont l'une est le singleton $\{4\}$ est :

$$\{\{1,2,3\},\{4\}\}$$

ii. Les partitions de E en deux, qui ne contiennent pas le singleton $\{4\}$, sont :

$$\begin{array}{ccc} \{\{1,4\},\{2,3\}\} & \{\{2,4\},\{1,3\}\} & \{\{3,4\},\{1,2\}\} \\ \{\{1\},\{2,3,4\}\} & \{\{2\},\{1,3,4\}\} & \{\{3\},\{1,2,4\}\} \end{array}$$

iii. Considérons une partition en deux parties de E. Soit elle contient le singleton $\{4\}$, soit elle ne le contient pas. On a donc $S_{4,2} = 7$. Par ailleurs, on a $S_{3,1} = 1$ et $S_{3,2} = 3$ d'après les questions précédentes. On a donc

$$S_{4,2} = S_{3,1} + 2S_{3,2}$$

ce qui est bien un cas particulier de

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$$

(b) i. Les partitions de E en k parties dont l'une est $\{x_n\}$ sont en bijection avec les partitions de $E - \{x_n\}$ en $k-1$ parties. Elles ont donc même cardinal Le nombre de partitions de E en k parties dont l'une est $\{x_n\}$ est $S_{n-1,k-1}$

ii. De toute partition de $E - \{x_n\}$ en k parties, on peut construire k partitions distinctes de E en k parties, il suffit d'ajouter x_n à l'une des k parties. On construit ainsi toutes les partitions de E en k parties qui ne comportent pas le singleton $\{x_n\}$ Le nombre de partitions de E en k parties dont aucune n'est $\{x_n\}$ est $kS_{n-1,k}$

iii. Soit une partition de E en k parties contient le singleton $\{x_n\}$, soit elle ne le contient pas. La réunion étant disjointe, le nombre de partitions de E en k parties est donc la somme du nombre de partitions de E en k parties qui contiennent $\{x_n\}$ et du nombre de partitions de E en k parties qui ne contiennent pas $\{x_n\}$:

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k} \quad \forall n \geqslant 2, \forall k \in \{1,\ldots,n-1\}$$

Soit P_n la propriété $S_{n,n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$ pour $n \geqslant 2$. Démontrons la par récurrence. Pour $n = 2$, la propriété affirme $S_{2,1} = 1$, ce qui est cohérent avec le résultat de la question 1b Supposons P_n vraie à un certain rang n et démontrons-la à l'ordre $n+1$. On a

$$\begin{aligned} S_{n+1,n} &= S_{n,n-1} + nS_{n,n} \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} + n \times 1 \quad \text{(d'après la question I.A.1.b et l'hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{n(n-1)+2n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration.

$$S_{n,n-1} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \forall n \geqslant 2$$

On pouvait aussi le faire par récurrence descendante:

$$S_{n,n-1} = S_{n-1,n-2} + (n-1)\underbrace{S_{n-1,n-1}}_{=1} = S_{n-2,n-3} + (n-2)\underbrace{S_{n-2,n-2}}_{=1} + (n-1)$$

puis, par récurrence descendante :

$$S_{n,n-1} = S_{2,1} + 2S_{2,2} + \ldots + (n-2) + (n-1),$$

donc

$$S_{n,n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Bon, vu que le résultat vous était donné (et que je sais que vous savez que $\frac{n(n-1)}{2} = \sum_{k=1}^{n-1} k$), j'ai enlevé 1 point lorsque la dernière étape n'était pas indiquée ou lorsque vous m'avez écrit des $S_{1,0}$ alors que les nombres de Stirling ne sont définis que pour $k > 0$

3. (a) On suppose $n < k$. Soit f une application de E dans F. Le cardinal de $f(E)$ est inférieur ou égal à Card $(E) = n$, et donc l'image de E par f est de cardinal strictement plus petit que k. L'application f ne peut pas être surjective.

$$\sigma_{n,k} = 0 \text{ si } k < n$$

(b) On suppose $n = k$. Toute application surjective est alors nécessairement bijective. Compter le nombre de surjections, c'est compter le nombre de bijections dont on sait qu'il est égal à n !

$$\sigma_{n,k} = n! \text{ si } k = n$$

Il faut impérativement que vous disiez qu'une application surjective entre deux ensembles de même cardinal fini est bijective !

(c) Soit f une surjection de E dans F. On a $F = \{y_1, y_2\}$. Notons A_1 l'image réciproque de y_1 et A_2 celle de y_2; ce sont deux parties de E non vides puisque f est une surjection. De plus, $\{A_1, A_2\}$ est une partition de E. Toutefois, $\{A_2, A_1\}$ est la même partition de E mais correspond à une autre surjection de E dans F. Ainsi, à toute partition en deux parties de E correspond exactement deux surjections de E dans F. On en déduit

$$\sigma_{3,2} = 2S_{3,2} = 6$$

(d) i. Montrons que $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ est une partition de E : - Soit $i \in \{1, \dots, k\}$. L'ensemble A_i est une partie de E puisque c'est l'image réciproque par f d'une partie de F. - Soit $i \in \{1, \dots, k\}$. L'ensemble A_t n'est pas vide puisque f est surjective. - Soit $i, j \in \{1, \dots, k\}$ distincts. L'ensemble $A_1 \cap A_j$ est vide car sinon un élément de cette intersection aurait à la fois pour image y_1 et y_j; ce qui est impossible car y_i et y_j sont supposés distincts. - La réunion des A_4 pour $i \in \{1, \dots, k\}$ est par construction $f^{-1}(F) = E$

$$\mathcal{A}' = \{\mathcal{A}_\infty, \dots, \mathcal{A}_\|\} \text{ est bien une partition de } \mathcal{E}$$

ii. Soit $\mathcal{A}' = \left\{\mathcal{A}'_\infty, \dots, \mathcal{A}'_\|\right\}$ une partition de E. Le nombre de surjections associées à cette partition est égal au nombre de bijections entre $\{A'_1, \dots, A'_k\}$ et F; or le nombre de bijections entre deux ensembles de cardinal k est k ! . Le nombre de surjections associées à $\mathcal{A}\prime\ell'$ est k !

iii. On en déduit immédiatement

$$\sigma_{n,k} = k!S_{n,k}$$

4. Démontrons la propriété par récurrence sur n : Pour $n = 1$, les valeurs de k comprises entre 0 et 1 sont 0 et 1 et on vérifie que $S_{1,0} = 0 \leqslant 0^1$ et que $S_{1,1} = 1 \leqslant 2^1$.

Soit $n \geqslant 2$. Supposons la propriété vraie à l'ordre $n-1$, avec k compris entre 1 et $n-1$. On cherche à démontrer la propriété à l'ordre n, avec k compris entre 1 et n. Si $k = 1$ ou $k = n$, $S_{n,k} = 1 \leqslant 2^n$.

Considérons maintenant k un entier compris entre 2 et $n-1$. On a

$$\begin{aligned} S_{n,k} &= S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k} \\ &\leqslant (2(k-1))^{n-1} + k(2k)^{n-1} \\ &\leqslant 2^{n-1}\left[(k-1)^{n-1} + k^n\right] \\ &\leqslant 2^{n-1}\left[k^n + k^n\right] \\ &\leqslant (2k)^n \end{aligned}$$

La propriété est vraie à l'ordre n pour toute valeur de k comprise entre 0 et n donc

$$S_{n,k} \leqslant (2k)^n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0, n]\!]$$

Là, évidemment, comme vous utilisez k sans définir ce que c'est, vous n'avez pas vu qu'il y avait un problème pour certaines valeurs

Exercice 2 1. **Sur les fonctions monotones.**

(a) Soit f une fonction croissante sur $[a,b]$. Soit $s \in \mathcal{S}(a,b)$. On a :

$$\begin{aligned} v_f(s) &= \sum_{i=2}^{\ell(s)} |f(s_i) - f(s_{i-1})| \\ &= \sum_{i=2}^{\ell(s)} f(s_i) - f(s_{i-1}) \qquad \text{(car pour tout } i,\ f(s_i) \geqslant f(s_{i-1})\text{, par croissance)} \\ &= f(s_{\ell(s)}) - f(s_1) \qquad \text{(par télescopage)} \\ &= f(b) - f(a) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute subdivision $s \in \mathcal{S}(a,b)$, cela prouve que l'ensemble $\mathcal{A}_f(a,b)$ est l'ensemble à un seul élément : $\mathcal{A}_f(a,b) = \{f(b) - f(a)\}$. Il est donc bien majoré (f est donc à variation bornée), et sa borne supérieure vaut :

$$\boxed{V_f(a,b) = f(b) - f(a)}$$

Certains ont majoré (pour cette question ou une autre) chaque terme de la somme par $(b-a)$ et ont donc écrit

$$v_f(s) \leqslant (l(s) - 1)(b - a).$$

C'est vrai mais cela ne permet pas de conclure que $v_f(s)$ est majorée car votre majorant dépend de $l(s)$ qui peut tendre vers l'infini

(b) Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ de la forme $f = g - h$, où g et h sont deux fonctions croissantes sur $[a,b]$. On a alors pour tout $s \in \mathcal{S}(a,b)$:

$$\begin{aligned} v_f(s) &= \sum_{i=2}^{\ell(s)} |f(s_i) - f(s_{i-1})| \\ &= \sum_{i=2}^{\ell(s)} \left|\big(g(s_i) - g(s_{i-1})\big) - \big(h(s_i) - h(s_{i-1})\big)\right| \\ &\leqslant \sum_{i=2}^{\ell(s)} |g(s_i) - g(s_{i-1})| + \sum_{i=2}^{\ell(s)} |h(s_i) - h(s_{i-1})| \qquad \text{(ineg. triang. et lin. de la somme)} \\ &\leqslant g(b) - g(a) + h(b) - h(a) \qquad \text{(question précédente)} \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute subdivision $s \in \mathcal{S}(a,b)$, cela prouve que l'ensemble $\mathcal{A}_f(a,b)$ est majoré. Donc f est à variation bornée sur $[a,b]$.

Attention, la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante n'est pas monotone!!

2. **Sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.**

(a) $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ donc par définition, f' est continue sur $[a,b]$, qui est un segment de $\mathbb{R}$. Donc par le théorème de continuité sur un segment, f' est bornée sur $[a,b]$.

(b) Voici deux méthodes possibles.

- **Méthode 1.** Soit $M \geqslant 0$ un majorant de $|f'|$. Par l'inégalité des accroissements finis, on sait que f est M-lispschitzienne sur $[a,b]$. Donc pour tout $s \in \mathcal{S}(a,b)$:

$$\begin{aligned} v_f(s) &= \sum_{i=2}^{\ell(s)} |f(s_i) - f(s_{i-1})| \\ &\leqslant \sum_{i=2}^{\ell(s)} M\,|s_i - s_{i-1}| \qquad (f \text{ est } M\text{-lispschitzienne}) \\ &\leqslant M \sum_{i=2}^{\ell(s)} s_i - s_{i-1} \qquad (\text{pour tout } i,\ s_i \geqslant s_{i-1}) \\ &\leqslant M(b-a) \qquad \text{(par télescopage)} \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute subdivision $s \in \mathcal{S}(a,b)$, cela prouve que l'ensemble $\mathcal{A}_f(a,b)$ est majoré. Donc f est à variation bornée sur $[a,b]$.

- **Méthode 2.** Pour tout $s \in \mathcal{S}(a,b)$:

$$\begin{aligned} v_f(s) &= \sum_{i=2}^{\ell(s)} |f(s_i) - f(s_{i-1})| \\ &= \sum_{i=2}^{\ell(s)} \left|\int_{s_{i-1}}^{s_i} f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \qquad \text{(formule du crochet)} \\ &\leqslant \sum_{i=2}^{\ell(s)} \int_{s_{i-1}}^{s_i} |f'(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \text{(ineg. triangulaire)} \\ &\leqslant \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \text{(relation de Chasles)} \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute subdivision $s \in \mathcal{S}(a,b)$, cela prouve que l'ensemble $\mathcal{A}_f(a,b)$ est majoré. Donc f est à variation bornée sur $[a,b]$.

Certains m'ont dit que f bornée impliquait f à variations bornées ce qui est évidemment faux puisque toute fonction continue sur un segment est bornée (et que vous montrez à la fin qu'une fonction peut être continue mais pas à variations bornées. C'est un exemple d'interprétation de la définition de "variation bornée" : n'interprétez pas les définitions données, collez à ce qui vous est donné.

3. **Preuve de l'équivalence (E).**

(a) Fixons $\mathcal{B}$ une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée et $M \in \mathbb{R}$.
L'implication $(\Rightarrow)$ est claire, car si $\sup(\mathcal{B}) \leqslant M$, alors pour tout $b \in \mathcal{B}$ on a :

$$b \leqslant \sup(\mathcal{B}) \leqslant M$$

Réciproquement, supposons que pour tout $b \in \mathcal{B}$, $b \leqslant M$. Alors M est un majorant de $\mathcal{B}$. Or, $\sup(\mathcal{B})$ est par définition le plus petit des majorants de $\mathcal{B}$. Donc $\sup(\mathcal{B}) \leqslant M$.
L'équivalence est montrée.

Remarque : pour la réciproque, on pouvait aussi utiliser le fait qu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $b_n \to_{n\to+\infty} \sup(\mathcal{B})$. Dans ce cas, le passage à la limite $n \to +\infty$ dans l'inégalité large $b_n \leqslant M$ donne $\sup(\mathcal{B}) \leqslant M$. La question n'était pas très difficile mais vous l'avez souvent rédigé comme des sagouins, vous avez donc perdu des points.

(b) Soit c, d deux réels tels que $a \leqslant c < d \leqslant b$. Soit $s \in \mathcal{S}(c,d)$ une subdivision de $[c,d]$. Notons $n := \ell(s)$, de sorte que $s = (c = s_1, \dots, s_n = d)$. Formons alors une subdivision t de $\mathcal{S}(a,b)$ de la façon suivante :

- $t_1 := a$
- $t_2 := s_1$, $t_3 := s_2$, etc jusqu'à $t_{n+1} := s_n$, ou autrement dit pour tout $i \in [\![2, n+1]\!]$, $t_i := s_{i-1}$

- $t_{n+2} := b$

On a alors :

$$\begin{aligned} v_f(s) &= \sum_{i=2}^{n} |f(s_i) - f(s_{i-1})| \\ &= \sum_{k=3}^{n+1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \qquad \text{(chgt d'indice } k = i+1) \\ &\leqslant \sum_{k=2}^{n+2} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \qquad \text{(rajout de 2 termes positifs)} \\ &\leqslant v_f(t) \\ &\leqslant V_f(a,b) \end{aligned}$$

Cette majoration (par une constante) étant vraie pour toute subdivision $s \in \mathcal{S}(c,d)$, cela prouve que l'ensemble $\mathcal{A}_f(c,d)$ est majoré. Donc f est à variation bornée sur $[c,d]$.

De plus, puisque tous les éléments de $\mathcal{A}_f(c,d)$ sont inférieurs au réel $V_f(a,b)$, on a par la question précédente que la borne supérieure de $\mathcal{A}_f(c,d)$ est elle-même inférieure à $V_f(a,b)$. Autrement dit : $V_f(c,d) \leqslant V_f(a,b)$. Beaucoup d'entre vous m'ont écrit $\mathcal{A}_f([c,d]) \subset \mathcal{A}_f([a,b])$ car $[c,d] \subset [a,b]$. Là encore, c'est une interprétation erronée des définitions données.

(c) ▶ Montrons l'inégalité $V_f(x,z) \leqslant V_f(x,y) + V_f(y,z)$.
Soit $s \in \mathcal{S}(x,z)$, mettons $s = (s_1, \dots, s_n)$, avec $s_1 = x$ et $s_n = z$. Comme $y \in]x,z[$, il existe un indice $p \in [\![1,n]\!]$ tel que $s_{p-1} \leqslant y \leqslant s_p$. On pose alors deux subdivisions :

$$t = (s_1, \dots, s_{p-1}, y) \in \mathcal{S}(x,y)$$

et

$$u = (y, s_p, \dots, s_n) \in \mathcal{S}(y,z)$$

A la jonction des deux subdivisions, on a par inégalité triangulaire :

$$|f(s_p) - f(s_{p-1})| \leqslant |f(s_p) - f(y)| + |f(y) - f(s_{p-1})|$$

Donc en ajoutant de part et d'autre de l'inégalité les termes $|f(s_i) - f(s_{i-1})|$ pour $i \in [\![2,n]\!] \setminus \{p\}$, on obtient :

$$v_f(s) \leqslant v_f(t) + v_f(u)$$

Or, $v_f(t) \leqslant V_f(x,y)$ et $v_f(u) \leqslant V_f(y,z)$. Donc :

$$v_f(s) \leqslant V_f(x,y) + V_f(y,z)$$

Cette inégalité étant vraie pour toute subdivision $s \in \mathcal{S}(x,z)$, cela montre que tous les éléments de $\mathcal{A}_f(x,z)$ sont inférieurs au réel $V_f(x,y) + V_f(y,z)$. Par la question 3a, le sup de cet ensemble $\mathcal{A}_f(x,z)$ est donc lui-même inférieur à $V_f(x,y) + V_f(y,z)$. D'où :

$$\boxed{V_f(x,z) \leqslant V_f(x,y) + V_f(y,z)}$$

▶ Montrons l'inégalité $V_f(x,z) \geqslant V_f(x,y) + V_f(y,z)$.
Soit $t \in \mathcal{S}(x,y)$, mettons $t = (t_1, \dots, t_n)$, et $u \in \mathcal{S}(y,z)$, mettons $u = (u_1, \dots, u_m)$. Posons :

$$s := (t_1, \dots, t_n, u_1, \dots, u_m)$$

Il s'agit d'une subdivision de $[x,z]$. De plus :

$$v_f(s) = v_f(t) + v_f(u)$$

car à la jonction, le terme $|f(u_1) - f(t_n)|$ est nul (il s'agit de $|f(y) - f(y)|$). D'où :

$$v_f(t) + v_f(u) \leqslant V_f(x,z)$$

Or, en fixant u et en constatant que cette inégalité, qui peut être ré-écrite ainsi,

$$v_f(t) \leqslant V_f(x,z) - v_f(u)$$

est vraie pour toute subdivision $t \in \mathcal{S}(x,y)$, on a par la question 3a :

$$V_f(x,y) \leqslant V_f(x,z) - v_f(u)$$

Puis en écrivant cette même inégalité sous la forme

$$v_f(u) \leqslant V_f(x,z) - V_f(x,y)$$

et en constatant qu'elle est vraie pour toute subdivision $u \in \mathcal{S}(y,z)$, on a par la question 3a :

$$V_f(y,z) \leqslant V_f(x,z) - V_f(x,y)$$

D'où finalement : $\boxed{V_f(x,z) \geqslant V_f(x,y) + V_f(y,z)}$.

Finalement, les deux inégalités encadrées montrent bien la relation de Chasles voulue. Attention au passage aux sup bien trop rapide chez certains ! Vous risquez des choses fausses en allant trop vite.

(d) Montrons que g est croissante. Soit $x \leqslant y$ deux réels de $[a,b]$. Alors $[a,x] \subset [a,y]$ donc $g(y) \geqslant g(x)$.
On a bien montré que g est croissante.

Montrons maintenant que $g-f$ est croissante. Soit $x \leqslant y$ deux réels de $[a,b]$. On a :

$$(g-f)(y)-(g-f)(x) = \big(g(y)-g(x)\big) - \big(f(y)-f(x)\big) \\ = V_f(x,y) - \big(f(y)-f(x)\big)$$

Or, la quantité $|f(y)-f(x)|$ est la variation de f selon la subdivision à deux points $s := (x,y)$ (subdivision de $[x,y]$). Donc par définition de $V_f(x,y)$, on a $|f(y)-f(x)| \leqslant V_f(x,y)$ et donc en particulier $f(y)-f(x) \leqslant V_f(x,y)$. D'où :

$$(g-f)(y)-(g-f)(x) \geqslant 0$$

Ce travail montre que $g-f$ est croissante.

(e) On écrit alors

$$f = \underbrace{g}_{\text{croissante}} + \underbrace{(f-g)}_{\text{décroissante}}$$

ce qui prouve que f est la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.

Ce travail étant valable pour toute fonction à variation bornée sur $[a,b]$, on a montré l'implication $(\Rightarrow)$ de l'équivalence (E).

L'implication $(\Leftarrow)$ a été démontrée à la question 1b. L'équivalence (E) est donc bien démontrée.

4. **Variation d'une fonction continue.**

(a) f est continue sur $]0,1]$ comme produit et composée de fonctions continues. Reste à montrer la continuité en 0. Or :

$$|f(x)| \leqslant \sqrt{x} \to_{x\to 0} 0$$

Donc par encadrement, $f(x) \to_{x\to 0} 0$, et 0 est bien la valeur de $f(0)$. f est donc aussi continue en 0. C'est très dommage de perdre un point parce qu'on a oublié de traiter le cas $]0,1]$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![2,n]\!]$:

$$f(u_k) = \frac{1}{\sqrt{k\pi}}\cos(k\pi) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k\pi}}$$

Donc

$$\begin{aligned} |f(u_k)-f(u_{k-1})| &= \left|\tfrac{(-1)^k}{\sqrt{k\pi}} - \tfrac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{(k-1)\pi}}\right| \\ &= \underbrace{|(-1)^k|}_{=1} \times \left|\tfrac{1}{\sqrt{k\pi}} + \tfrac{1}{\sqrt{(k-1)\pi}}\right| \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{k\pi}} + \tfrac{1}{\sqrt{(k-1)\pi}} \\ &\geqslant \tfrac{2}{\sqrt{k\pi}} \qquad \left(\text{car } \tfrac{1}{\sqrt{(k-1)\pi}} \geqslant \tfrac{1}{\sqrt{k\pi}}\right) \end{aligned}$$

D'où, en sommant ces inégalités sur $k \in [\![2,n]\!]$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} |f(u_k)-f(u_{k-1})| \geqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

(c) Pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, $\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc par sommation :

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}} = (n-1)\times\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or, $\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \to_{n\to+\infty} +\infty$ donc par minoration, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \to_{n\to+\infty} +\infty$.

Beaucoup ont minoré par $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$. Un seul a montré qu'elle tendait vers $+\infty$

(d) Soit $n \geqslant 2$ un entier. Posons la subdivision de $[0,1]$ suivante :

$$s^{(n)} := (0, u_n, u_{n-1}, \ldots, u_1, 1)$$

On a

$$\begin{aligned} v_f(s^{(n)}) &= \underbrace{|f(u_n)-f(0)|}_{\geqslant 0} + \sum_{k=2}^{n}|f(u_k)-f(u_{k-1})| + \underbrace{|f(u_1)-f(1)|}_{\geqslant 0} \\ &\geqslant \sum_{k=2}^{n}|f(u_k)-f(u_{k-1})| \\ &\geqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

Comme $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \to_{n\to+\infty} +\infty$, on a par minoration $v_f(s^{(n)}) \to_{n\to+\infty} +\infty$. Cela montre que l'ensemble $\mathcal{A}_f(0,1)$ n'est pas majoré, et donc que f n'est pas à variation bornée sur $[0,1]$.

Beaucoup m'ont simplement dit $V_f([a,b])$ tend vers $+\infty$. Sachant que c'est ce que l'on cherche à montrer, il serait bon de s'assurer que vous avez compris l'exemple qu'on vous a fait étudié et que vous avez vérifié que, effectivement, ça montrait que f n'était pas à variation bornée.

Exercice 3 1. On suppose tout d'abord M semi-magique. On a alors $M.V = \sigma(M)\ V$ et ${}^tM.V = \sigma(M)\ V$ d'où le résultat souhaité avec $\lambda = \sigma(M)$. Réciproquement, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $MV = \lambda V$, on a alors

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = \lambda.$$

De même, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M^\top V = \lambda V$, on a alors

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \sum_{i=1}^{n} m_{ij} = \lambda.$$

On en déduit que M est semi-magique et $\sigma(M) = \lambda$. Ceux qui n'ont pas raisonné par double implication n'ont montré qu'un sens.

2. (a) Soit M, N deux matrices semi-magiques, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ deux réels. Alors, d'après la question précédente, $(\alpha M + \beta N) V = \alpha MV + \beta NV = \alpha\sigma(M)V + \beta\sigma(N)V = (\alpha\sigma(M) + \beta\sigma(N))V$. De même,

$$(\alpha M + \beta N)^\top V = (\alpha\sigma(M) + \beta\sigma(N)) V.$$

Par la réciproque de la question réciproque, on a $\alpha M + \beta N$ semi-magique.
Si on suppose, de plus, M et N magiques, il reste à vérifier que la trace et la somme de l'anti-diagonale sont bien égales à $\alpha\sigma(M) + \beta\sigma(N)$ ce qui est clair par linéarité de la somme.

(b) Soit M et N des matrices semi-magiques d'ordre n. On a donc $MV = \sigma(M)V$ et $NV = \sigma(N)V$, on en déduit que $MMV = \sigma(M)\sigma(N)V$ et de même pour la transposée. Ainsi, d'après la première question, on en déduit que MN est semi-magique.
On peut aussi le faire en explicitant le produit: $MN = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}n_{kj}$. Alors pour tout j,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} c_{ij} &= \sum_{i=n}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{ik}n_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} m_{ik}\right) n_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sigma(M)n_{kj} \\
&= \sigma(M)\sum_{k=1}^{n} n_{kj} \\
&= \sigma(M)\sigma(N).
\end{aligned}$$

De même, pour tout i, $\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sigma(M)\sigma(N)$.

3. On désigne par E la matrice à coefficients réels telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $e_{i,j} = 1$.

(a) La matrice E est magique avec $\sigma(E) = n$. C'est clair pour la somme des coefficients d'une ligne ou d'une colonne donnée mais également pour la diagonale et la diagonale inverse.

(b) On a $E^2 = nE$. Par une récurrence immédiate, on en déduit que $\forall p \geqslant 1$, $E^p = n^{p-1}E$. En raisonnant par récurrence et en initialisant à $n = 1$, on avait du mal à montrer l'hérédité sans avoir au préalable calculé E^2. Certains m'ont dit que $E^2 = nE$ découlait de l'hypothèse de récurrence ce qui est faux (à moins de faire par récurrence forte ce que personne n'a fait). D'autres ont calculé E^2 au milieu de l'hérédité. J'ai vu alors des matrices égales à des réels dans certaines copies...

4. Soit M une matrice semi-magique de $M_n(\mathbb{R})$, alors le coefficient d'indice (i,j) de EM est égal à $\sum_{k=1}^{n} m_{ik}e_{kj} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} = \sigma(M) = \sigma(M)e_{ij}$. On a donc bien $ME = \sigma(M)E$. On calcule de même ME.

5. Dans cette question, on impose $n = 3$.

(a) Soit M une matrice magique de trace nulle.
On admettra le résultat suivant qu'on ne demande pas de démontrer: il existe un polynôme P du troisième degré $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ tel que $P(M) = M^3 + aM^2 + bM + cId = (0)$. Et de plus, le réel a est égal à $-Tr(M)$.

i. On a $P(M) = M^3 + aM^2 + bM + cId = 0$ et ici : $a = 0$
Si $c = 0$: $P(M)$ s'écrit : $\frac{-1}{c}M(M^2 + bId) = Id$ donc M est inversible et :

$$M^{-1} = \frac{-1}{c}(M^2 + bId)$$

ii. On a supposé $\sigma(M) = \mathrm{Tr}(M) = 0$ donc $EM = ME = (0)$. Si M est inversible, cela implique $E = (0)$ ce qui n'est pas le cas. On a donc une contradiction.

iii. Si M est de trace nulle, on a $c = 0$, il ne reste donc que $M^3 + bM = (0)$ d'où l'existence d'un réel $\lambda = -b$ tel que $M^3 = \lambda M$.

iv. On pose $p = 2q + 1$ et on raisonne par récurrence sur q. On obtient

$$M^{2q+1} = \lambda^q M,$$

ce qui montre que pour tout entier p impair, M^p est magique.

(b) Soit M une matrice magique de MG_3. On pose $M_0 = M - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(M)E$. M_0 est donc magique de trace nulle.

i. D'après 4 M commute avec E. On en déduit que M_0 commute avec E, on peut donc utiliser la formule du binôme.

$$M^p = M_0^p + \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}\left(\frac{1}{3}Tr(M)\right)^k M_0^{p-k}E^k$$

Or $: M_0E = \sigma(M_0)E = (0)$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \left(\frac{1}{3}Tr(M)\right)^k M_0^{p-k}E^k = (0)$

On a donc

$$M^p = M_0^p + \left(\frac{1}{3}\mathrm{Tr}(M)\right)^p 3^{p-1}\, E$$

$$M^p = M_0^p + \frac{1}{3}\left(\mathrm{Tr}(M)\right)^p E$$

ii. Si p est impair M_0^p est une matrice magique donc M est aussi magique comme combinaison linéaire de matrices magiques.

6. Dans cette question, on impose $n = 4$ et on considère la matrice magique d'ordre 4 de MG_4,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) On pose le produit matriciel, on a bien $A^2 = A + 2Id$.

(b) On a

$$a_0 = 0 \qquad b_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad a_1 = 1 \qquad b_1 = 0$$

Par récurrence : si $A^p = a_pA + b_pB$ alors :
$A^{p+1} = a_pA^2 + b_pA = (a_p + b_p)A + 2\,a_pI$ on a donc

$$\begin{cases} a_{p+1} &= a_p + b_p \\ b_{p+1} &= 2a_p \end{cases}$$

(c) Pour $p \geqslant 2$ par récurrence, $b_p > 0$.
Donc pour $p \geqslant 2$, si A^p était magique, I serait aussi par combinaison linéaire une matrice magique, ce qui est faux. On en déduit que A^p n'est pas magique pour $p \geqslant 2$.
Certains m'ont calculé la trace $2a_p + 4b_p$ et la somme des coefficients de la diagonale inversée qui vaut $2a_p$. Si A^p était magique, on aurait alors $b_p = 0$ ce qui est faux, à partir de $p = 2$.