Correction du TD n 15

Correction 1 On le montre par récurrence sur n. Pour $n = 0$ (et $n = 1$), le résultat est vrai.

On suppose qu'il existe un entier n tel que $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7. On écrit

$$3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 3^{2n}.3^2 - 2.2^n = 3^{2n}.(7+2) - 2.2^n = 2(3^{2n} - 2^n) + 7.3^{2n}.$$

Le premier terme de la somme est divisible par 7 par hypothèse de récurrence, le deuxième l'est également. On en déduit que $3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.

Par le principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout entier n.

Correction 2 Pour $n = 2$, on a $2^4 - 6 = 10$ donc le résultat est vrai pour $n = 2$.

On suppose qu'il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $2^{2^n} - 6$ est divisible par 10. On écrit

$$2^{2^{n+1}} - 6 = \left(2^{2^n}\right)^2 - 6 = \left(2^{2^n}\right)^2 - 36 + 30 = \left(2^{2^n} - 6\right)\left(2^{2^n} + 6\right) + 30.$$

$\left(2^{2^n} - 6\right)\left(2^{2^n} + 6\right)$ est divisible par 10 par hypothèse de récurrence, 30 l'est également donc $2^{2^{n+1}} - 6$ est divisible par 10.

Par le principe de récurrence, $2^{2^n} - 6$ est divisible par 10 pour tout $n \geqslant 2$.

Correction 3 Le résultat est vrai pour $n = 0$. On suppose qu'il est vrai pour un certain rang n c'est-à-dire que $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ est divisible par 9.

On écrit

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27.$$

Par hypothèse de récurrence, $(n+1)^3+(n+2)^3+n^3$ est divisible par 9 et $9n^2+27n+27$ est également divisible par 9 donc la somme l'est.

Par le principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout entier n.

Correction 4 On écrit $4994 = an + 2$ et $995 = bn + 5$ donc $4992 = an$ et $990 = bn$.

On détermine ensuite le pgcd de 4992 et 990. On a $4992 = 4^3 \times 13 \times 6$ et $990 = 5 \times 3 \times 11 \times 6$. On en déduit que le pgcd vaut 6. Comme n divise les deux nombres, il doit diviser leur pgcd donc n vaut $1, 2, 3$ ou 6. Or, le reste est strictement inférieur au quotient, il n'y a donc que deux valeurs possibles : 3 et 6.

Correction 5 On écrit $4373 = an + 8$ et $826 = bn + 7$. On a donc $4365 = an$ et $819 = bn$. On sait que n divise le pgcd de 4365 et 819. Déterminons le: On écrit $4365 = 97 \times 5 \times 9$ et $819 = 13 \times 7 \times 9$. On en déduit que le pgcd vaut 9. Comme, de plus, n doit être strictement supérieur aux restes, on en déduit que $n = 9$.

Correction 6 On écrit $\dfrac{2n^2 - n - 6}{n+3} = \dfrac{2n(n+3) - 7(n+3) + 15}{n+3} = (2n-7) + \dfrac{15}{n+3}$ donc

$$\frac{2n^2 - n - 6}{n+3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{15}{n+3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n + 3 \in \{3, 5, 15\} \Leftrightarrow n \in \{0, 2, 12\}$$

Correction 7 On a $140 = 5 \times 4 \times 7$ donc b doit être divisible par 5 On peut avoir $b = 5$, $b = 10$, $b = 20$, $b = 35$, $b = 70$ et $b = 140$.

Correction 8 On a $1680 = 42 \times 8 \times 5$. On écrit $a = 42q$ et $b = 42q'$ avec pgcd$qq' = 1$. On ppcm$qq' = qq' = 40$ donc $(q, q') = (5, 8)$ ou $(8, 5)$.

Correction 9

1. Posons $n = \text{pgcd}ab$ et $m = \text{pgcd}\lambda a\lambda b$. On a $n|a$ et $n|b$ donc $\lambda n|\lambda a$ et $\lambda n|\lambda b$. Ainsi, $\lambda n|m$.

   On peut donc écrire $m = \lambda nq$ avec $q \in \mathbb{N}$.

   On a
   $$\begin{cases} \lambda a = ma' = \lambda nqa' \\ \lambda b = mb' = \lambda nqb' \end{cases}$$
   avec $a', b' \in \mathbb{N}$. On en déduit, comme λ est non nul,
   $$\begin{cases} a = nqa' \\ b = nqb' \end{cases}$$
   donc nq divise a et b, ce qui implique nq divise n donc $q = 1$ et $\lambda n = m$. On a donc $\text{pgcd}\lambda a\lambda b = \lambda\text{pgcd}ab$.

2. On sait que si $\text{pgcd}ab = n$, alors $a = nq$, $b = nq'$ avec $\text{pgcd}qq' = 1$ et $\text{ppcm}ab = nqq'$. On en déduit que $\text{ppcm}\lambda a\lambda b = \lambda\text{pgcd}abqq' = \lambda\text{ppcm}ab$.

Correction 10 Si a divise m, il divise $2m$. Donc si a divise m et $2m + 1$, il divise leur différence, à savoir 1 ce qui impose $a = 1$. On en déduit que $\text{pgcd}m, 2m + 1 = 1$ donc $\text{pgcd}nm(2m + 1)n = n$.

Correction 11

1. Si a divise n et $n + 2$, il divise leur différence, à savoir 2. Si n est pair, le pgcd vaut donc 2, si n est impair le pgcd vaut 1.

2. On a $a = n(n+3)$ et $b = (n+2)(n+3)$.

   On a $\text{pgcd}ab = (n+3)\text{pgcd}nn+2$. Ainsi, $pgcdab = (n+3)$ si n est impair, $2(n+3)$ si n est pair.

Correction 12 1. Pour tout $i \in [\![2,k]\!]$, $i \leqslant k$ donc $i|k!$, ainsi $i|k!+i$ donc $k!+i$ n'est pas premier. Ceci étant valable pour tout i entre 2 et k, aucun de ces entiers n'est premier.

2. On considère les n entiers $(n+1)!+2, (n+1)!+3, \ldots, (n+1)!+(n+1)$. Aucun n'est premier d'après la question précédente, on peut donc trouver une liste de n entiers consécutifs dont aucun n'est premier, pour n aussi grand que l'on souhaite.

Correction 13 On commence par montrer que $p|a$. En effet, si $p|a^n$, alors d'après le lemme de Gauss, $p|a$ ou $p|a^{n-1}$. Si $p|a^{n-1}$, on itère. Au bout d'un nombre fini d'étapes, on aura montré, par disjonction de cas, que p divise a.

On a donc $a = bp$ donc $a^n = p^n b^n$ donc $p^n|a^n$.

Correction 14 On suppose par l'absurde qu'il en existe un nombre fini $p_1, \ldots, p_n$ et on pose $N = 4\displaystyle\prod_{i=1}^{n} p_i - 1$. N est impair, ses diviseurs premiers sont impairs donc leurs restes par la division euclidienne par 4 valent 1 ou 3. S'ils sont tous de la forme $4k+1$, alors N serait également de cette forme ce qui est absurde. On en déduit qu'il existe au moins un diviseur premier de N dont le reste vaut 3. Il existe donc j tel que p_j divise N mais p_j divise alors $N - 4p_1 \ldots p_n$ c'est-à-dire -1, ce qui est absurde.

On a montré qu'il existe un nombre infini de premiers dont le reste de la division euclidienne par 4 vaut 3