

Indications

Indication 1 Expliciter l'expression de A_n .

Indication 2 Déterminer le terme dominant de $(X^2 + 3X - 5)^n$.

Indication 3 Utiliser l'unicité de l'écriture d'un polynôme.

Indication 4 1. Commencez par montrer qu'une solution est de degré 3.
2. Commencez par montrer qu'une solution non nulle est de degré 4.

Indication 5 Raisonner avec le polynôme Q défini par $Q(X) = P(X + 1)$.

Indication 7 Exprimer $P^{(j)}(X)$ en fonction des coefficients de P puis déterminer son terme constant.

Indication 8 Raisonner par récurrence sur n .

Indication 9 Appliquer le théorème de Rolle pour montrer que P' est scindé à racines simples puis raisonner par l'absurde.

Indication 10 Montrer, en supposant que $a = 0$, que tous les coefficients de P sont strictement positifs et raisonner par l'absurde.

Indication 11 Poser $Z = X^3$ pour trouver toutes les racines du polynôme.

Indication 12 Remarquer que $-i$ est aussi racine donc P est divisible par $X^2 + 1$.

Indication 13 Déterminer cette racine multiple en regardant parmi les racines de P' puis factoriser.

Indication 14 Remarquer que $-i$ est aussi racine donc P est divisible par $X^2 + 1$.

Indication 15 Posez $T = X^2$.

Indication 16 Considérer $(X - 1)P(X)$.

Indication 17 Écrivez le polynôme sous la forme $A^2 - B^2$.

Indication 18 Trouver toutes les racines complexes et grouper deux à deux celles qui sont conjuguées.

Indication 19 Poser $T = X^3$ pour déterminer les racines sur $\mathbb{C}$.

Indication 20 Si α est une racine, montrer que $\frac{\alpha + i}{\alpha - i}$ est une racine $2n + 1$ -ièmes de l'unité. Utiliser ensuite les relations coefficients/racines pour déterminer la valeur de la somme.

Indication 21 Qu'est-ce que cela implique sur les racines de A ?

Indication 22 Déterminer son reste en sachant que son degré est majoré puis trouver les conditions pour que ce reste soit nul.

Indication 24 Traduire en terme de racines

Indication 25 Prendre des valeurs particulières de X pour déterminer les coefficients du reste, dont vous connaissez une majoration du degré.

Indication 26 Déterminer la forme du reste en majorant son degré puis évaluer en des valeurs particulières pour trouver ses coefficients

Indication 27 Traduire la divisibilité avec le reste de la division euclidienne.

Indication 28 Écrire la forme générale du reste et évaluer la division euclidienne en des valeurs bien choisies.

Indication 29 Montrer que les trois racines (simples) de $X^3 + X^2 + X + 1$ sont racines du polynôme.

Indication 30 Montrer que j est racine en utilisant les relations entre j et j^2 .

Indication 31 1. Montrer d'abord que $P(X) - X$ divise $P \circ P(X) - P(X)$.

2. Trouver P tel que $P \circ P(x) - x = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)^2 = 3x^2 - 8x + 2$.

Indication 32 Étudier la multiplicité de 1 en tant que racine de chaque polynôme.

Indication 33 Appliquer le théorème de Rolle pour montrer que P' est scindé à racines simples puis raisonner par l'absurde.

Indication 34 1. Calculer les dérivées successives.

2. Traduire la multiplicité de 1 trouvée à la question précédente et identifier les coefficients restants.

Indication 35 Montrer que 1 est racine de multiplicité au moins 3.

Indication 36 1. Calculer les dérivées successives.

2. Traduire la multiplicité de 1 trouvée à la question précédente et identifier les coefficients restants.

Indication 37 Montrer que 1 est racine de multiplicité au moins 2 du polynôme.

Indication 38 Dériver jusqu'à obtenir un polynôme dont 1 n'est pas racine.

Indication 39 Supposer que c'est le cas et traduire avec la dérivée.

Indication 40 Montrer que P admet une racine réelle puis que c'est la seule.

Indication 41 Reasonner par l'absurde.

Indication 42 Dériver jusqu'à obtenir un polynôme dont 1 n'est pas racine.

Indication 43 Montrer que 1 est racine de multiplicité au moins 2 du polynôme.

Indication 44 Regarder les racines de $P - Q$.

Indication 45 Montrer que le polynôme $P(X) - X$ est nul et obtenir une contradiction.

Indication 46 Il a beaucoup de racines?

Indication 47 Considérer le polynôme $Q(X) - X$ avec Q associé à la fonction polynomiale.

Indication 48 Déterminer le degré de P s'il est non nul et trouver des racines évidentes.

Indication 49 Reasonnez par analyse/synthèse en observant les racines.

Indication 50 1. Évaluer en z puis faites une récurrence.

2. Reasonner par l'absurde et montrer que P admet une infinité de racines.

3. Évaluer en $z + 1$ puis utiliser la question précédente.

4. Montrer que j et $\bar{j}$ ont même multiplicité.

Indication 51 Montrez que $0, -1$ et -2 sont racines de P , écrivez $P = X(X + 1)(X + 2)Q(X)$ et montrez que Q est constant.

Indication 52 Montrer qu'une solution non nulle est de degré 3.

Indication 53 1. Notez d le degré et trouver la relation avec n .

2. Posez $P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, injecter puis utilisez l'unicité des coefficients.

3. Vous devriez reconnaître un binôme de Newton.

4. Supposez, par l'absurde, que P admet une racine $a \neq -1$ de multiplicité k .

Indication 54 Dériver l'égalité.

Indication 55 1. Chercher à écrire la fraction sous la forme $\frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X-1} + \frac{\gamma}{X+1}$.

2. Chercher les racines du dénominateur.

3. Chercher à écrire la fraction sous la forme $\frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X+1} + \frac{\gamma}{X^2+X+1}$.

4. Faites d'abord une division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

Indication 56 1. Poser $u = \sin(t)$.

2. Poser $u = \cos(t)$.

3. Poser $u = \sin(t)$.

Correction du TD n 16

Correction 1 1. On a $A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^{n-k} X^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-i)^{n-k} X^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (i^{n-k} - (-i)^{n-k}) X^k$. Pour $k = n$, le coefficient devant X^n est nul; pour $k = n-1$, le coefficient est $2ni \neq 0$ donc le terme dominant de A^n est $2niX^{n-1}$.

2. On remarque que le terme dominant de $Q_n = (X^2 + 3X - 5)^n$ est X^{2n} , le terme dominant de Q'_n est donc $2nX^{2n-1}$, celui de $Q_n^{(2)}$ est $2n(2n-1)X^{2n-2}$ et par une récurrence descendante, on obtient que le terme dominant de P_n est $2n(2n-1) \dots (n+1)X^n$ autrement dit $\frac{(2n)!}{n!} X^n$.

Correction 2 On remarque que le terme dominant de $Q_n = (X^2 + 3X - 5)^n$ est X^{2n} , le terme dominant de Q'_n est donc $2nX^{2n-1}$, celui de $Q_n^{(2)}$ est $2n(2n-1)X^{2n-2}$ et par une récurrence descendante, on obtient que le terme dominant de P_n est $2n(2n-1) \dots (n+1)X^n$ autrement dit $\frac{(2n)!}{n!} X^n$.

Correction 3 Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un tel polynôme. On a alors $P(-X) = \sum_{k=0}^n a_k (-1)^k X^k$ donc, par unicité de l'écriture :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = (-1)^k a_k,$$

ce qui impose $a_k = 0$ pour tout k impair. On a alors $P = \sum_{j=0}^m a_{2j} X^{2j}$ avec $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

En posant $Q = \sum_{j=0}^m a_{2j} X^j$, on a bien $Q(X^2) = P(X)$.

Correction 4 1. Soit y une solution polynomiale de l'équation de terme dominant $a_n x^n$. Le terme dominant de xy'' est $n(n-1)a_n x^{n-1}$, celui de $2xy'$ est $2na_n x^n$ donc le coefficient devant x^n du membre de gauche est $(2n-3)a_n$. Il est non-nul, c'est donc le coefficient dominant, il faut par conséquent chercher une solution sous la forme d'un polynôme de degré 3. On cherche y sous la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$. On a $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ et $y'' = 6ax + 2b$. La fonction y est solution si et seulement si

$$-3ax^3 - 3bx^2 - 3cx - 3d = x^3 + 2x^2 - 2.$$

Par unicité des coefficients, on identifie :

$$\begin{cases} 3a &= 1 \\ 6a + b &= 2 \\ 2b - c &= 0 \\ -3d &= -2 \end{cases},$$

ce qui impose $a = \frac{1}{3}$, $b = 0 = c$ et $d = \frac{2}{3}$ donc le seul polynôme solution est $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}$.

2. Le polynôme nul est solution. Cherchons le degré d'une solution non nulle. On regarde les termes dominants de chaque terme. Si y est de terme dominant $a_n x^n$, alors xy'' est de terme dominant $n(n-1)a_n x^{n-1}$ et $2xy'$ est de terme dominant $2na_n x^n$. Pour obtenir un polynôme nul, on doit donc avoir $2na_n - 8a_n = 0$ d'où $n = 4$. On pose $y = a_4 X^4 + a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$. On a $y' = 4a_4 x^3 + 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$ et $y'' = 12a_4 x^2 + 6a_3 x + 2a_2$. La fonction y est solution si et seulement si

$$(12a_4 - 2a_3)x^3 + (6a_3 - 4a_2)x^2 + (2a_2 - 6a_1)x - 8a_0 = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} 12a_4 - 2a_3 &= 0 \\ 6a_3 - 4a_2 &= 0 \\ 2a_2 - 6a_1 &= 0 \\ -8a_0 &= 0 \end{cases}$$

puis à :

$$\begin{cases} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 3a_4 \\ a_2 &= 9a_4 \\ a_3 &= 6a_4 \end{cases}.$$

Les solutions sont donc de la forme :

$$P = a_4(x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 3x), a_4 \in \mathbb{R}$$

Correction 5 Il est clair que si P existe, il ne peut être de degré strictement inférieur à n puisqu'on aurait alors $P^{(n)} = 0$.

On pose $Q(X) = P(X+1)$ et on note $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Par hypothèse, on a :

$$Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(1) = k.$$

D'après l'exercice ??, on sait que $a_k = \frac{Q^{(k)}(0)}{k!}$. On a donc

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, k!a_k = k,$$

d'où

$$a_0 = 0 \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_k = \frac{1}{(k-1)!}.$$

$$\text{Ainsi, } Q(X) = \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{(k-1)!} \text{ et } P(X) = Q(X-1) = \sum_{k=1}^n \frac{(X-1)^k}{(k-1)!}.$$

Correction 6 1. Posons $g : x \mapsto x^n$ et $h : x \mapsto (x-1)^n$. On sait que pour tout $k \leq n$, on a $g^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$ et $h^{(n-k)}(x) = \frac{n!}{k!} (x-1)^k$. D'après la formule de Leibniz, on a :

$$(gh)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} (x-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 n! x^{n-k} (x-1)^k.$$

Tous les termes de cette somme s'annulent en 1 sauf pour $k=0$. On en déduit que

$$L_n(1) = \binom{n}{0}^2 n! = n!.$$

2. Pour déterminer le terme dominant de L_n , on remarque que celui de P_n est X^{2n} . En le dérivant n fois, on obtient le terme dominant de L_n qui vaut $\frac{(2n)!}{n!} X^n$.

Correction 7 La manière la plus élégante est de considérer la fonction polynômiale f associée à P . Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et son développement limité en 0 est :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Or, $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Par unicité du développement limité, on peut identifier les

coefficients et on obtient $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = a_k$, autrement dit $P^{(k)}(0) = k! a_k$.

Il est également possible d'écrire

$$\begin{aligned} P^{(j)}(X) &= \sum_{k=0}^n a_k (X^k)^{(j)} \\ &= \sum_{k=j}^n a_k \frac{k!}{(k-j)!} X^{k-j} \text{ car } (X^k)^{(j)} = 0 \text{ pour } j > k \end{aligned}$$

Le terme constant de $P^{(j)}(X)$ correspond au terme de la somme pour $k=j$ et on retrouve l'égalité souhaitée.

Correction 8 Le polynôme P s'écrit $\alpha \prod_{k=1}^n (X - a_k)$. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose

$$P_j(X) = \prod_{k=1}^j (X - a_j).$$

On va raisonner par récurrence sur $j \leq n$. Si $j=2$, on a $P_2(X) = \alpha(X - a_1)(X - a_2)$ et $P'_2(X) = \alpha(X - a_2) + \alpha(X - a_1)$ donc $\frac{P'_2(X)}{P_2(X)} = \frac{1}{X - a_1} + \frac{1}{X - a_2}$. Le résultat est donc vrai pour $j=2$. On suppose donc que :

$$\frac{P'_j(X)}{P_j(X)} = \sum_{k=1}^j \frac{1}{X - a_k},$$

et nous allons montrer que

$$\frac{P'_{j+1}(X)}{P_{j+1}(X)} = \sum_{k=1}^{j+1} \frac{1}{X - a_k}.$$

Pour cela, on écrit $P_{j+1}(X) = (X - a_{j+1})P_j(X)$, alors $P'_{j+1}(X) = P_j(X) + (X - a_{j+1})P'_j(X)$. On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{P'_{j+1}(X)}{P_{j+1}(X)} &= \frac{P_j(X) + (X - a_{j+1})P'_j(X)}{(X - a_{j+1})P_j(X)} \\ &= \frac{1}{X - a_{j+1}} + \frac{P'_j(X)}{P_j(X)} \\ &= \frac{1}{X - a_{j+1}} + \sum_{k=1}^j \frac{1}{X - a_k} \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \sum_{k=1}^{j+1} \frac{1}{X - a_k} \end{aligned}$$

Le résultat est vrai au rang $j+1$. Par le principe de récurrence, il est vrai pour tout $j \leq n$ donc pour n .

Correction 9 On ordonne les racines de P : $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ où $n = \deg P$ et on applique ensuite le théorème de Rolle entre chaque racine. On trouve que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \exists b_i \in]a_i, a_{i+1}[, P'(b_i) = 0.$$

Comme on a $b_1 < b_2 < \dots < b_{n-1}$, on a $n-1$ racines distinctes de P' qui est un polynôme de degré $n-1$ donc il est scindé à racines simples.

Soit a une racine de $P^2 + 1$. On a $P^2(a) + 1 = 0$ donc nécessairement $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Si a est une racine d'ordre au moins 2, elle est également racine du polynôme dérivé.

On a donc $P(a)P'(a) = 0$ ce qui signifie que a est racine de P ou de P' or on a montré que ces deux polynômes avaient toutes leurs racines dans $\mathbb{R}$, a ne peut donc pas être racine de P ou de P' , elle est donc racine simple du polynôme $P^2 + 1$.

Correction 10 On pose $Q(X) = P(X+a)$. On a alors $Q^{(n)}(0) = P^{(n)}(a)$. On peut donc raisonner avec le polynôme Q et montrer qu'il n'a pas de racines strictement positives. On pose $Q = \sum_{k=0}^m a_k X^k$.

On a, $\forall k \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $Q^{(k)}(0) = k!a_k$ donc $a_k > 0$. On suppose par l'absurde que $\alpha > 0$ est une racine de Q . On a alors :

$$\sum_{k=0}^n a_k \alpha^k > 0,$$

ce qui est une contradiction donc Q n'admet pas de racine strictement positive ce qui implique que P ne s'annule pas sur $[a, +\infty[$.

Correction 11 On pose $Z = X^3$. Les racines de $Z^2 + Z + 1$ sont $e^{\pm \frac{2i\pi}{3}}$, les racines de $X^6 + X^3 + 1$ sont $e^{\pm \frac{2i\pi}{9} + \frac{2ik\pi}{3}}$ pour $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$. On a $e^{\pm \frac{2i\pi}{9} + \frac{2ik\pi}{3}} = e^{\frac{2i(3k+1)\pi}{9}}$ et le polynôme est unitaire donc :

$$X^6 + X^3 + 1 = \prod_{k=0}^2 \left(X - e^{\frac{2i(3k+1)\pi}{9}} \right) \left(X - e^{\frac{2i(3k-1)\pi}{9}} \right).$$

Explicitons ces racines :

$$e^{\frac{ir\pi}{9}}, r \in \{-2, 2, 4, 8, 10, 14\}.$$

Il faut maintenant déterminer lesquelles sont conjuguées. On a $e^{-\frac{4i\pi}{9}} = e^{\frac{14i\pi}{9}}$ et $e^{-\frac{8i\pi}{9}} = e^{\frac{10i\pi}{9}}$ donc les racines de $X^6 + X^3 + 1$ sont $e^{\pm \frac{2i\pi}{9}}$, $e^{\pm \frac{4i\pi}{9}}$ et $e^{\pm \frac{8i\pi}{9}}$ ce qui permet d'écrire la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$:

$$X^6 + X^3 + 1 = \prod_{k=1}^3 \left(X^2 - 2 \cos \left(\frac{2ki\pi}{9} \right) X + 1 \right).$$

Correction 12 On montre facilement que i est racine. Comme P est à coefficients réels, on sait que $-i$ est aussi racine de P donc P est divisible par $X^2 + 1$:

$$X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 2X + 5 = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 5)$$

Il reste à déterminer les racines du polynôme $X^2 - 2X + 5$ qui sont $1 + 2i$ et $1 - 2i$. On a donc la factorisation sur $\mathbb{C}[X]$:

$$X^4 - X^3 + 6X^2 + 2X - 5 = (X - i)(X + i)(X - 1 - 2i)(X - 1 + 2i)$$

et celle sur $\mathbb{R}[X]$:

$$X^4 - X^3 + 6X^2 + 2X - 5 = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 5)$$

Correction 13 On a $P'(X) = 4(X^3 - 7X - 6)$. Il est clair que 1 est racine de P' donc :

$$P'(X) = 4(X - 1)(X^2 + X - 6).$$

Le polynôme $X^2 + X - 6$ admet 2 et -3 pour racines donc on a la factorisation suivante :

$$P'(X) = 4(X - 1)(X - 2)(X + 3).$$

On remarque que 2 est racine de P , on sait donc, vu que 2 est également racine de P' , que $(X - 2)^2$ divise P . On a :

$$P = (X - 2)^2(X^2 + 4X - 2).$$

Les racines de $X^2 + 4X - 2$ sont $-2 \pm \sqrt{6}$. On en déduit que :

$$P(X) = (X - 2)^2(X + 2 + \sqrt{6})(X + 2 - \sqrt{6}).$$

Correction 14 On remarque que le polynôme est à coefficients réels donc, si i est racine, $-i$ l'est également. Le polynôme est donc divisible par $X^2 + 1$:

$$\begin{aligned} X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2X + 3 \\ = (X^2 + 1)(X^2 + 2X + 3). \end{aligned}$$

Le polynôme $X^2 + 2X + 3$ est de discriminant négatif, il est donc irréductible sur $\mathbb{R}[X]$, on a trouvé la factorisation du polynôme en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.

Correction 15 On pose $T = X^2$. On résout :

$$5T^2 + 10T + 1 = 0.$$

Le discriminant est égal à 80 donc les racines sont :

$$\frac{-10 \pm 4\sqrt{5}}{10} = \frac{-5 \pm 2\sqrt{5}}{5}.$$

On remarque que les deux racines sont négatives. On en déduit que les quatre racines du polynôme en X sont :

$$\pm i \sqrt{5 \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}}.$$

Correction 16 On remarque que $(X - 1)P(X) = X^5 - 1$. Les racines de P sont donc les racines cinquièmes de l'unité différentes de 1. Autrement dit, les racines de P sont $e^{\frac{2ki\pi}{5}}$ pour k variant de 1 à 4.

Correction 17 On écrit

$$\begin{aligned}(X^2 + 1)^2 + (X^2 - X - 1)^2 &= (X^2 + 1)^2 - (iX^2 - iX - i)^2 \\ &= (X^2 + 1 - iX^2 + iX + i)(X^2 + 1 + iX^2 - iX - i) \\ &= ((1 - i)X^2 + iX + (i + 1))((1 + i)X^2 - iX + (-i + 1))\end{aligned}$$

Déterminons les racines de $((1 - i)X^2 + iX + (i + 1))$; leurs conjugués seront racines de $((1 + i)X^2 - iX + (-i + 1))$. Pour cela, on calcule de discriminant $\Delta = -9$, les racines sont donc $(1 - i)$ et $\frac{-1 + i}{2}$. On en déduit que les racines de P sont :

$$(1 - i), (1 + i), \frac{-1 + i}{2}, \frac{-1 - i}{2}.$$

Enfin, on regroupe les racines conjuguées pour avoir la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$. On a $(X - (1 + i))(X - (1 - i)) = X^2 - 2\Re(1 + i)X + |1 + i|^2 = X^2 - 2X + 2$ et $\left(X - \frac{-1 + i}{2}\right)\left(X - \frac{-1 - i}{2}\right) = X^2 - 2\Re\left(\frac{-1 - i}{2}\right)X + \left|\frac{i - 1}{2}\right|^2 = X^2 + X + \frac{1}{2}$ d'où, comme le polynôme a pour coefficient dominant 2 :

$$(X^2 + 1)^2 + (X^2 - X - 1)^2 = 2(X^2 - 2X + 2)\left(X^2 + X + \frac{1}{2}\right) = (X^2 - 2X + 2)(2X^2 + 2X + 1).$$

Correction 18 On sait que les racines 7-ièmes de 3 sont les complexes de la forme :

$$\sqrt[7]{3}e^{\frac{2ik\pi}{7}}, k \in \llbracket 0, 6 \rrbracket.$$

Une seule de ces racines est réelle, pour $k = 0$. Les autres sont deux à deux conjuguées. Précisément, on a :

- $\sqrt[7]{3}e^{\frac{8i\pi}{7}} = \sqrt[7]{3}e^{-\frac{6i\pi}{7}} = \overline{\sqrt[7]{3}e^{\frac{6i\pi}{7}}},$
- $\sqrt[7]{3}e^{\frac{10ik\pi}{7}} = \sqrt[7]{3}e^{-\frac{4i\pi}{7}} = \overline{\sqrt[7]{3}e^{\frac{4i\pi}{7}}},$
- et $\sqrt[7]{3}e^{\frac{12i\pi}{7}} = \sqrt[7]{3}e^{-\frac{2i\pi}{7}} = \overline{\sqrt[7]{3}e^{\frac{2i\pi}{7}}}.$

La factorisation sur $\mathbb{R}[X]$ est donc :

$$P(X) = (X - \sqrt[7]{3}) \prod_{k=1}^3 \left(X^2 - 2\sqrt[7]{3} \cos \frac{2k\pi}{7} + \sqrt[7]{9} \right).$$

Correction 19 On pose $T = X^3$. Le polynôme $T^2 - 2\cos(6\theta)T + 1$ est de la forme $T^2 - 2\Re(e^{6i\theta})T + |e^{6i\theta}|^1$, ses racines sont donc $e^{\pm 6i\theta}$.

Les racines cubiques de $e^{\pm 6i\theta}$ sont $e^{\pm 2i\theta}, je^{\pm 2i\theta}$ et $j^2e^{\pm 2i\theta}$. Le polynôme étant unitaire, on en déduit sa factorisation sur $\mathbb{C}[X]$:

$$X^6 - 2X^3 \cos(6\theta) + 1 = \prod_{k=0}^2 (X - j^k e^{2i\theta})(X - j^k e^{-2i\theta}).$$

Pour trouver la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$, il faut grouper les racines conjuguées deux à deux. Comme $j = \bar{j}^2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, les racines sont $e^{2i\theta}, e^{2i\theta + \frac{2\pi}{3}}, e^{2i\theta + \frac{4i\pi}{3}}$ et leurs conjugués.

On peut donc affirmer que la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$ est :

$$X^6 - 2X^3 \cos(6\theta) + 1 = \prod_{k=0}^2 (X^2 - 2\cos\left(2\theta + \frac{2k\pi}{3}\right)X + 1).$$

Correction 20 Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On raisonne par équivalence :

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\alpha + i)^{2n+1} = (\alpha - i)^{2n+1}.$$

Comme i n'est pas racine de P , on sait que $\alpha \neq i$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}P(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha + i}{\alpha - i}\right)^{2n+1} = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \frac{\alpha + i}{\alpha - i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, (\alpha + i) = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}(\alpha - i) \\ \exists k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \alpha \left(e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} - 1 \right) &= i \left(e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} + 1 \right)\end{aligned}$$

On remarque que k ne peut être égal à 0, on peut donc diviser par $e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} - 1$ et obtenir α :

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, \alpha = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} - 1}.$$

On peut simplifier l'expression des racines en utilisant la factorisation par l'arc moitié. Étant donné $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, on a

$$\frac{e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} - 1} = \frac{2e^{\frac{ik\pi}{2n+1}} \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{2ie^{\frac{ik\pi}{2n+1}} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = -\frac{i \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = -i \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

On remarque que la somme recherchée est la somme des racines. On sait, d'après les relations coefficients racines, que c'est, à un multiple près, le coefficient devant

X^{d-1} si d désigne le degré. Il nous faut donc déterminer ce dernier. Pour cela, on utilise la formule du binôme de Newton pour écrire :

$$\begin{aligned} (X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k} i^k - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k} (-i)^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k} (i^k - (-i)^k). \end{aligned}$$

Pour $k=0$, le terme est nul.

Pour $k=1$, on obtient $2i \binom{2n+1}{1} X^{2n} = 2i(2n+1)X^{2n}$ donc le polynôme est de degré $2n$ (ce qui est cohérent avec les $2n$ racines trouvées précédemment).

Pour $k=2$, on obtient un terme nul ce qui montre que la somme recherchée est nulle :

$$\sum_{k=1}^{2n} \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

Correction 21 Si A est toujours positif sur $\mathbb{R}$, cela signifie qu'il n'a aucune racine réelle de multiplicité impaire. Autrement dit, ses racines sont réelles de multiplicité paire ou complexes conjuguées. De plus, son terme dominant est nécessairement positif, sinon sa limite en $+\infty$ serait $-\infty$ et il serait négatif au delà d'un certain réel. On peut donc écrire le polynôme sous la forme

$$P(X) = \alpha^2 \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{2r_k} \prod_{j=1}^m (X - z_j)(X - \bar{z}_j),$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $r_k \in \mathbb{N}$ et $z_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, les z_j n'étant pas nécessairement distincts.

Considérons le polynôme $\prod_{j=1}^m (X - z_j)$. On peut l'écrire sous la forme $P_1(X) +$

$iP_2(X)$ avec $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]$. On a alors $\prod_{j=1}^m (X - \bar{z}_j) = P_1(X) - iP_2(X)$ et

$$\begin{aligned} P &= \alpha^2 \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{2r_k} (P_1(X) + iP_2(X))(P_1(X) - iP_2(X)) \\ &= \alpha^2 \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{2r_k} (P_1^2(X) + P_2^2(X)) \\ &= \alpha^2 \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{2r_k} P^2(X)_1 + \alpha^2 \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k) P^2(X)_2 \\ &= \left(\alpha \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{r_k} P_1(X) \right)^2 + \left(\alpha \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{r_k} P_2(X) \right)^2 \end{aligned}$$

En posant $B = \alpha \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{r_k} P_1(X)$ et $C = \alpha \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)^{r_k} P_2(X)$, on a bien le résultat souhaité.

Correction 22 On sait que le reste de la division euclidienne de $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$ par $X^2 + 2$ est de degré au plus 1, il est donc de la forme $\alpha X + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2 = Q(X)(X^2 + 2) + \alpha X + \beta.$$

Pour $X = i\sqrt{2}$, on obtient

$$4 - 2i\sqrt{2} + 2a + ib\sqrt{2} + 2 = \alpha i\sqrt{2} + \beta.$$

On identifie les parties réelles et imaginaires, on trouve $\alpha = b - 2$ et $\beta = 6 + 2a$. Le reste vaut donc $(b - 2)X + (6 - 2a)$. Il est nul si et seulement si $b = 2$ et $a = 3$.

Correction 23 1. On pose la division euclidienne, on trouve $X^7 - 2X + 1 = (X^5 + X^3 + X)(X^2 - 1) - X + 1$.

2. On pose la division euclidienne, on trouve $3X^5 + 4X^2 + 1 = (X^2 + 2X + 3)(3X^3 - 6X^2 + 3X + 16) - 41X - 47$.

Correction 24 On remarque que 0 et 2 sont racines du polynôme donc $X(X - 2)$ divise bien ce polynôme.

Correction 25 On sait que le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 3X + 2$ est de degré au plus 1. Il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$P(X) = Q(X)(X^2 - 3X + 2) + aX + b.$$

Pour $X = 1$, on obtient :

$$P(1) = a + b = 1.$$

Pour $X = 2$, on obtient :

$$P(2) = 2a + b = 5.$$

On a donc $a = 4$ et $b = -3$ donc le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 3X + 2$ est $4X - 3$.

De même, on sait que le reste de la division euclidienne de P par $(X + 1)^2$ est de degré au plus 1. À nouveau, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$P(X) = Q(X)(X + 1)^2 + aX + b.$$

En évaluant l'égalité pour $X = -1$, on obtient :

$$P(-1) = 5 = -a + b.$$

Deux polynômes égaux ont même dérivée formelle, on peut donc dériver l'égalité puis évaluer l'égalité obtenue en $X = -1$. On obtient :

$$P'(X) = Q'(X)(X+1)^2 + 2Q(X)(X+1) + a,$$

puis :

$$P'(-1) = 0 = a.$$

Le reste de la division euclidienne de P par $(X+1)^2$ est donc 5.

Correction 26 On sait que le reste est de degré au plus 1, il s'écrit $aX + b$ avec a et b réels. On a donc :

$$(X \sin \theta + \cos \theta)^n = (X^2 + 1)Q(X) + aX + b$$

En évaluant pour $X = i$, on obtient $ai + b = (i \sin \theta + \cos \theta)^n = e^{in\theta}$ donc, en identifiant les parties réelles et imaginaires, $a = \sin(n\theta)$ et $b = \cos(n\theta)$.

Correction 27 1. On a $X(X^{qd} - 1) + X^r - 1 = X^{r+qd} - X^r + X^r - 1 = X^n - 1$. On écrit :

$$\begin{aligned} X^{qd} - 1 &= (X^d)^q - 1^q \\ &= (X^d - 1) \sum_{k=0}^{q-1} (X^d)^k 1^{q-1-k} \\ &= (X^d - 1) \sum_{k=0}^{q-1} X^{dk} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$X^n - 1 = (X^d - 1) \left(X^r \sum_{k=0}^{q-1} X^{dk} \right) + X^r - 1,$$

avec $\deg(X^r - 1) < d$ donc, par unicité de la division euclidienne, le quotient

vaut $X^r \sum_{k=0}^{q-1} X^{dk}$ et le reste vaut $X^r - 1$.

2. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} X^d - 1 \text{ divise } X^n - 1 &\Leftrightarrow \text{le reste de la division euclidienne est nul} \\ &\Leftrightarrow X^r - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow r = 0 \\ &\Leftrightarrow n = qd \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow d \text{ divise } n$$

d'où l'équivalence souhaitée.

Correction 28 Par définition de la division euclidienne, on sait qu'il existe $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que

$$(X-1)^{2n} + (X-2)^n - 2 = Q(X)(X^2 - 3X + 2) + R(X).$$

Comme $\deg(R) < 2$, R est de la forme $aX + b$. On évalue la division euclidienne en $X = 1$ et $X = 2$, pour annuler $X^2 - 3X + 2$, on trouve :

$$\begin{cases} (-1)^n - 2 &= a + b \\ 1 - 2 &= 2a + b \end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} a + b &= (-1)^n - 2 \\ 2a + b &= -1 \end{cases}$$

On trouve $a = 1 - (-1)^n$ et $b = 2(-1)^n - 3$ donc le reste de la division euclidienne du polynôme $(X-1)^{2n} + (X-2)^n - 2$ par $X^2 - 3X + 2$ est $(1 - (-1)^n)X + 2(-1)^n - 3$.

Correction 29 On écrit $(X-1)(X^3 + X^2 + X + 1) = X^4 - 1$, les racines du polynôme $X^3 + X^2 + X + 1$ sont donc 1 et $\pm i$. Soit α une de ces racines. On a $\alpha^4 = 1$, donc :

$$\begin{aligned} \alpha^{4a+3} + \alpha^{4b+2} + \alpha^{4c+1} + \alpha^{4d} &= (\alpha^4)^a \alpha^3 + (\alpha^4)^b \alpha^2 + (\alpha^4)^c \alpha + (\alpha^4)^d \\ &= \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Les trois racines distinctes de $X^3 + X^2 + X + 1$ sont racines du polynôme $X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d}$ donc $X^3 + X^2 + X + 1$ divise $X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d}$.

Correction 30 Il suffit de montrer que j et j^2 sont racines de $(X+1)^{2017} - X^{2017} - 1$. Comme le polynôme est à coefficients réels, il suffit de montrer que j est racine. On sait que $j + 1 = j^2$ et $2017 \equiv 1[3]$ donc $2017 = 3q + 1$. Ainsi, $(j+1)^{2017} = (-j^2)^{2017} = -j^{6q+2} = -j^2$ car $j^{6q} = (j^3)^{2q} = 1$, par définition de j .

On a aussi $j^{2017} = j^{3q+1} = j^{3q}j = j$. On en déduit que

$$(j+1)^{2017} - j^{2017} - 1 = -j^2 - j - 1 = 0,$$

car on sait que $1 + j + j^2 = 0$. Le polynôme $(X+1)^{2017} - X^{2017} - 1$ admet j comme racine. Comme il est à coefficients réels, il admet également j^2 . Il est donc divisible par $X^2 + X + 1$.

Correction 31 1. On écrit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On a $P \circ P(X) = \sum_{k=0}^n a_k (P(X))^k$

donc

$$P \circ P(X) - P(X) = \sum_{k=0}^n a_k (P(X))^k - \sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=1}^n a_k (P(X)^k - X^k).$$

On a $P(X) - X | P(X)^k - X^k$ pour tout $k \geq 1$ donc $P(X) - X | P \circ P(X) - P(X)$.

On écrit ensuite $P \circ P(X) - X = P \circ P(X) - P(X) + P(X) - X$. On en déduit que $P(X) - X | P \circ P(X) - X$

2. On écrit

$$\begin{aligned} (x^2 - 3x + 1)^2 &= 3x^2 - 8x + 2 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)^2 - (3x^2 - 8x + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)^2 - 3(x^2 - 3x + 1) + 1 &= x \\ \Leftrightarrow P \circ P(x) &= x \\ \text{avec } P(X) &= X^2 - 3X + 1 \end{aligned}$$

On sait que $P(X) - X$ divise $P \circ P(X) - X$ d'après la question précédente donc, en factorisant $P \circ P(X) - X$ par $P(X) - X$:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3} \text{ ou } x = 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

On a trouvé quatre solutions distinctes.

Correction 32 On remarque tout d'abord que $Q = 0 \Leftrightarrow P = 0$.

On suppose par l'absurde que les polynômes P et Q ne sont pas nuls. En évaluant en $X = 1$, on obtient $P^2(1) = 0$ donc 1 est racine de P . Cela implique que $(X - 1)$ divise P . On peut donc trouver $P_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - 1)P_1$ d'où

$$P^2 = (X - 1)^2 P_1^2 = (X - 1)Q^2(X),$$

ce qui implique

$$(X - 1)P_1^2 = Q^2(X),$$

puis $Q(1) = 0$. Notons a la multiplicité de 1 en tant que racine de P et b la multiplicité de 1 en tant que racine de Q . Il existe alors A et B tel que

$$P = (X - 1)^a A \text{ et } Q = (X - 1)^b B.$$

On remplace dans l'égalité, on obtient :

$$(X - 1)^{2a} A^2 = (X - 1)(X - 1)^{2b} B^2,$$

soit encore

$$(X - 1)^{2a} A^2 = (X - 1)^{2b+1} B^2(X),$$

avec $A(1) \neq 0$ et $B(1) \neq 0$. La multiplicité de 1 en tant que racine de $(X - 1)^{2a} A^2$ est $2a$, sa multiplicité en tant que racine de $(X - 1)^{2b+1} B^2(X)$ est $2b+1$ donc $2a = 2b+1$ ce qui est impossible.

Correction 33 On ordonne les racines de P : $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ où $n = \deg P$ et on applique ensuite le théorème de Rolle entre chaque racine. On trouve que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \exists b_i \in]a_i, a_{i+1}[, P'(b_i) = 0.$$

Comme on a $b_1 < b_2 < \dots < b_{n-1}$, on a $n-1$ racines distinctes de P' qui est un polynôme de degré $n-1$ donc il est scindé à racines simples.

Soit a une racine de $P^2 + 1$. On a $P^2(a) + 1 = 0$ donc nécessairement $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Si a est une racine d'ordre au moins 2, elle est également racine du polynôme dérivé. On a donc $P(a)P'(a) = 0$ ce qui signifie que a est racine de P ou de P' or on a montré que ces deux polynômes avaient toutes leurs racines dans $\mathbb{R}$, a ne peut donc pas être racine de P ou de P' , elle est donc racine simple du polynôme $P^2 + 1$.

Correction 34 1. On a $P(1) = 0$, on calcule les dérivées successives de P :

$$P'_n(X) = n(n+2)X^{n+1} - (n+2)(n+1)X^n + (n+2), P'_n(1) = 0$$

$$P_n^{(2)}(X) = n(n+2)(n+1)X^n - n(n+1)(n+2)X^{n-1}, P_n^{(2)}(1) = 0$$

$$P_n^{(3)}(X) = n^2(n+2)(n+1)X^{n-1} - n(n+1)(n+2)(n-1)X^{n-2} \text{ pour } n \neq 1, P_1^{(3)}(X) = n^2(n+1)(n-1)$$

1 est donc racine de P_n de multiplicité 3.

2. D'après le travail fait à la question précédente, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X - 1)^3$ divise P_n .

On a $P_1(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ et comme il est unitaire, on a $P_1(X) = (X - 1)^3$.

On a $P_2(X) = 2X^4 - 4X^3 + 4X - 2$ et P_2 est divisible par $(X - 1)^3$. Comme son coefficient dominant vaut 2, on sait qu'il existe un réel b tel que $P_2(X) = 2(X - 1)^3(X + b)$. En identifiant les termes constants, on trouve $b = 1$.

Pour P_3 , on fait la division euclidienne de P_3 par $(X - 1)^3$, on trouve $P_3(X) = (X - 1)^3(3X^2 + 4X + 3)$. On remarque que le polynôme $3X^2 + 4X + 3$ est de discriminant négatif donc il est irréductible sur $\mathbb{R}$. La factorisation sur $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P_3(X) = 3(X - 1)^3 \left(X + \frac{2 + i\sqrt{5}}{3} \right) \left(X + \frac{2 - i\sqrt{5}}{3} \right)$$

Correction 35 Il suffit de montrer que 1 est racine du polynôme de multiplicité au moins 3. Pour cela, on va calculer ses dérivées successives. On note P le polynôme

- $P(1) = 0$.

• $P'(X) = n(n+2)X^{n+1} - (n+2)(n+1)X^n + (n+2)$ donc $P'(1) = 0$.

• $P''(X) = n(n+2)(n+1) - (n+2)(n+1)n$ donc $P''(1) = 0$.

Pas besoin de calculer $P^{(3)}$, on sait déjà que 1 est une racine de P de multiplicité au moins 3 donc $(X-1)^3$ divise P .

Correction 36 1. On a $P(1) = 0$, on calcule les dérivées successives de P :

$$P'_n(X) = n(n+2)X^{n+1} - (n+2)(n+1)X^n + (n+2), P'_n(1) = 0$$

$$P_n^{(2)}(X) = n(n+2)(n+1)X^n - n(n+1)(n+2)X^{n-1}, P_n^{(2)}(1) = 0$$

$$P_n^{(3)}(X) = n^2(n+2)(n+1)X^{n-1} - n(n+1)(n+2)(n-1)X^{n-2} \text{ pour } n \neq 1, P_1^{(3)}(X) = 0$$

1 est donc racine de P_n de multiplicité 3.

2. D'après le travail fait à la question précédente, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X-1)^3$ divise P_n .

On a $P_1(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$ et comme il est unitaire, on a $P_1(X) = (X-1)^3$.

On a $P_2(X) = 2X^4 - 4X^3 + 4X - 2$ et P_2 est divisible par $(X-1)^3$. Comme son coefficient dominant vaut 2, on sait qu'il existe un réel b tel que $P_2(X) = 2(X-1)^3(X+b)$. En identifiant les termes constants, on trouve $b = 1$.

Pour P_3 , on fait la division euclidienne de P_3 par $(X-1)^3$, on trouve $P_3(X) = (X-1)^3(3X^2 + 4X + 3)$. On remarque que le polynôme $3X^2 + 4X + 3$ est de discriminant négatif donc il est irréductible sur $\mathbb{R}$. La factorisation sur $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P_3(X) = 3(X-1)^3 \left(X + \frac{2+i\sqrt{5}}{3} \right) \left(X + \frac{2-i\sqrt{5}}{3} \right)$$

Correction 37 Il suffit de montrer que 1 est racine de $P(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ de multiplicité au moins 2. On a $P(1) = 0$ et $P'(x) = n(n+1)X^n - (n+1)nX^{n-1}$ admet également 1 pour racine donc $(X-1)^2$ divise P .

Correction 38 On note $P(X) = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$. On a $P(1) = 0$ donc 1 est racine de P .

On a $P(X)' = (2n+1)X^{2n} - (2n+1)(n+1)X^n + (2n+1)nX^{n-1}$ et $P'(1) = 0$.

On a $P''(X) = (2n+1)2nX^{2n-1} - (2n+1)n(n+1)X^{n-1} + (2n+1)n(n-1)X^{n-2}$ et $P''(1) = 0$.

Enfin, on a

$$P^{(3)}(X) = (2n+1)2n(2n-1)X^{2n-2} - (2n+1)n(n+1)(n-1) + (2n+1)n(n-1)(n-2)$$

et $P^{(3)}(1) = n(2n+1)(n+1) \neq 0$.

On a montré que 1 est racine de multiplicité 3 de P .

$$\textbf{Correction 39} \text{ On a } P'_n = \sum_{k=0}^n \frac{nX^{n-1}}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!}.$$

Si $P_n(a) = 0 = P'_n(a)$ alors $P_n(a) - P'_n(a) = 0 = \frac{a^n}{n!}$ donc $a = 0$ or $P_n(a) = 1$ donc 0 n'est pas racine de P_n .

On a montré que 1 est racine de P_n et que $P_n^{(3)}(1) \neq 0$ donc 1 est racine de P_n est simple.

Correction 40

Si P est une constante alors P' ne divise pas P sauf s'il est nul. On suppose P de degré au moins 1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P'|P$. Alors, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = QP'$. Comme $\deg(P') = \deg(P) - 1$, on a $\deg(Q) = 1$ donc $Q = (aX + b)$ avec $a \neq 0$. On pose $\alpha = -\frac{b}{a}$, alors α est racine de P donc P admet au moins une racine réelle.

Supposons que P admette plus d'une racine réelle. On peut alors trouver une racine β de P telle que P ne s'annule pas entre α et β . On applique le théorème de Rolle à P entre α et β , on trouve un réel γ strictement compris entre α et β tel que $P'(\gamma) = 0$. Or $P(\gamma) = Q(\gamma)P'(\gamma) = 0$ et on a supposé que P ne s'annulait pas entre α et γ . On obtient une contradiction. On a donc montré, par l'absurde, que P n'a qu'une racine réelle. P s'écrit alors de la forme $\lambda(aX + b)^n$ avec $n > 0$. Il est clair qu'un tel polynôme est divisible par sa dérivée, l'ensemble cherché est donc

$$\{\gamma(X - \alpha)^n, (\gamma, \alpha) \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{N}^*\}$$

Correction 41 On suppose par l'absurde qu'il admet une racine multiple α . On a alors $\alpha^n + 2\alpha + n - 1 = 0$ et $n\alpha^{n-1} + 2 = 0$. On en déduit que

$$\alpha(n\alpha^{n-1} + 2) - (\alpha^n + 2\alpha + n - 1) = 0,$$

ce qui implique $(n-1)\alpha^n = n-1$. Ceci n'est possible que si α est de module 1. Or, l'égalité $n\alpha^{n-1} + 2 = 0$ est impossible si α est de module 1 car $\frac{2}{n} \neq 1$. On a une contradiction donc le polynôme n'admet que des racines simples.

Correction 42 On note $P(X) = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$. On a $P(1) = 0$ donc 1 est racine de P .

On a $P(X)' = (2n+1)X^{2n} - (2n+1)(n+1)X^n + (2n+1)nX^{n-1}$ et $P'(1) = 0$.

On a $P''(X) = (2n+1)2nX^{2n-1} - (2n+1)n(n+1)X^{n-1} + (2n+1)n(n-1)X^{n-2}$ et $P''(1) = 0$.

Enfin, on a $P^{(3)}(X) = (2n+1)2n(2n-1)X^{2n-2} - (2n+1)n(n+1)(n-1) + (2n+1)n(n-1)(n-2)$ et $P^{(3)}(1) = n(2n+1)(n+1) \neq 0$.

On a montré que 1 est racine de multiplicité 3 de P .

Correction 43 Il suffit de montrer que 1 est racine de $P(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ de multiplicité au moins 2. On a $P(1) = 0$ et $P'(x) = n(n+1)X^n - (n+1)nX^{n-1}$ admet également 1 pour racine donc $(X-1)^2$ divise P .

Correction 44 Le polynôme $P - Q$ admet une infinité de racines, il est donc nul.

Correction 45 On suppose, par l'absurde, qu'un tel polynôme existe. On pose $Q(X) = P(X) - X$. Le polynôme Q admet tous les réels pour racines donc il est nul. On a donc $P(X) = X$ mais pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a $P(z) = z \neq \bar{z}$ d'où une contradiction.

Correction 46 On a $P(y) = 0, \forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc P admet une infinité de racines, il est donc nul.

Correction 47 On note $Q = P - X$ et f la fonction polynômiale associée à P .

On remarque que α est un point fixe de f si et seulement si α est une racine de Q . Or Q est de degré n , il admet donc au plus n racines distinctes.

On a montré que f admet au plus n points fixes.

Correction 48 Si P est nul, il satisfait l'équation. Sinon, notons n son degré. Le degré de $P(X^2)$ est $2n$, celui de $(X^2+1)P(X)$ est $n+2$, on doit donc avoir $2n = n+2$ ce qui impose $n = 2$.

Pour $X = i$ dans l'égalité, on obtient $P(-1) = 0$ donc -1 est racine de P .

Pour $X = -1$ dans l'égalité, on obtient $P(1) = 0$ donc 1 est racine de P .

Comme on a montré que P est de degré 2, il est de la forme $\lambda(X^2 - 1)$. Réciproquement, tout polynôme de cette forme vérifie l'équation donc l'ensemble des solutions est

$$\{\lambda(X^2 - 1), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Correction 49 Le polynôme nul est solution.

Soit P un polynôme non-nul tel que P' divise P . S'il est constant, $P' = 0$ donc P' ne divise pas P . Le polynôme P est donc de degré au moins 1. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les racines de P' et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités respectives. Comme P' divise P , on sait que $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont racines de P . Ce sont donc des racines multiples de P et leurs multiplicités valent respectivement $m_1 + 1, \dots, m_r + 1$. On a :

$$\deg(P) \geq \sum_{k=1}^r (m_k + 1) = \left(\sum_{k=1}^r m_k \right) + r = \deg(P') + r.$$

Or $\deg(P') = \deg(P) - 1$ donc on a $r = 1$, ce qui signifie que P' possède une unique racine. On écrit $P'(X) = \lambda(X - \alpha)^m$. On sait que α est racine de P , puisque P' divise P et sa multiplicité est alors $m + 1$ donc $P(X) = \lambda(X - \alpha)^{m+1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, tout polynôme de cette forme est bien divisible par son polynôme dérivée.

Correction 50 1. Soit z une racine de P , alors $P(z) = 0$ et, par suite, $P(z^2) = P(z)P(z+1) = 0$ donc z^2 est racine de P . Montrons par récurrence sur k que z^{2^k} est alors racine de P pour tout $k \in \mathbb{N}$. Nous venons de faire l'initialisation, supposons que c'est vrai au rang k , alors

$$P(z^{2^{k+1}}) = P\left((z^{2^k})^2\right) = P(z^{2^k})P(z^{2^k} - 1) = 0$$

donc $z^{2^{k+1}}$ est racine de P . On a montré, par récurrence sur k que : $\forall k \in \mathbb{N}, z^{2^k}$ est racine de P .

2. Le polynôme P est non-nul, il admet donc un nombre fini de racines. Or, d'après la question précédente, on a vu que si z est racine, $\{z^{2^k}, k \in \mathbb{N}\}$ est également inclus dans l'ensemble des racines de P . Cet ensemble doit donc être fini, il existe par conséquent $k \neq k'$ tel que $z^{2^k} = z^{2^{k'}}$. Quitte à permuter k et k' , on peut supposer $k > k'$, on a donc $z^{2^{k-k'}} \cdot z^{2^{k'}} = z^{2^{k'}}$ ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} z^{2^{k'}} = 0 \text{ ou} \\ z^{2^{k-k'}} = 1 \end{cases}$$

Dans le premier cas, $|z| = 0$, dans le second, $|z|^{2^{k-k'}} = 1$ donc $|z| = 1$.

3. Soit z une racine de P , alors on a $P((z+1)^2) = P(z+1)P(z) = 0$ donc $(z+1)^2$ est racine de P .

Nous allons montrer que les seules racines possible de P sont j et j^2 avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On sait que si z est racine de P , alors z est de module 0 ou 1 et, comme $(z+1)^2$ est racine de P , le module de $(z+1)^2$ (donc celui de $(z+1)$ doit être 0 ou 1.

- Si $z = 0$ est racine de P , alors $(0+1)^2 = 1$ est racine de P donc $(1+1)^2 = 4$ est également racine de P or 4 n'est pas de module 0 ou 1, il ne peut donc être racine de P . Par conséquent, 0 ne peut être racine de P .
- Si z est racine de P et $|(z+1)^2| = 0$, alors $z = -1$ est racine de P donc $(-1+1)^2 = 0$ aussi or on vient de montrer que 0 n'est pas racine de P .
- On sait désormais que si z est racine de P , alors nécessairement $|z| = 1$ et $|(z+1)^2| = 1$ soit $|z+1| = 1$. Posons $z = x + iy$ avec x et y réels.

Alors $x^2 + y^2 = 1$ et $(x+1)^2 + y^2 = 1$ ce qui impose $x = -\frac{1}{2}$ et par suite $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $z = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$.

Les seules racines possibles de P sont donc j et j^2 .

- Le polynôme P étant à coefficients réels, la multiplicité de j en tant que racine de P est la même que celle de j^2 . Notons-la k , on a alors

$$P(X) = \lambda(X-j)^k(X-j^2)^k = \lambda(X^2 + X + 1)^k$$

et comme P est unitaire, P est une puissance de $X^2 + X + 1$

Correction 51 En évaluant en $X = 0$, on obtient $3P(0) = 0$ donc 0 est racine de P . En évaluant en $X = -1$, on obtient $2P(-1) = -P(0) = 0$ donc -1 est racine de P . En évaluant en $X = -2$, on obtient $P(-2) = -2P(-1) = 0$ donc -2 est racine de P .

On sait donc qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = X(X+1)(X+2)Q(X)$. En remplaçant dans l'équation fonctionnelle, on obtient $Q(X) = Q(X+1)$. Un polynôme vérifiant ceci est nécessairement constant. En effet, s'il ne l'est pas, il admet une racine α d'après le théorème de d'Alembert-Gauss. On a alors $\alpha+1$ racine de Q , puis $\alpha+2$ et, par une récurrence immédiate, $\alpha+n$ racine de Q pour tout entier n . Le polynôme Q possède alors une infinité de racines ce qui est absurde. Le polynôme Q est donc constant et P est de la forme $\lambda X(X+1)(X+2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, un polynôme de cette forme vérifie bien la relation donnée.

On peut aussi montrer que $0, -1$ et -2 sont les seules racines de P , s'il est non nul :

Si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-2, -1, 0\}$ et α n'est pas un entier négatif inférieur ou égal à -3 , alors

$$(\alpha+3)P(\alpha) = \alpha P(\alpha+1),$$

implique $\alpha+1$ racine de P (car $\alpha \neq 0$) puis

$$(\alpha+3+k)P(\alpha+k) = (\alpha+k)P(\alpha+k+1) = 0,$$

implique $P(\alpha+k+1) = 0$ car $\alpha+k+1 \neq 0$. On obtient donc une infinité de racines par récurrence sur k ce qui contredit P non nul.

On traite ensuite le cas où $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \leq -3$, on écrit

$$(\alpha+2)P(\alpha-1) = (\alpha-1)P(\alpha) = 0,$$

ce qui implique, comme $\alpha+2 \leq -4$, que $P(\alpha-1) = 0$. On a ensuite

$$(\alpha-k+2)P(\alpha-k-1) = (\alpha-k-1)P(\alpha-k) = 0,$$

qui implique $P(\alpha-k-1) = 0$ puisque $\alpha-k-2 \neq 0$. Ainsi, si α est racine $\alpha-k$ est racine pour tout k et on obtient à nouveau une contradiction.

On en déduit que P n'a que trois racines, il s'écrit donc: $P(X) = \lambda X^\alpha(X+1)^\beta(X+2)^\gamma$. En injectant dans l'équation fonctionnelle, on obtient

$$(X+3)X^\alpha(X+1)^\beta(X+2)^\gamma = X(X+1)^\alpha(X+2)^\beta(X+3)^\gamma.$$

Par unicité de la décomposition en facteurs irréductibles, on a :

$$\begin{cases} 1 &= \gamma \\ \alpha &= 1 \\ \beta &= \alpha \\ \gamma &= \beta \end{cases}$$

On a donc $\alpha = \beta = \gamma = 1$ donc $P(X) = \lambda X(X+1)(X+2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction 52 Le polynôme nul est solution. Soit P une solution non nulle. On note $a_n x^n$ son terme dominant. Le coefficient dominant de P' est na_n , celui de P'' est $n(n-1)a_n$. On a alors, en identifiant les coefficients dominants, $n^2(n-1)a_n^2 = 18a_n^2$ d'où $n = 3$. On pose $P = a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ et on identifie :

$$\begin{cases} 18a_3^2 &= 18a_3 \\ 18a_2a_3 &= 18a_2 \\ 4a_2^2 + 6a_1a_3 &= 18a_1 \\ 2a_2a_1 &= 18a_0 \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} a_3 = 1 \\ a_1 = \frac{a_2^2}{3} \\ a_0 = \frac{a_2^3}{27} \end{cases}$$

Les polynômes vérifiant l'équation fonctionnelle sont donc les polynômes de la forme :

$$X^3 + \lambda X^2 + \frac{\lambda^2}{3}X + \frac{\lambda^3}{27},$$

$\lambda \in \mathbb{R}$, ainsi que le polynôme nul.

Correction 53 1. Notons d le degré de P . Le polynôme P étant unitaire, le terme dominant de nP est nX^d , celui de $(X+1)P'$ est dX^d . On a donc $n = d$ et le terme dominant de P est X^n .

2. On écrit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, alors $P'(X) = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$. On a donc

$$\begin{aligned} (X+1)P' &= nP \Leftrightarrow (X+1) \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} \\ &= n \sum_{k=0}^n a_k X^k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n k a_k X^k + \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} \\ &= n \sum_{k=0}^n a_k X^k \end{aligned}$$

On fait un changement d'indice dans la deuxième somme du membre de gauche pour avoir des X^k (et non pas des X^{k-1}):

$$\sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} X^i = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$

d'où

$$\begin{aligned} (X+1)P' &= nP \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n k a_k X^k + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k = n \sum_{k=0}^n a_k X^k \\ \Leftrightarrow (a_1 - n a_0) &+ \left(\sum_{k=1}^{n-1} (k a_k + (k+1) a_{k+1} - n a_k) X^k \right) + (n a_n - n a_n) X^n = 0 \end{aligned}$$

Un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls, on a donc

$$\begin{cases} a_1 - n a_0 = 0 \\ k a_k + (k+1) a_{k+1} - n a_k, \forall k = 1..n-1 \end{cases}$$

3. D'après la question précédente, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a :

$$a_{k+1} = \frac{n-k}{k+1} a_k = \frac{(n-k)(n-k+1)}{(k+1)k} a_{k-1}$$

et par une récurrence immédiate,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{(n-k)(n-k+1) \dots (n-1)}{(k+1)k \dots 1} a_1 \\ &= \frac{(n-k)(n-k+1) \dots (n-1)n}{(k+1)k \dots 1} a_0 \\ &= \frac{n!}{n!} a_0 \\ &= \binom{n}{k+1} a_0 \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_0 X^k = a_0 (X+1)^n$$

4. On remarque tout d'abord que, de manière générale, si a est racine d'ordre k d'un polynôme non-nul, alors a est racine d'ordre $k-1$ de P' . Cela découle immédiatement de la caractérisation avec les dérivées. En effet, si a est racine d'ordre k , alors $P^{(i)}(a) = 0, \forall i < k$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$. Comme $(P')^{(j)} = P^{(j+1)}$, on a $\forall i < k-1, (P')^{(i)}(a) = 0$ et $(P')^{(k-1)}(a) = P^{(k)}(a) \neq 0$.

Supposons par l'absurde que P admette une racine a différente de -1 et notons k sa multiplicité. Alors $(X-a)^k$ divise P et $(X-a)^{k-1}$ divise P' , il existe donc $Q(X)$ et $T(X)$ tel que $P(X) = (X-a)^k Q(X)$ et $P'(X) = (X-a)^{k-1} T(X)$ avec $Q(a) \neq 0$ et $T(a) \neq 0$. En injectant dans l'égalité vérifiée par P , on obtient

$$\begin{aligned} (X-a)^k Q(X) &= (X-a)^{k-1} (X+1) T(X) \\ \Leftrightarrow (X-a) Q(X) &= (X+1) T(X) \\ \Rightarrow (a+1) T(a) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui est impossible. On a donc montré par l'absurde que l'unique racine de P est -1, ce qui assure que P s'écrit comme le produit d'une constante et du polynôme $(X+1)^n$.

Correction 54

Analyse : On suppose que P vérifie $P(X+1) - P(X) = X$. En dérivant deux fois l'égalité, on obtient $P''(X+1) = P''(X)$. Si P'' est non constant, il admet au moins une racine α . Par une récurrence immédiate, on en déduit que $\alpha + n$ est également racine $\forall n \in \mathbb{N}$ ce qui est impossible, on a donc P'' constant. Le polynôme P est donc de degré au plus 2.

Synthèse : Soit $P = aX^2 + bX + c$ tel que $P(X+1) - P(X) = X$. On a alors

$$a(X+1)^2 + b(X+1) + c - (aX^2 + bX + c) = X,$$

c'est-à-dire

$$2aX + (a+b) = X.$$

Par unicité des coefficients, on a $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

On en déduit que les polynômes vérifiant $P(X+1) - P(X) = X$ sont les polynômes de la forme $\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + c$ avec $c \in \mathbb{C}$.

On peut aussi raisonner comme Ghali :

Analyse : Soit P tel que $P(X+1) - P(X) = X$ alors pour tout entier k , $P(k+1) - P(k) = k$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on somme pour k variant de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (P(k+1) - P(k)) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

On reconnaît une somme télescopique, on a donc

$$P(n) = P(0) + \frac{n(n-1)}{2}.$$

On en déduit que le polynôme $P(X) - P(0) = \frac{X(X-1)}{2}$ a une infinité de racines (tous les entiers naturels) donc il est nul.

Synthèse : On suppose que P s'écrit $\frac{X(X-1)}{2} + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $P(X+1) - P(X) = \frac{X(X+1)}{2} - \frac{X(X-1)}{2} = X$. On en déduit que les polynômes vérifiant $P(X+1) - P(X) = X$ sont les polynômes de la forme $\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + c$ avec $c \in \mathbb{C}$.

Correction 55 1. On écrit

$$X(X^2 - 1) = X(X-1)(X+1)$$

et

$$X^2 + 1 = X^2 + X - (X-1) = X(X+1) - (X-1),$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{X^2 + 1}{X(X-1)(X+1)} &= \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X(X+1)} \\ &= \frac{1}{X-1} - \frac{X+1-X}{X(X+1)} \\ &= \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X} \end{aligned}$$

On peut aussi, bien entendu, chercher $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{X^2 + 1}{X(X^2 - 1)} = \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X-1} + \frac{\gamma}{X+1},$$

mettre au même dénominateur le membre de droite puis identifier les coefficients du numérateur.

2. On commence par écrire $X^3 + 2X^2 - X - 2 = (X-1)(X+1)(X+2)$. On cherche α, β, γ réels tels que

$$\frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{X+1} + \frac{\gamma}{X+2} = \frac{3X^2 + 3}{(X-1)(X+1)(X+2)}.$$

Par substitution, on trouve $\alpha = 1$, $\beta = -3$ et $\gamma = 5$.

3. On écrit $(X+1)^5 - X^5 - 1 = 5X^4 + 10X^3 + 10X^2 + 5X = 5X(X+1)(X^2 + X + 1)$, on a donc

$$\begin{aligned} \frac{5}{(X+1)^5 - X^5 - 1} &= \frac{1}{X(X+1)(X^2 + X + 1)} \\ &= \frac{X^2 + X + 1 - X(X+1)}{X(X+1)(X^2 + X + 1)} \\ &= \frac{1}{X(X+1)} - \frac{1}{X^2 + X + 1}, \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{X+1-X}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}.$$

On a donc

$$\frac{5}{(X+1)^5 - X^5 - 1} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X^2 + X + 1}.$$

$$4. \frac{X^2 + 1}{X^2 + 4} = 1 - \frac{3}{X^2 + 4}.$$

Correction 56 1. On pose $u = \sin t$, on a $du = \cos t dt$ donc

$$\int^x \frac{\cos^3 t + \cos^5 t}{\sin^2 t + \sin^4 t} dt = \int^{\sin x} \frac{(1-u^2) + (1-u^2)^2}{u^2 + u^4} du.$$

On écrit

$$\begin{aligned} \frac{(1-u^2) + (1-u^2)^2}{u^2 + u^4} &= \frac{2-3u^2+u^4}{u^2(u^2+1)} \\ &= \frac{u^2(u^2+1)}{u^4+u^2+2-4u^2} \\ &= \frac{u^2(u^2+1)}{2-4u^2} \\ &= 1 + \frac{u^2(u^2+1)}{2+2u^2-6u^2} \\ &= 1 + \frac{u^2(u^2+1)}{2-4u^2} \\ &= 1 + \frac{1}{u^2} - \frac{6}{u^2+1} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int^{\sin x} \frac{(1-u^2) + (1-u^2)^2}{u^2 + u^4} du &= \int^{\sin x} \left(1 + \frac{1}{u^2} - \frac{6}{u^2+1} \right) du \\ &= \left[u - \frac{1}{u} - 6 \arctan(u) \right]^{\sin x} \\ &= \sin(x) - \frac{1}{\sin(x)} - 6 \arctan(\sin x) \end{aligned}$$

2. On pose $u = \cos t$, $du = -\sin t dt$ et

$$\int^x \frac{\sin^3 t}{1 + \cos x} dt = \int^{\cos x} \frac{u^2 - 1}{1 + u} du = \int^{\cos x} (u - 1) du = \frac{\cos^2 x}{2} - \cos x$$

3. On écrit $\int^x \frac{\cos t - \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \int^x \frac{\cos t}{1 + \cos^2 t} dt + \int^x \frac{-\sin t}{1 + \cos^2 t} dt$

On a

$$\int^x \frac{-\sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \left[\frac{1}{2} \ln(1 + \cos^2 t) \right]^x = \frac{1}{2} \ln(1 + \cos^2 x)$$

Dans la première intégrale, on pose $u = \sin t$, on a $du = \cos t dt$ donc

$$\int^x \frac{\cos t}{1 + \cos^2 t} dt = \int^{\sin x} \frac{1}{2 - u^2} du.$$

On écrit

$$\frac{1}{2 - X^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2} - X} + \frac{1}{\sqrt{2} + X} \right).$$

On a donc

$$\int^{\sin x} \frac{1}{2 - u^2} du = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln(\sqrt{2} + u) - \ln(\sqrt{2} - u) \right]^{\sin x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sin x}{\sqrt{2} - \sin x} \right).$$

On a donc

$$\int^x \frac{\cos t - \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sin x}{\sqrt{2} - \sin x} \right) + \frac{1}{2} \ln(1 + \cos^2 x)$$