

Devoir d'entraînement 6 .

Exercice 1.

(commun)

Trois joueurs A, B et C s'affrontent au Paintball. Le jeu se déroule en une succession d'affrontements de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins deux des trois joueurs :

- Tous les tirs du tournoi se passent de la même manière et de façons mutuellement indépendantes.
- Lorsque le joueur A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $2/3$.
- Lorsque le joueur B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $1/2$.
- Lorsque le joueur C tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $1/3$.
- Lorsque l'un des joueurs est touché, il est définitivement éliminé des affrontements suivants.
- À chaque affrontement, les joueurs non encore éliminés tirent simultanément et chacun d'eux vise le plus dangereux de ses rivaux non encore éliminés (ainsi, lors du premier affrontement, A vise B tandis que B et C visent A).

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les évènements suivants :

- ABC_n : " A l'issue du $n^{\text{ème}}$ affrontement, A, B et C ne sont pas encore éliminés. "
- AB_n : " A l'issue du $n^{\text{ème}}$ affrontement, seuls A et B ne sont pas encore éliminés. "
(On définit de façon analogue BC_n et AC_n)
- A_n : " A l'issue du $n^{\text{ème}}$ affrontement, seul A n'est pas encore éliminé "
(On définit de façon analogue B_n et C_n)
- 0_n : " A l'issue du $n^{\text{ème}}$ affrontement, A, B et C sont éliminés "

On remarquera que ABC_0 est l'évènement certain, et AB_0 , AC_0 , BC_0 , A_0 , B_0 , C_0 et 0_0 l'évènement impossible $\emptyset$.

PARTIE I : Le premier affrontement

On désigne par R_A (respectivement R_B et R_C) l'évènement : " A (respectivement B et C) réussit son premier tir ".

1. Calculer $P(R_B \cup R_C)$.
2. (a) Montrer que la probabilité pour qu'au premier affrontement " A rate son tir " et " B ou C réussissent leur tir " est égale à $2/9$.
(b) Déterminer de même la probabilité pour qu'au premier affrontement " A réussisse son tir " et " B ou C réussissent leur tir ".

PARTIE II : Probabilités conditionnelles

3. (a) Montrer que $(ABC_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'évènements, c'est-à-dire que : $\forall n \in \mathbb{N}, ABC_{n+1} \subset ABC_n$
- (b) En est-il de même des suites $(BC_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(AC_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- (c) Expliquer pourquoi C ne peut pas être le premier à être éliminé. En déduire $P(AB_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Justifier que $P_{ABC_n}(ABC_{n+1}) = 1/9$
- (b) Compléter le tableau suivant:

V	0_{n+1}	A_{n+1}	B_{n+1}	C_{n+1}	AB_{n+1}	BC_{n+1}	AC_{n+1}	ABC_{n+1}
$P_{ABC_n}(V)$								
$P_{AC_n}(V)$								
$P_{BC_n}(V)$								

- (c) Expliquer en quoi ce tableau permet de vérifier la cohérence de vos résultats.

PARTIE III : Suite du tournoi

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n l'évènement : "le tournoi n'est pas terminé à l'issue du $n^{\text{ème}}$ affrontement".

- (a) Calculer $P(U_1)$
- (b) i. Pour $n \geq 1$, calculer $P(ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_n)$.
 ii. En déduire à l'aide de la question 3 la valeur de $P(ABC_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Pour $n \geq 1$, on pose
- $E_{0,n} = AC_1 \cap AC_2 \cap \dots \cap AC_n$ et
 - $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,
 $E_{k,n} = ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_k \cap AC_{k+1} \cap AC_{k+2} \cap \dots \cap AC_n$
- (d) i. Calculer $P(E_{k,n})$, $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $n \geq 1$.
 ii. Exprimer AC_n en fonction des $E_{k,n}$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $n \geq 1$.
 iii. En déduire que $P(AC_n) = 2 \left(\left(\frac{2}{9} \right)^n - \left(\frac{1}{9} \right)^n \right)$ pour $n \in \mathbb{N}$ en utilisant la question 5(b)ii
- (e) Pour $n \geq 1$, on pose maintenant
- $F_{0,n} = BC_1 \cap BC_2 \cap \dots \cap BC_n$ et
 - $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,
 $F_{k,n} = ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap BC_{k+2} \cap \dots \cap BC_n$
- i. Calculer $P(F_{k,n})$, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $n \geq 1$.
 ii. En déduire $P(BC_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (f) À l'aide des questions 5(b)ii, 5(d)iii et 5(e)ii, en déduire que

$$\forall n \geq 1, P(U_n) = (1/3)^n + 2 \left((2/9)^n - (1/9)^n \right).$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $GA(n)$ l'évènement : "A gagne le tournoi à l'issue du $n^{\text{ème}}$ affrontement".
7. (a) calculer $P(GA(1))$.
 (b) Pour tout $n \geq 2$, exprimer $GA(n)$ en fonction de AC_{n-1} et de A_n .
 En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(GA(n)) = 4(2/9)^n (1 - (1/2)^{n-1})$$
8. (a) En s'inspirant de ce qui précède calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que B gagne le tournoi à l'issue du $n^{\text{ème}}$ affrontement.
 (b) Déterminer enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que C gagne le tournoi à l'issue du $n^{\text{ème}}$ affrontement.

Exercice 2. (sujet 1)

1. Soit f la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x-1}$.
 (a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 1. On note encore f son prolongement continu.
 (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donnez l'équation de la tangente en $x = 1$.
 (c) Quelle est la position locale de la tangente par rapport au graphe de la courbe?

Exercice 3. (sujet 2)

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^{x^2} \end{cases}$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que f^{-1} admet un DL à tout ordre en 0
3. Déterminer un DL4 en 0 de f^{-1} .

Exercice 4. (sujet 1)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x\sqrt{1 + \frac{x}{n}} = 1$.

Dans toute la suite de l'exercice, on note a_n l'unique réel positif tel que $a_n\sqrt{1 + \frac{a_n}{n}} = 1$.

2. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq a_n \leq 1$.
 (b) En déduire que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Indice : on pourra remarquer que $a_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a_n}{n}}}$.

3. (a) A l'aide d'un DL, montrer que pour $n \rightarrow +\infty$, on a : $a_n = 1 - \frac{a_n^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
 (b) En déduire : $a_n = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
 (c) Déterminer un équivalent simple de $\ln(a_n)$.

4. Déterminer une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $a_n = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{C}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 5.

On pose pour tout $x > 1$, $\zeta(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x}$.

$\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

Objectif:

Le but du problème est de calculer les valeurs de $\zeta(2k)$ ou k est un entier non nul.

On dit qu'une suite (B_n) de $\mathbb{R}[X]$ est une suite de polynômes de Bernoulli si elle vérifie les propriétés suivantes :

$$(P_1) \quad \begin{cases} \bullet B_0 = 1 \\ \bullet \forall n \in \mathbb{N}, B'_{n+1} = B_n \\ \bullet \forall n \geq 2, B_n(0) = B_n(1) \end{cases}.$$

Polynômes et nombre de Bernoulli

1. Soit (B_n) une suite de polynômes de Bernoulli.

(a) Montrer que nécessairement $B_1 = X - \frac{1}{2}$ et $B_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12}$.

(b) Déterminer B_3 et B_4 .

2. Le but de cette question est de montrer qu'il existe une et une seule suite de polynômes qui vérifie les propriétés (P_1) .

(a) Si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, montrer qu'il existe un et un seul polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $Q' = P$ et $\int_0^1 Q(t) dt = 0$.

On note alors L l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ qui à P associe Q .

(b) Montrer qu'une suite de polynômes vérifie les propriétés (P_1) si et seulement si elle vérifie les propriétés suivantes notées (P_2) .

- $B_0 = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = L(B_n)$.

(c) En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes qui vérifie les propriétés (P_1) .

On notera désormais cette suite (B_n) et on l'appellera **la** suite de polynômes de Bernoulli.

3. Dédurre de la question 2 que, pour tout entier naturel n , $B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$.

4. On pose, pour tout n , $b_n = B_n(0)$; b_n s'appelle le $(n + 1)$ -ième nombre de Bernoulli.

(a) Calculer b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 .

(b) Montrer que pour tout entier impair $n \geq 3$, $b_n = 0$.

à partir de là, c'était uniquement dans le sujet 2.

Application au calcul de $\zeta(2k)$

Soit k un entier naturel non nul.

5. On pose $\alpha_0(k) = \int_0^1 B_{2k}(t) dt$. Calculer $\alpha_0(k)$.

6. On pose $\forall n \geq 1, \alpha_n(k) = 2 \int_0^1 B_{2k}(t) \cos(2\pi nt) dt$

(a) Montrer que $\forall n \geq 1, \alpha_n(1) = \frac{2}{(2\pi n)^2}$.

(b) Montrer que $\forall n \geq 1, \forall k \geq 2, \alpha_n(k) = -\frac{1}{(2\pi n)^2} \alpha_n(k-1)$.

(c) En déduire la valeur de $\alpha_n(k)$ pour tout $n, k \geq 1$.

On admet que pour tout $x \in [0, 2\pi[$, on a

$$B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\alpha_0(k) + \sum_{n=1}^N \alpha_n(k) \cos(nx) \right)$$

7. (a) Déterminer, pour $k \geq 1$, une relation entre $\zeta(2k)$ et b_{2k} .

(b) Calculer $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^4}$.

Correction du DS n 0

Exercice 1 1. On a :

$$P(R_B \cup R_C) = P(R_B) + P(R_C) - P(R_B \cap R_C) = P(R_B) + P(R_C) - P(R_B)P(R_C)$$

car les événements sont indépendants. On a donc

$$P(R_B \cup R_C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Il est impératif de dire que les événements sont indépendants pour justifier le passage "proba de l'intersection" à "produit des probas"

2. (a) On cherche à calculer $P(\overline{R}_A \cap (R_B \cup R_C))$. À nouveau, les événements sont indépendants donc

$$P(\overline{R}_A \cap (R_B \cup R_C)) = P(\overline{R}_A) P(R_B \cup R_C) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

On retrouve bien le résultat demandé.

- (b) On cherche à calculer $P(R_A \cap (R_B \cup R_C))$. On utilise, à nouveau, le fait que les événements sont indépendants. On obtient :

$$P(R_A \cap (R_B \cup R_C)) = P(R_A) P(R_B \cup R_C) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

La probabilité recherchée est $\frac{4}{9}$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si ABC_{n+1} est réalisé, aucun des trois joueurs n'a été éliminé au $(n+1)$ -ième affrontements, ce qui signifie qu'aucun des trois joueurs n'étaient éliminés au n -ième tour donc l'évènement ABC_n est réalisé. On a donc bien $ABC_{n+1} \subset ABC_n$, la suite est donc décroissante.

Attention !!! Montrer que $P(ABC_{n+1}) \leq P(ABC_n)$ ne garantit pas l'inclusion, on a seulement l'implication dans l'autre sens.

- (b) La situation est différente pour les suites $(BC_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(AC_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En effet, si deux joueurs ne sont pas éliminés au $(n+1)$ -ième tour, cela ne signifie pas qu'ils n'étaient pas trois au tour précédent. On n'a donc pas nécessairement $BC_{n+1} \subset BC_n$, on ne peut rien dire de la monotonie de ces suites.
- (c) On sait que tant que les trois joueurs sont actifs, A tire sur B et B tire sur A donc, a priori, C ne peut être éliminé¹. On a donc $P(AB_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
4. (a) On suppose que ABC_n est réalisé, alors la probabilité que ABC_{n+1} soit réalisé est égale à la probabilité que les trois joueurs ratent leur tir. On a donc

$$P_{ABC_n}(ABC_{n+1}) = P(\overline{R_A} \cap \overline{R_B} \cap \overline{R_C}).$$

Les événements $\overline{R_A}, \overline{R_B}$ et $\overline{R_C}$ sont indépendants car R_A, R_B et R_C le sont donc

$$P(\overline{R_A} \cap \overline{R_B} \cap \overline{R_C}) = P(\overline{R_A})P(\overline{R_B})P(\overline{R_C}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}.$$

On a donc bien $P_{ABC_n}(ABC_{n+1}) = \frac{1}{9}$.

- (b) On calcule les différentes probabilités.

- On a vu, à la question 3c, que le joueur C ne peut pas être le premier à être éliminé, on en déduit que

$$P_{ABC_n}(0_n) = P_{ABC_n}(A_n) = P_{ABC_n}(B_n) = P_{ABC_n}(AB_n) = 0.$$

Calculons $P_{ABC_n}(C_{n+1})$. Cela revient à calculer la probabilité de l'évènement $R_A \cap (R_B \cup R_C)$. Nous avons déjà calculé cette probabilité, elle vaut

$$P_{ABC_n}(C_{n+1}) = \frac{4}{9}.$$

Pour calculer la probabilité $P_{ABC_n}(BC_{n+1})$, il faut calculer la probabilité de l'évènement $\overline{R_A} \cap (R_B \cap R_C)$ et, à nouveau, on a déjà calculé cette probabilité, elle vaut

$$P_{ABC_n}(BC_{n+1}) = \frac{2}{9}.$$

¹bon, là on pourrait se demander si C ne peut pas être atteint par un joueur qui ne le vise pas et rate son tir mais visiblement, celui qui a conçu le problème n'a pas envisagé cette possibilité :-)

Pour calculer la probabilité $P_{ABC_n}(AC_{n+1})$, il faut calculer la probabilité de l'évènement $R_A \cap \overline{R_B} \cap \overline{R_C}$. Les évènements étant indépendants, on a

$$P_{ABC_n}(AC_{n+1}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

On peut ainsi remplir la première ligne du tableau.

- On veut maintenant calculer la probabilité sachant AC_n . Si seuls A et C sont encore en jeu, toutes probabilités impliquant la présence de B au $n + 1$ -ième tour sont nulles donc

$$P_{AC_n}(B_{n+1}) = P_{AC_n}(AB_{n+1}) = P_{AC_n}(BC_{n+1}) = P_{AC_n}(ABC_{n+1}) = 0.$$

Calculons la probabilité $P_{AC_n}(0_{n+1})$. Cela revient à calculer la probabilité de $R_A \cap R_C$ et, comme les évènements sont indépendants, on a

$$P_{AC_n}(0_{n+1}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

Calculons la probabilité $P_{AC_n}(A_{n+1})$. Cela revient à calculer la probabilité de $R_A \cap \overline{R_C}$ et, comme les évènements sont indépendants, on a

$$P_{AC_n}(A_{n+1}) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Calculons la probabilité $P_{AC_n}(C_{n+1})$. Cela revient à calculer la probabilité de $\overline{R_A} \cap R_C$ et, comme les évènements sont indépendants, on a

$$P_{AC_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Enfin, pour calculer $P_{AC_n}(AC_{n+1})$, on calcule la probabilité de $\overline{R_A} \cap \overline{R_C}$. On a donc

$$P_{AC_n}(AC_{n+1}) = \frac{2}{9}.$$

- On veut maintenant calculer la probabilité sachant BC_n . Si seuls B et C sont encore en jeu, toutes probabilités impliquant la présence de A au $n + 1$ -ième tour sont nulles donc

$$P_{BC_n}(A_{n+1}) = P_{BC_n}(AB_{n+1}) = P_{BC_n}(AC_{n+1}) = P_{BC_n}(ABC_{n+1}) = 0.$$

Calculons la probabilité $P_{BC_n}(0_{n+1})$. Cela revient à calculer la probabilité de $R_B \cap R_C$ et, comme les évènements sont indépendants, on a

$$P_{BC_n}(0_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Calculons la probabilité $P_{BC_n}(B_{n+1})$. Cela revient à calculer la probabilité de $R_B \cap \overline{R_C}$ et, comme les évènements sont indépendants, on a

$$P_{BC_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Calculons la probabilité $P_{BC_n}(C_{n+1})$. Cela revient à calculer la probabilité de $\overline{R_B} \cap R_C$ et, comme les événements sont indépendants, on a

$$P_{BC_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Enfin, pour calculer $P_{BC_n}(BC_{n+1})$, on calcule la probabilité de $\overline{R_B} \cap \overline{R_C}$. On a donc

$$P_{BC_n}(BC_{n+1}) = \frac{1}{3}.$$

On a donc le tableau suivant :

V	0_{n+1}	A_{n+1}	B_{n+1}	C_{n+1}	AB_{n+1}	BC_{n+1}	AC_{n+1}	ABC_{n+1}
$P_{ABC_n}(V)$	0	0	0	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
$P_{AC_n}(V)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{2}{9}$	0
$P_{BC_n}(V)$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0

(c) On remarque que la somme sur chaque ligne donne 1, ce qui montre que les résultats que nous avons trouvés sont cohérents car l'ensemble des événements des différentes colonnes forme un système complet d'événements.

5. (a) On sait que A tire sur B et les deux autres tirent sur A . Le tournoi sera donc terminé si seul C reste en jeu. La probabilité pour que le tournoi soit terminé est donc égale à la probabilité pour que A et B soient éliminés ce qui correspond à la probabilité $P(C_1) = P_{ABC_0}(C_1) = \frac{4}{9}$.

On en déduit que $P(U_1) = 1 - P_{ABC_0}(C_1) = \frac{5}{9}$

- (b) i. On utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} &P(ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_n) \\ &= P(ABC_1)P_{ABC_1}(ABC_2) \dots P_{ABC_1 \cap \dots \cap ABC_{n-1}}(ABC_n). \end{aligned}$$

On a $P(ABC_1) = P(\overline{R_A} \cap \overline{R_B} \cap \overline{R_C}) = \frac{1}{9}$ et $P_{ABC_1 \cap \dots \cap ABC_{k-1}}(ABC_k) = P_{ABC_{k-1}}(ABC_k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Toutes les probabilités conditionnelles sont donc égales, d'après le tableau, à $\frac{1}{9}$.

On a donc :

$$P(ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_n) = \left(\frac{1}{9}\right)^n.$$

C'est là qu'on commencé les formules folkloriques avec des produits de probas qui ne correspondent ni à la formule des probas composées, ni à celle du produit des probas d'événements indépendants (on ne sait pas du tout si les ABC_k le sont et, de fait, ils ne le sont pas !!!

ii. On a vu à la question 3 que la suite $(ABC_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. On a donc

$$ABC_1 \cap ABC_2 \cap \dots \cap ABC_n = ABC_n.$$

$$\text{On a donc } P(ABC_n) = \frac{1}{9^n}.$$

(c) question à beaucoup de points :-)

(d) i. On applique, à nouveau, la formule des probabilités totales.

$$P(E_{0,n}) = P(AC_1).P_{AC_1}(AC_2) \dots P_{AC_1 \cap \dots \cap AC_{n-1}}(AC_n).$$

On a $P(AC_1) = P(R_A \cap \overline{R}_B \cap \overline{R}_C) = \frac{2}{9}$. Les probabilités conditionnelles suivantes correspondent à $P_{AC_n}(AC_{n+1}) = \frac{2}{9}$.

On a donc

$$P(E_{0,n}) = \left(\frac{2}{9}\right)^n.$$

Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, alors

$$\begin{aligned} & P(E_{k,n}) \\ = & P(ABC_1).P_{ABC_1}(ABC_2) \dots P_{ABC_1 \cap \dots \cap ABC_{k-1}}(ABC_k)P_{ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k}(AC_{k+1}) \dots \\ & \dots P_{ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap AC_{k+1} \cap \dots \cap AC_{n-1}}(AC_n) \\ = & \underbrace{P(ABC_1).P_{ABC_1}(ABC_2) \dots P_{ABC_{k-1}}(ABC_k)}_{\frac{1}{9} \times \dots \times \frac{1}{9}} \underbrace{P_{ABC_k}(AC_{k+1}) \dots P_{AC_{n-1}}(AC_n)}_{\frac{2}{9} \times \dots \times \frac{2}{9}} \\ = & \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

Cette formule étant valable pour $k = 0$ d'après le calcul fait au début de la question, on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P(E_{k,n}) = \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k}.$$

ii. Si à l'issue du n -ième affrontement, il ne reste que A et C , cela signifie que B a été éliminé au cours d'un des affrontements précédents. On a donc :

$$AC_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} E_{k,n}.$$

iii. Les évènements étant incompatibles, on en déduit que la réunion est disjointe donc :

$$\begin{aligned} P(E_{kn}) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^{n-k} \\ &= \left(\frac{2}{9}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{9}{2}\right)^k \\ &= \left(\frac{2}{9}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \left(\frac{2}{9}\right)^n \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{2}{9}\right)^n \times 2 \times \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \\ &= 2 \left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right) \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat donné dans l'énoncé.

- (e) i. On procède comme dans la question précédente.

On a

$$F_{0,n} = BC_1 \cap \dots \cap BC_n.$$

On utilise la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned} P(F_{0,n}) &= P(BC_1)P_{BC_1}(BC_2) \dots P_{BC_1 \cap \dots \cap BC_{n-1}}(BC_n) \\ &= P(BC_1)P_{BC_1}(BC_2) \dots P_{BC_{n-1}}(BC_n) \\ &= \frac{2}{9} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} &P(F_{k,n}) \\ &= P(ABC_1)P_{ABC_1}(ABC_2) \dots P_{ABC_1 \cap \dots \cap ABC_{k-1}}(ABC_k)P_{ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k}(BC_{k+1}) \dots \\ &\quad \dots P_{ABC_1 \cap \dots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \dots BC_{n-1}}(BC_n) \\ &= P(ABC_1)P_{ABC_1}(ABC_2) \dots P_{ABC_{k-1}}(ABC_k)P_{ABC_k}(BC_{k+1}) \dots P_{BC_{n-1}}(BC_n) \\ &= \frac{1}{9} \times \dots \times \frac{1}{9} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{3} \times \dots \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{9} \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1}. \end{aligned}$$

À nouveau, on se rend compte que cette formule est valable pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

- ii. On écrit $BC_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} F_{k,n}$. Les évènements sont incompatibles donc

$$\begin{aligned} P(BC_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{9} \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1} \\ &= \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{-k} \\ &= \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3^n} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{9^n} \end{aligned}$$

- (f) On remarque que le tournoi n'est pas terminé à l'issue du n -ième affrontement s'il reste deux ou trois joueurs encore en jeu. On sait que C ne peut être le premier éliminé, on a donc

$$U_n = ABC_n \cup BC_n \cup AC_n.$$

Les évènements sont incompatibles, la probabilité de U_n est donc la somme des probabilités. En utilisant les résultats des questions précédentes, on obtient :

$$P(u_n) = \frac{1}{9^n} + 2 \left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right) + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{9^n} = 2 \left(\left(\frac{2}{9}\right)^n - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right) + \frac{1}{3^n},$$

ce qui est précisément le résultat donné dans l'énoncé.

6. question bonus

7. (a) "GA(1)" est réalisé si B et C sont éliminés au cours du premier affrontement ce qui est impossible car personne ne tire sur C . On a donc $P(GA(1)) = 0$.
- (b) On sait que C ne peut être le premier éliminé donc si A gagne, cela signifie qu'il était seuls avec C au tour précédent et qu'il a éliminé C . Autrement dit,

$$GA(n) = AC_{n-1} \cap A_n.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} P(GA(n)) &= P(AC_{n-1})P_{AC_{n-1}}(A_n) = 2 \left(\left(\frac{2}{9} \right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9} \right)^{n-1} \right) \times \frac{4}{9} \\ &= \frac{8}{9} \left(\left(\frac{2}{9} \right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9} \right)^{n-1} \right) \\ &= 4 \left(\frac{2}{9} \right)^n - 8 \left(\frac{1}{9} \right)^n \\ &= 4 \left(\frac{2}{9} \right)^n \left(1 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) \\ &= 4 \left(\frac{2}{9} \right)^n \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) \end{aligned}$$

On retrouve la probabilité donnée dans l'énoncé.

8. (a) On procède de même en remarquant que si B gagne, il était seul avec C au tour précédent. On a donc :

$$\begin{aligned} P(GB(n)) &= P(BC_{n-1})P_{BC_{n-1}}(B_n) = \left(\left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9} \right)^{n-1} \right) \times \frac{1}{3} \\ &= \left(\frac{1}{3} \right)^n - 3 \left(\frac{1}{9} \right)^n \end{aligned}$$

La probabilité que B gagne le tournoi à l'issue du n -ième affrontement est

$$P(GB(n)) = \left(\frac{1}{3} \right)^n - 3 \left(\frac{1}{9} \right)^n.$$

- (b) Pour ce qui est de l'évènement $GC(n)$, il y a plusieurs cas possibles. En effet, C peut gagner après avoir été seul avec A ou B ou bien, il peut gagner alors que les trois joueurs étaient encore présents et A et B se sont touchés mutuellement.

Autrement dit $GC(n) = (ABC_{n-1} \cap C_n) \cup (AC_{n-1} \cap C_n) \cup (BC_{n-1} \cap C_n)$. Les évènements sont incompatibles, on a donc

$$\begin{aligned} &P(GC(n)) \\ &= P(ABC_{n-1})P_{ABC_{n-1}}(C_n) + P(BC_{n-1})P_{BC_{n-1}}(C_n) + P(AC_{n-1})P_{AC_{n-1}}(C_n) \\ &= \frac{4}{9} \left(\frac{2}{9} \right)^{n-1} + \frac{1}{9} \times 2 \left(\left(\frac{1}{9} \right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9} \right)^{n-1} \right) + \frac{1}{6} \left(\left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} - \left(\frac{1}{9} \right)^{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} \right)^n + \left(\frac{2}{9} \right)^n \end{aligned}$$

La probabilité que C gagne le tournoi à l'issue du n ième affrontement est

$$P(GC(n)) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} \right)^n + \left(\frac{2}{9} \right)^n.$$

On vérifie que pour $n = 1$, on obtient $\frac{4}{9}$ qui correspond à la probabilité $P_{ABC_0}(C_1)$.

Exercice 2 1. (a) On a $\ln(x) = \ln(1 + (x - 1)) \underset{1}{\sim} x - 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$. On peut donc prolonger par continuité f en posant $f(1) = 1$.

(b) On va calculer un DL de f en 1. On pose $x = 1 + h$. On a

$$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{1}{h} \left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3) \right)$$

donc

$$f(x) = 1 - \frac{(x-1)}{2} + \frac{(x-1)^2}{3} + o((x-1)^2).$$

On en déduit que f admet un DL1 en 1 donc elle est dérivable. De plus, l'équation de la tangente est $y = 1 - \frac{(x-1)}{2} = \frac{3-x}{2}$.

On peut aussi déterminer la limite du taux d'accroissement (mais il faudra travailler à nouveau pour la question suivante).

On a

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{\ln(x) - (x-1)}{(x-1)^2}$$

On pose $h = x - 1$, on a $\frac{\ln(x) - (x-1)}{(x-1)^2} = \frac{\ln(1+h) - h}{h^2}$. On a donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - (x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - h}{h^2} = -\frac{1}{2}.$$

On en déduit que f est dérivable en 1 et $f'(1) = -\frac{1}{2}$. L'équation de la tangente en 1 est donc $y = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 - \frac{1}{2}(x-1)$ et on retrouve le même résultat.

(c) On a vu avec le DL2 de f que $f(x) - \left(1 + \frac{(x-1)}{2}\right) \underset{1}{\sim} \frac{(x-1)^2}{3}$ donc, localement, le graphe de f est au-dessus de la tangente.

Attention, c'est un résultat local ! Ne me dites pas que c'est toujours positif

2.

Exercice 3 1. f est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2}$ donc f est strictement croissante. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, f est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée ne s'annule pas donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Elle admet donc un DL à tout ordre en 0.

La plupart d'entre vous m'ont dit que f était $\mathcal{C}^\infty$ donc f^{-1} aussi ce qui est faux, il faut, pour que f^{-1} soit dérivable, que la dérivée de f ne s'annule pas!

3. On commence par déterminer un DL4 de f en 0:

$$f(x) = x(1 + x^2 + o(x^3)) = x + x^3 + o(x^4).$$

On a $f(x) \sim x$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Comme $f(0) = 0$ et f continue, on a, par changement de variable $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y)}{y} = 1$ donc $f^{-1}(y) \underset{0}{\sim} y$.

On écrit maintenant $f \circ f^{-1}(x) = x$ donc

$$x = f^{-1}(x)e^{(f^{-1}(x))^2} = f^{-1}(x) + f^{-1}(x)^3 + o\left(f^{-1}(x)\right)^3,$$

car $f^{-1}(x) \rightarrow 0$. On a donc $x - f^{-1}(x) \underset{0}{\sim} (f^{-1}(x))^3$ puis $x - f^{-1}(x) \underset{0}{\sim} x^3$ puisque $f^{-1}(x) \underset{0}{\sim} x$.

On en déduit que

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + o(x^3).$$

Comme f est impaire, f^{-1} l'est aussi donc

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + o(x^4).$$

Il est aussi possible de dire que f^{-1} admet un DL4 en 0 d'après la question précédente et, comme $f(0) = 0$, il est de la forme

$$f^{-1}(x) = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + o(x^4).$$

On a $x = f^{-1}(f(x))$ donc

$$x = a(x + x^3 + o(x^4)) + b(x^2 + 2x^4 + o(x^4)) + c(x^3 + o(x^4)) + d(x^4 + o(x^4)).$$

Comme $x = x + o(x^4)$, par unicité du DL, on peut identifier:

$$\begin{cases} a &= 1 \\ b &= 0 \\ a + c &= 0 \\ 2b + d &= 0 \end{cases}$$

On retrouve

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + o(x^4).$$

Exercice 4 1. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On pose la fonction $f_n : x \mapsto x\sqrt{1 + \frac{x}{n}}$, définie sur $\mathbb{R}_+$. Tout se ramène donc à montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(x) = 1$. La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par produit et composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, et pour tout $x \geq 0$, on a :

$$f'_n(x) = \sqrt{1 + \frac{x}{n}} + x \cdot \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{1 + \frac{x}{n}}} > 0$$

f_n est donc strictement croissante. On a de plus $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

f_n est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection entre $[0, +\infty[$ et $[0, +\infty[$. Comme 1 appartient à l'intervalle image $[0, +\infty[$, il admet un unique antécédent par f_n dans $\mathbb{R}_+$. On appelle cet antécédent a_n .

x	0	a_n	$+\infty$
f_n	0	1	$+\infty$

2. (a) On a $0 \leq a_n$, par définition de a_n . Montrons maintenant que $a_n \leq 1$. Comme f_n est strictement croissante, c'est équivalent à montrer que $f_n(a_n) \leq f_n(1)$, c'est-à-dire que $1 \leq f_n(1)$. Or :

$$f_n(1) = 1\sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

Comme $\frac{1}{n} \geq 0$, on a $1 + \frac{1}{n} \geq 1$, et donc $f_n(1) \geq 1$.

Conclusion : on a bien $a_n \leq 1$.

(b) Par définition, on a $a_n \sqrt{1 + \frac{a_n}{n}} = 1$ et donc $a_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a_n}{n}}}$.

Or, $0 \leq a_n \leq 1$, donc $0 \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Par le théorème des gendarmes, on a $\frac{a_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $\sqrt{1 + \frac{a_n}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Et donc $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 1$.

3. (a) On repart de $a_n \sqrt{1 + \frac{a_n}{n}} = 1$.

Or, $\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + o(x)$. La quantité $\frac{a_n}{n}$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$, donc :

$$\sqrt{1 + \frac{a_n}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{a_n}{2n} + o\left(\frac{a_n}{n}\right)$$

et donc la relation $a_n \sqrt{1 + \frac{a_n}{n}} = 1$ donne :

$$a_n \left[1 + \frac{a_n}{2n} + o\left(\frac{a_n}{n}\right) \right] = 1 \quad \text{c'est-à-dire :} \quad a_n + \frac{a_n^2}{2n} + o\left(\frac{a_n^2}{n}\right) = 1$$

$$\text{c'est-à-dire :} \quad a_n = 1 - \frac{a_n^2}{2n} + o\left(\frac{a_n^2}{n}\right)$$

Et comme $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, on a $a_n \sim 1$, et donc $\frac{a_n^2}{n} \sim \frac{1}{n}$. D'où $o\left(\frac{a_n^2}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$. On obtient donc bien :

$$a_n = 1 - \frac{a_n^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

(b) On a $a_n^2 \sim 1$, donc $a_n^2 = 1 + o(1)$. D'où :

$$\begin{aligned} a_n &= 1 - \frac{1 + o(1)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

(c) On applique la fonction logarithme à la relation précédente :

$$\ln(a_n) = \ln\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

et on utilise la relation $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$ sur $x_n := -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$:

$$\ln(a_n) = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{D'où : } \boxed{\ln(a_n) \sim -\frac{1}{2n}}$$

4. On repart de $a_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a_n}{n}}} = \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Or :

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2}x^2 + o(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$$

Donc :

$$a_n = 1 - \frac{a_n}{2n} + \frac{3}{8} \frac{a_n^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or :

- on a $a_n = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $\frac{a_n}{2n} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$;
- $\frac{a_n^2}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$, donc $\frac{a_n^2}{n^2} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

D'où :

$$\begin{aligned} a_n &= 1 - \left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] + \left[\frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{5}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité voulue, en posant $C := \frac{5}{8}$.

Exercice 5 Polynômes et nombre de Bernoulli

1. Soit (B_n) une suite de polynômes de Bernoulli.

- (a) On a $B'_1 = B_0 = 1$ donc B_1 est de la forme $X + b$. Par ailleurs, on a $B'_2 = B_1$ donc B_2 de la forme $\frac{X^2}{2} + bX + a$. Comme $B_2(0) = B_2(1)$, on a $a = \frac{1}{2} + b + a$ donc nécessairement $b = -\frac{1}{2}$. Ainsi, $B_1 = X - \frac{1}{2}$.

De même, on sait que B_2 est de la forme $\frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + c$ donc $B_3(X)$ est de la forme $\frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + cX + d$. Or $B_3(0) = B_3(1)$, ce qui impose $c = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$, on a donc bien $B_2(X) = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12}$.

- (b) On procède de même pour déterminer B_3 . On trouve

$$B_3 = \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12}$$

2. (a) Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On sait que tout polynôme $Q = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} + c$ de $\mathbb{R}[X]$ est tel que $Q' = P$ (pour tout réel c). En prenant $c = -\int_0^1 \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} t^{k+1} dt =$

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(k+1)(k+2)}, \text{ on a bien } \int_0^1 Q(t) dt = 0.$$

On a montré l'existence. Si on suppose que deux polynômes Q_1 et Q_2 existent et vérifient ces propriétés, on a $Q_1 = Q_2 + k$ avec k une constante et, par linéarité de l'intégrale, comme $\int_0^1 Q_1(t) dt = 0 = \int_0^1 Q_2(t) dt$, on obtient $k = 0$ d'où l'unicité.

La plupart d'entre vous m'ont seulement montré l'unicité et pas l'existence. Je vous rappelle qu'il est inutile de raisonner par l'absurde et donc de supposer que Q_1 et Q_2 sont différents.

J'ai vu beaucoup de bêtises sur cette question, des confusions entre intégrale et primitive, des notations farfelues qui semblent évoquer une unique primitive (!), des intégrales nulles qui impliquent des intégrandes nulles...

- (b) On veut montrer qu'une suite de polynômes vérifie les propriétés (P_1) si et seulement si elle vérifie les propriétés (P_2) .

On raisonne par double implication.

On suppose tout d'abord que (B_n) vérifie les propriétés (P_1) . Soit $n \in \mathbb{N}$, montrons que

$\int_0^1 B_{n+1}(t) dt = 0$. On sait que $B_{n+1} = B'_{n+2}$ et $n+2 \geq 2$ donc $B_{n+2}(0) = B_{n+2}(1)$, ainsi

on a bien $\int_0^1 B_{n+1}(t) dt = 0$ donc (B_n) vérifie les propriétés (P_2) .

On suppose désormais que (B_n) vérifie les propriétés (P_2) , montrons qu'elle vérifie les propriétés (P_1) . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B'_{n+1} = B_n$. Soit maintenant $n \geq 2$, montrons que $B_n(0) = B_n(1)$. On sait que $B'_n = B_{n-1}$ et $B_{n-1} = L(B_{n-2})$ avec $n-2 \in \mathbb{N}$ donc

$\int_0^1 B_{n-1}(t) dt = 0$. On en déduit que $B_n(0) = B_n(1)$ donc (B_n) vérifie les propriétés (P_1) .

On ne va pas se mentir, cette question était un massacre. La plupart d'entre vous ont voulu raisonner par équivalence sans faire attention à la valeur de n et en faisant des équivalences douteuses.

- (c) Il existe une unique suite vérifiant les propriétés (P_2) car la suite est définie par récurrence, la valeur de son premier terme étant fixé. On en déduit, d'après la question précédente, qu'il existe une unique suite de polynômes qui vérifie les propriétés (P_1) .

On notera désormais cette suite (B_n) et on l'appellera **la** suite de polynômes de Bernoulli.

Beaucoup m'ont évoqué l'unicité de Q . L'unicité (et l'existence) de Q permet simplement de bien définir l'application L , rien à voir donc avec cette question où il faut remarquer qu'une suite vérifiant (P_2) est définie par récurrence.

3. On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$. Pour cela, on va poser $A_n = (-1)^n B_n(1-X)$ et montrer que (A_n) satisfait les propriétés (P_1) . Par unicité, on aura $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} = (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On a

- $A_0 = B_0(1-X) = 1$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, $A'_{n+1} = (-1)^{n+1} (-B'_{n+1}(1-X)) = (-1)^{n+2} B_n(1-X) = A_n(X)$, on a donc bien la deuxième propriété.
- Soit $n \geq 2$, alors $A_n(0) = (-1)^n B_n(1) = (-1)^n B_n(0) = A_n(1)$, on a donc bien la deuxième propriété.

Ainsi, la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les propriétés (P_1) , d'après la question précédente, on a donc $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} = (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Certains ont tenté de montrer que $((-1)^n B_n(1-X))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiait les propriétés (P_2) en faisant des intégrations douteuses...

4. (a) On utilise les résultats trouvés précédemment, on a $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{12}$, $b_3 = 0$.
- (b) Soit $n \geq 3$, on suppose n impair. Alors $B_n(0) = (-1)^n B_n(1) = -B_n(1)$. Or $n \geq 3$ donc $B_n(0) = B_n(1)$, on en déduit que b_n est nul.

Là, je vous l'accorde, c'était sournois, il fallait savoir lire "impair". Je tire quand même mon chapeau à tous ceux qui ont réussi (hum) à montrer que c'était vrai pour tout entier. J'ai vu plusieurs raisonnements par récurrence qui n'utilise pas du tout l'hypothèse de récurrence. Cela aurait dû vous mettre la puce à l'oreille: ce N'est PAS un raisonnement par récurrence !

Application au calcul de $\zeta(2k)$

5. On pose $\alpha_0(k) = \int_0^1 B_{2k}(t) dt$. On sait que $B'_{2k+1} = B_{2k}$, on a donc

$$\alpha_0(k) = [B_{2k+1}(t)]_0^1 = B_{2k+1}(1) - B_{2k+1}(0) = 0.$$

6. On pose

$$\forall n \geq 1, \alpha_n(k) = 2 \int_0^1 B_{2k}(t) \cos(2\pi n t) dt$$

(a) On procède par intégration par parties. On pose $u(t) = B_2(t)$ et $v'(t) = \cos(2\pi n t)$. On a $u'(t) = B'_2 = B_1$ et $v(t) = \frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n}$. On a donc

$$\alpha_n(1) = 2 \left[B_2(t) \frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 B_1(t) \frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n} dt.$$

On procède, à nouveau par intégration par parties. On pose $u(t) = B_1(t)$ et $v'(t) = -\frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n}$. On a $u'(t) = B_0(t) = 1$ et $v(t) = \frac{\cos(2\pi n t)}{(2\pi n)^2}$. On a donc

$$\alpha_n(1) = 2 \left[B_1(t) \frac{\cos(2\pi n t)}{(2\pi n)^2} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\cos(2\pi n t)}{(2\pi n)^2} dt.$$

On a $B_1(1) = \frac{1}{2} = -B_1(0)$ donc $2 \left[B_1(t) \frac{\cos(2\pi n t)}{(2\pi n)^2} \right]_0^1 = \frac{2}{(2\pi n)^2}$ et

$$2 \int_0^1 \frac{\cos(2\pi n t)}{(2\pi n)^2} dt = 2 \left[\frac{\sin(2\pi n t)}{(2\pi n)^3} \right]_0^1 = 0.$$

On a donc bien $\forall n \geq 1, \alpha_n(1) = \frac{2}{(2\pi n)^2}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \geq 2$.

On procède par intégration par parties successives, comme à la question précédente: On pose $u(t) = B_{2k}(t)$ et $v'(t) = \cos 2\pi n t$. On a $u'(t) = B_{2k-1}(t)$ et $v(t) = \frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n}$. On a donc

$$\alpha_n(k) = \underbrace{\left[B_{2k}(t) \frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n} \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 B_{2k-1}(t) \frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n} dt.$$

On pose ensuite $u(t) = B_{2k-1}(t)$ et $v'(t) = -\frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n}$. On a $u'(t) = B_{2k-2}(t)$ et $v(t) = \frac{\cos(2\pi n t)}{(2\pi n)^2}$. On a

$$\alpha_n(k) = \underbrace{\left[B_{2k-1}(t) \frac{\cos(2\pi n t)}{(2\pi n)^2} \right]_0^1}_{=0 \text{ car } 2k-1 \geq 2} - \int_0^1 B_{2k-2}(t) \frac{\cos(2\pi n t)}{(2\pi n)^2} dt$$

On a donc

$$\alpha_n(k) = -\frac{1}{(2\pi n)^2} \int_0^1 B_{2k-2}(t) \cos(2\pi n t) dt = -\frac{1}{(2\pi n)^2} \alpha_n(k-1)$$

qui est l'égalité souhaitée.

- (c) Soit $n \geq 1$. On a vu dans la question précédente que la suite $(\alpha_n(k))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{(2n\pi)^2}$ et de premier terme $\alpha_n(1) = \frac{2}{(2n\pi)^2}$. On en déduit que pour tout $k \geq 1$,

$$\alpha_n(k) = \frac{(-1)^{k-1} 2}{(2n\pi)^{2k}}$$

On admet que pour tout $x \in [0, 2\pi[$, on a

$$B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\alpha_0(k) + \sum_{n=1}^N \alpha_n(k) \cos(nx) \right)$$

7. (a) Soit $k \geq 1$. On prend $x = 0$, on obtient

$$b_{2k} = B_{2k}(0) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\alpha_0(k) + \sum_{n=1}^N \alpha_n(k) \right)$$

Pour tout $N \geq 1$, on a

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n(k) = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1} \pi^{2k} n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1} (\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{2k}}$$

On en déduit, comme $\alpha_0(k) = 0$, que l'on a

$$b_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1} (\pi)^{2k}} \zeta(2k)$$

- (b) On a $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = b_2 2\pi^2$ et $b_2 = \frac{1}{12}$ d'où $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On a, pour $k = 2$, $b_4 = -\frac{1}{2^3 (\pi)^4} \zeta(4)$ donc

$$\zeta(4) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^4} = -8b_4(\pi)^4.$$

et $b_4 = -\frac{1}{720}$ d'où $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$