Lycée du Parc
PCSI 842 — Année 2023-2024
DS 0

Produit de convolution .

Attention!: pas de correction !

A tout couple de suites réelles $a = \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = \left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, on associe une nouvelle suite $c = \left(c_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Nous noterons cette suite $c = a * b$.

Partie I : 3 Exemples

1. Pour tous les entiers naturels n, calculer c_n en fonction de n dans les cas suivants, et donnez-en une expression sans signe Σ. :

   (a) Lorsque $a_n = 2$ et $b_n = 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Lorsque $a_n = 2^n$ et $b_n = 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Lorsque $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ et $b_n = \dfrac{3^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II : Un lemme utile

2. Dans cette question, on définit les deux suites (a_n) et (b_n) ainsi :

   ▷ $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, de limite nulle.

   ▷ $a_n = (1/2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Si bien que la suite $c = a * b$ est définie par

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} b_{n-k}.$$

   (a) Etablir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) tels que $n < m$, l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^k} \leqslant \frac{1}{2^n}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer que

   $$c_{2n} \leqslant b_{2n} + b_n + \frac{b_0}{2^n} \text{ et } c_{2n+1} \leqslant b_{n+1} + \frac{b_0}{2^n} + b_{2n+1}.$$

   (c) En déduire que les deux suites $\left(c_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(c_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0.

   (d) Prouver que $\left(c_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(e) Soit $d_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $d * b$ converge vers 0.

Partie III : Etude d'une classe de suites

3. Dans cette partie, on note Ω l'ensemble des suites réelles $a = \big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\big(a_n + a_{n-1}\big).$$
Nous allons montrer que Ω est une ensemble de suites convergentes contenant toutes les suites décroissantes - mais pas qu'elles-.

   (a) i. Montrer que si $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs, alors elle appartient à Ω.

   ii. Montrer que si $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante, elle n'appartient pas à Ω.

   (b) Déterminer explicitement toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\big(u_n + u_{n-1}\big).$$
   En déduire qu'il existe dans Ω des suites non décroissantes.

   (c) Dans cette question, on se fixe une suite $a = \big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à Ω, et d la suite définie par $d_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Soit enfin c telle que $c_0 = a_0$ et $c_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

   i. Montrer que la suite $\big(c_n\big)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, et qu'elle converge vers une nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

   ii. Pour tout entier naturel n, établir l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$.

   iii. Que peut-on en déduire pour les suites $d * c$ et a ?

   iv. Soit ϵ la suite définie par $\epsilon_n = c_n - \ell$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer que la suite $d * \epsilon$ converge vers 0.

   v. On désigne par u la suite $d * \epsilon$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir l'égalité $u_n = a_n - \frac{2}{3}\ell\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

   vi. En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.

Correction du DS n 0