Devoir d'entrainement 7.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1.
Pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on considère l'équation $E_{a,b}$ suivante, d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$:

$$P(X^2) = P(X+a)P(X+b) \qquad E_{a,b}$$

*NB : $P(X^2)$ ne désigne pas un produit, mais une composition ("P **de** X^2"). De même pour $P(X+a)$ et $P(X+b)$.*

1. Quels sont les polynômes constants vérifiant $E_{a,b}$?

Dans toute la suite, on note $S_{a,b}$ l'ensemble (éventuellement vide) des polynômes <u>non constants</u> vérifiant $E_{a,b}$.

2. Montrer que les polynômes de $S_{a,b}$ sont unitaires (c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1).

NB : les trois parties qui composent cet exercice sont indépendantes.

Partie I : cas où $a = b$

Dans cette partie, on fixe $a \in \mathbb{C}$, et on cherche les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ non constants qui vérifient :

$$P(X^2) = P(X+a)^2 \qquad E_{a,a}$$

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les racines *distinctes* de P.
   (a) Préciser le nombre de racines distinctes du polynôme $P(X+a)^2$.
   (b) Même question avec $P(X^2)$ (on pourra distinguer selon le cas où 0 est ou non racine de P).
   (c) On suppose de plus que P vérifie $E_{a,a}$. Montrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P = X^n$.
2. En déduire l'ensemble $S_{a,a}$ des solutions pour $a \neq 0$, puis pour $a = 0$.

Partie II : cas où $a = 0$ et $b = 1$

Dans cette partie, on cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ non constants vérifiant l'équation

$$P(X^2) = P(X)P(X+1) \qquad E_{0,1}$$

1. Résoudre l'équation $|z| = |z-1| = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ (on doit trouver deux solutions, de forme trigonométrique très simple).
   Conseil : on pourra par exemple poser $z = x + iy$, ou bien aussi faire un dessin.

2. Soit $P \in S_{0,1}$ un polynôme solution du problème.

   (a) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors tous les $\alpha^{(2^n)}$, où $n \in \mathbb{N}$, le sont aussi.

   (b) En déduire que toute racine de P est nécessairement nulle ou de module égal à 1.

   (c) Montrer que si α est racine de P alors $(\alpha-1)^2$ aussi. En déduire que $\alpha - 1 = 0$ ou $|\alpha - 1| = 1$.

   (d) Déduire des questions précédentes que les seules racines possibles de P sont 0 et 1.

3. Conclure cette partie en explicitant l'ensemble $S_{0,1}$.

Partie III : retour sur le cas général

Dans cette partie, on fixe $a, b \in \mathbb{C}$ quelconques, et on suppose que l'ensemble $S_{a,b}$ est non vide.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que si $P \in S_{a,b}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P^n \in S_{a,b}$.

2. Soit A, B deux polynômes unitaires et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $A^n = B^n$, alors $A = B$.
   Indication : écrire la factorisation de $A^n - B^n$ par $(A - B)$.

3. Déduire de la question précédente que si un polynôme unitaire $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifie que $P^n \in S_{a,b}$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$, alors $P \in S_{a,b}$.

4. On considère P, Q deux éléments de $S_{a,b}$, de degrés égaux. On souhaite démontrer dans cette question que $P = Q$. On pose les polynômes :

$$D = P - Q \quad \text{et} \quad R = P(X+a)D(X+b) + D(X+a)Q(X+b)$$

   (a) Montrer que $R = D(X^2)$.

   (b) En raisonnant par l'absurde sur le monôme dominant de D, montrer que $D = 0$ et conclure.

5. En déduire que $S_{a,b}$ possède un unique polynôme de degré minimal, et que celui-ci est unitaire. Dans la suite de cette partie, on note M ce polynôme, et m son degré.

6. On fixe $P \in S_{a,b}$, de degré $n \geqslant m$. Justifier que P^m et M^n ont même degré, et en déduire que $P^m = M^n$.

7. En déduire que P et M ont les mêmes racines.

8. A l'aide de la relation $P^m = M^n$, montrer que M divise P.

9. On note Q le polynôme tel que $P = MQ$. Montrer que Q vérifie $E_{a,b}$.

10. Montrer que $S_{a,b}$ est l'ensemble $\{M^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 2.
On notera

- $\triangleright$ E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles
- $\triangleright$ D l'application définie sur E par : $\forall f \in E, D(f) = f'$
- $\triangleright$ F l'ensemble des fonctions f de E vérifiant : $f^{(3)} + f = 0_E$
- $\triangleright$ G l'ensemble des fonctions de f de E vérifiant : $f'' - f' + f = 0_E$
- $\triangleright$ $H = \ker(D + \mathrm{Id}_E)$.

1. (a) Vérifiez que F est un sous-espace vectoriel de E (sans vous servir de D).
   (b) Vérifiez que D est un endomorphisme de E. Exprimez $D^k(f)$ en fonction de f et k pour tout entier naturel k et toute f de E.
   (c) Justifiez que $F = \ker(D^3 + \mathrm{Id}_E)$ et retrouvez le résultat de a).
2. (a) Vérifiez, à l'aide de votre cours sur les équations différentielles, que G est un sous-espace vectoriel de E et donnez-en une base simple.
   (b) Vérifiez, à l'aide de votre cours sur les équations différentielles, que H est une droite vectorielle et donnez-en une base. (un vecteur directeur, donc)
3. On note $\varphi = D^2 - D + \mathrm{Id}_E$ et $\psi = D + \mathrm{Id}_E$.
   (a) Vérifiez que $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = D^3 + \mathrm{Id}_E$.
   (b) Déduisez-en que $\ker(\varphi)$ et $\ker(\psi)$ sont des sous-espaces vectoriels de F, puis que $G \oplus H \subset F$.
   (c) Vérifiez que : $\mathrm{Id}_E = \frac{1}{3}(\varphi + A \circ \psi)$ où $A = 2\mathrm{Id}_E - D$.
   (d) Vérifiez que pour toute f de F, on a $\varphi(f) \in \ker(\psi)$ et $A \circ \psi(f) \in \ker(\varphi)$
   (e) Déduisez-en : $F \subset H + G$. (notez que A commute avec φ et servez-vous de a))
4. On a donc montré que $F = G \oplus H$. Déduisez-en l'expression générale des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle $y^{(3)} + y = 0$.

Correction du DS d'entrainement n 7

Exercice 1 1. Soit $P = \lambda \in \mathbb{C}$ un polynôme constant. L'égalité $E_{a,b}$ signifie $\lambda = \lambda^2$. Elle est vraie ssi $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.
Les solutions constantes sont donc 0 et 1.

2. Soit $P \in S_{a,b}$. Notons d le degré de P et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ son coefficient dominant. L'équation $E_{a,b}$, en ne considérant que les termes dominants, donne

$$\lambda X^{2d} + \cdots \; = \; \big(\lambda(X+a)^d + \cdots\big)\big(\lambda(X+b)^d + \cdots\big)$$

ce qui, en considérant les termes dominants des deux côtés, donne $\lambda = \lambda^2$ et donc $\lambda = 1$ (par définition, $\lambda \neq 0$). Le polynôme P est donc unitaire.

Partie I : cas où $a = b$

1. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z \text{ racine de } P(X+a)^2 &\iff \big(P(z+a)\big)^2 = 0 \\ &\iff P(z+a) = 0 \\ &\iff z + a = \lambda_i \text{ pour un } i \in [\![1, m]\!] \\ &\iff z = \lambda_i - a \text{ pour un } i \in [\![1, m]\!] \end{aligned}$$

Les racines de $P(X+a)^2$ sont donc les $(\lambda_i - a)_{1 \leqslant i \leqslant m}$, et il y en a donc exactement $\boxed{m}$.

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z \text{ racine de } P(X^2) &\iff P(z^2) = 0 \\ &\iff z^2 \text{ est racine de } P \\ &\iff z^2 = \lambda_i \text{ pour un } i \in [\![1, m]\!] \end{aligned}$$

Les racines de $P(X^2)$ sont donc les racines carrées complexes des λ_i. Au passage, un nombre $z \in \mathbb{C}$ ne peut pas être à la fois une racine de λ_i et de λ_j pour $i \neq j$, car cela signifierait que $z^2 = \lambda_i = \lambda_j$, ce qui est impossible. Or, tout nombre complexe a exactement 2 racines carrées complexes, sauf 0, qui n'en a qu'une seule. Donc le nombre de racines de $P(X^2)$ vaut :

- $\boxed{2m}$ si aucun des λ_i ne vaut 0 ;
- $\boxed{2(m-1)+1}$ si l'un des λ_i vaut 0.

(c) Si P vérifie $E_{a,a}$, les polynômes $P(X^2)$ et $P(X+a)^2$ sont égaux, et ont donc le même nombre de racines. Cela donne :

- $m = 2m$ si aucun des λ_i ne vaut 0, c'est-à-dire $m = 0$, ce qui est impossible. En effet, P est non constant, donc doit avoir au moins une racine, par le théorème de D'Alembert-Gauss.
- $m = 2m - 1$ si l'un des λ_i est nul, c'est-à-dire $m = 1$.

On en déduit donc que P n'a qu'une seule racine, et que cette racine vaut 0. Comme de plus il est unitaire, sa décomposition en facteurs irréductibles (raisonnement fait dans $\mathbb{C}[X]$) est donc $P = X^n$, où $n = \deg(P)$.

2. D'après ce qui précède, si un polynôme P est solution du problème (c-à-d $P \in S_{a,a}$), alors il est unitaire et n'a que 0 comme racine. Sa décomposition en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ est donc : $P = X^n$, pour un $n \in \mathbb{N}^*$.
On peut s'arrêter ici pour l'étape d'analyse.

Synthèse : Soit P un polynôme de la forme $P = X^n$, pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Regardons s'il appartient à $S_{a,a}$. L'égalité $E_{a,a}$ signifie :

$$(X^2)^n = \big((X+a)^n\big)^2 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad X^{2n} = (X-a)^{2n}$$

Cette égalité est vraie si et seulement si $a = 0$.

Conclusion :

- si $a \neq 0$, $\boxed{S_{a,a} = \emptyset}$;
- si $a = 0$, $\boxed{S_{0,0} = \{X^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}}$.

Partie II : cas où $a = 0$ et $b = 1$

1. On peut passer par la forme algébrique $z = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$.
L'équation $|z| = |z-1| = 1$ est équivalente à $|z|^2 = |z-1|^2 = 1$. Or :

   - $z = x + iy$ donc $|z|^2 = x^2 + y^2$;
   - $z - 1 = (x-1) + iy$ donc $|z-1|^2 = (x-1)^2 + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2$.

   L'équation peut donc s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \end{cases}$$

   En retranchant la première équation à la seconde, ce système est équivalent à

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 1 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{3}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

   On obtient finalement deux solutions $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, autrement dit $e^{i\pi/3}$ et $e^{-i\pi/3}$.
Note du professeur : il était tout à fait possible de passer par une écriture trigonométrique. $|z| = 1$ implique que z est de la forme $e^{i\theta}$. L'égalité $|z-1|$ s'écrit alors $|e^{i\theta} - 1| = 1$, et l'on peut utiliser la factorisation par l'angle milieu pour arriver à $|\sin(\frac{\theta}{2})| = \frac{1}{2}$, et résoudre.

2. Soit $P \in S_{0,1}$.

   (a) Si $P(\alpha) = 0$ alors par hypothèse $P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha+1) = 0$ donc α^2 est aussi une racine. Par le même argument $(\alpha^2)^2 = \alpha^4$ est aussi une racine, de même pour $(\alpha^4)^2 = \alpha^8$, et ainsi de suite.
   On a donc par récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha^{(2^n)}$ est racine de P.

   (b) Soit α une racine de P. **Par l'absurde :** Supposons que $|\alpha|$ ne vaut ni 0, ni 1. D'après la question précédente α^{2^n} est une racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or :

   - si $|\alpha| \in]0,1[$, la suite des $|\alpha^{(2^n)}| = |\alpha|^{2^n}$ est strictement décroissante et tend vers 0 ;
   - si $|\alpha| \in]1,+\infty[$, la suite des $|\alpha^{(2^n)}| = |\alpha|^{2^n}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$.

Dans les deux cas, la suite $(\alpha^{(2^n)})_{n\in\mathbb{N}}$ prend une infinité de valeurs (puisque son module prend une infinité de valeurs). P admet donc une infinité de racines, ce qui implique que $P = 0$ et constitue une contradiction avec l'hypothèse de l'énoncé selon laquelle P est non nul.

(c) Si $P(\alpha) = 0$ alors en évaluant $E_{0,1}$ en $\alpha - 1$, on obtient

$$P((\alpha-1)^2) \;=\; P(\alpha-1)P(\alpha) \;=\; 0$$

donc $(\alpha-1)^2$ est une racine de P. Le résultat de la question précédente s'applique donc à $\alpha - 1$, et donc $\alpha - 1$ est nul ou de module égal à 1.

(d) D'après les questions précédentes, une racine α de P vérifie la condition

$$(\alpha = 0 \;\text{ ou }\; |\alpha| = 1) \quad \text{et} \quad (\alpha - 1 = 0 \;\text{ ou }\; |\alpha - 1| = 1) \qquad (C)$$

Les nombres 0 et 1 vérifient (C). Un nombre $r \notin \{0,1\}$ vérifie (C) si et seulement si $|r| = |r-1| = 1$ ce qui d'après la question 1 implique que $r = e^{\pm i\pi/3}$.
Les racines de P appartiennent donc nécessairement à l'ensemble

$$\{0, 1, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}\}.$$

Or, on a prouvé que si α est racine de P, α^2 l'est aussi. On remarque que le carré de $e^{i\pi/3}$ (c'est-à-dire $e^{2i\pi/3}$) n'est aucun de ces 4 nombres complexes, et ne peut donc pas être une racine de P. Donc $e^{i\pi/3}$ n'est pas une racine de P. De même pour $e^{-i\pi/3}$.
Conclusion : les seules racines possibles pour P sont 0 et 1.

3. Le travail précédent montre que si un polynôme P appartient à $S_{0,1}$, alors il est unitaire, et n'admet que 0 et 1 comme racines potentielles. Donc par théorème (décomposition en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$), P est de la forme

$$P = X^n(X-1)^m \qquad \text{avec } \; n, m \in \mathbb{N}.$$

On peut arrêter là l'étape d'analyse.
Synthèse : considérons un polynôme de la forme $P = X^n(X-1)^m$ et regardons s'il appartient à $S_{0,1}$. Tout d'abord, pour que P ne soit pas constant, on ne peut pas avoir $n = m = 0$. De plus, pour un polynôme de cette forme, $E_{0,1}$ signifie :

$$\underbrace{X^{2n}(X^2-1)^m}_{\hat{=}Q_1} = \underbrace{X^n(X-1)^m(X+1)^nX^m}_{\hat{=}Q_2}$$

Avec $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, on calcule :

$$Q_1 = X^{2n} \;\cdot\; (X-1)^m \;\cdot\; (X+1)^m$$

et

$$Q_2 = X^{n+m} \;\cdot\; (X-1)^m \;\cdot\; (X+1)^n.$$

Par unicité de la décomposition en produit de polynômes irréductibles, l'égalité de Q_1 et de Q_2 est vérifiée si et seulement si :

$$\begin{cases} 2n = n + m \\ m = m \\ m = n \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \boxed{n = m}$$

Conclusion :

$$\boxed{S_{0,1} = \{X^n(X-1)^n \;\mid\; n \in \mathbb{N}^*\}}$$

Partie III : retour sur le cas général

1. Soit $P \in S_{a,b}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord, P n'est pas constant, donc P^n non plus. De plus, on a :

$$P(X^2) = P(X+a)P(X+b) \quad \text{donc} \quad \big(P(X^2)\big)^n = \big(P(X+a)P(X+b)\big)^n$$
$$\text{c'est-à-dire} \quad P^n(X^2) = P^n(X+a)P^n(X+b)$$

Cela prouve que P^n vérifie $E_{a,b}$. Finalement, on a bien $P^n \in S_{a,b}$.

2. On écrit :

$$\begin{aligned} A^n - B^n &= (A-B)\sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-1-k} \\ &= (A-B)\underbrace{\left(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1}\right)}_{Q} \end{aligned}$$

Si $A^n - B^n = 0$, alors $(A-B)Q = 0$. Il suffit désormais de prouver que $Q \neq 0$:
Comme $A^n = B^n$, A et B ont même degré (mettons $d \in \mathbb{N}$). Donc les polynômes $A^k B^{n-1-k}$ ont tous même degré : $kd + (n-1-k)d = (n-1)d$. De plus, ces polynômes $A^k B^{n-1-k}$ sont unitaires (produits de polynômes unitaires). Par conséquent, le coefficient en $X^{(n-1)d}$ de Q vaut $1 + 1 + \cdots + 1$, c'est-à-dire n.
Cela prouve en particulier que Q est non nul. Donc $(A-B) = 0$, c'est-à-dire $A = B$.

3. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $P^n \in S_{a,b}$.
P n'est pas constant (sinon, P^n le serait). D'autre part, P^n vérifie $E_{a,b}$, donc :

$$P^n(X^2) = P^n(X+a)P^n(X+b) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \big(P(X^2)\big)^n = \big(P(X+a)P(X+b)\big)^n$$

On applique alors la question précédente à $A = P(X^2)$ et $B = P(X+a)P(X+b)$ (qui sont bien unitaires) : on a $A = B$, ce qui signifie que P vérifie $E_{a,b}$.
Finalement, $P \in S_{a,b}$.

4. (a) On calcule :

$$\begin{aligned} R &= P(X+a)\big(P(X+b) - Q(X+b)\big) + \big(P(X+a) - Q(X+a)\big)Q(X+b) \\ &= P(X+a)P(X+b) - Q(X+a)Q(X+b) \qquad \text{(après simplification)} \\ &= P(X^2) - Q(X^2) \qquad \text{(d'après } E_{a,b}\text{)} \\ &= D(X^2) \end{aligned}$$

(b) Notons $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de P et Q.
Raisonnement par l'absurde : supposons que $D \neq 0$. On note $m = \deg(D) \in \mathbb{N}$, et d_m son coefficient dominant. On a donc :

$$D = d_m X^m + (\cdots) \qquad \text{et donc} \qquad \boxed{D(X^2) = d_m X^{2m} + (\cdots)}$$

D'autre part, pour $R = P(X+a)D(X+b) + D(X+a)Q(X+b)$:

- $P(X+a)D(X+b)$ est de degré $n+m$, de coefficient dominant d_m ;
- $D(X+a)Q(X+b)$ est de degré $n+m$, de coefficient dominant d_m.

Donc par somme, $\boxed{R = 2d_m X^{n+m} + (\cdots)}$.
L'égalité $D(X^2) = R$ implique donc $d_m = 2d_m$, c'est-à-dire $d_m = 0$, ce qui est **impossible** par définition du coefficient dominant.
Remarque du professeur : il y a aussi une contradiciton sur le degré, car m ne peut pas valoir n (compensation des coef en X^n dans $P - Q$).
Conclusion : $D = 0$, et donc $P = Q$.

5. Comme $S_{a,b}$ est non vide, on peut considérer l'entier m défini comme étant le plus petit entier naturel k tel qu'il existe un polynôme de $S_{a,b}$ de degré k. Par définition de m, il existe $M \in S_{a,b}$ de degré m, et d'après la question 4, il est unique.

6. P^m est de degré nm, et M^n est de degré mn. Donc ces deux polynômes ont bien même degré. De plus, d'après la question 1, ils appartiennent à $S_{a,b}$. On peut donc appliquer le résultat de la question 4 : ils sont égaux.

7. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$P(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \big(P(\lambda)\big)^m = 0 \;\Leftrightarrow\; P^m(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; M^n(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \big(M(\lambda)\big)^n = 0 \;\Leftrightarrow\; M(\lambda) = 0$$

Cela prouve bien que P et M ont les mêmes racines.

8. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les racines de P et M. Il existe donc des entiers α_k et β_k de $\mathbb{N}^*$ tels que :

$$M = \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)^{\alpha_k} \qquad \text{et} \qquad P = \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)^{\beta_k}$$

L'égalité $M^n = P^m$ donne donc :

$$\prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)^{n\alpha_k} = \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)^{m\beta_k}$$

Par unicité de la décomposition en produit de polynômes irréductibles, on a donc pour tout k que $n\alpha_k = m\beta_k$.
D'où $\alpha_k = \frac{m}{n}\beta_k$, et donc $\alpha_k \leqslant \beta_k$, car $n \leqslant m$. Si on note $\gamma_k = \beta_k - \alpha_k \in \mathbb{N}$, on a donc $\beta_k = \alpha_k + \gamma_k$, et on peut écrire :

$$P = \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)^{\alpha_k + \gamma_k} = \underbrace{\prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)^{\alpha_k}}_{=M} \times \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)^{\gamma_k}$$

Donc M divise P.

9. Comme P et M vérifient $E_{a,b}$, on a : $\begin{cases} P(X^2) = P(X+a)P(X+b) & (E_1) \\ M(X^2) = M(X+a)M(X+b) & (E_2) \end{cases}$
Sachant $P = MQ$, l'égalité (E_1) donne :

$$\begin{aligned} M(X^2)Q(X^2) &= M(X+a)Q(X+a)\; M(X+b)Q(X+b) \\ &= \underbrace{M(X+a)M(X+b)}_{=M(X^2) \text{ d'après } (E_2)}\; Q(X+a)Q(X+b) \end{aligned}$$

D'où $M(X^2)Q(X^2) = M(X^2)Q(X+a)Q(X+b)$.
Comme $M(X^2) \neq 0$, cela implique que $Q(X^2) = Q(X+a)Q(X+b)$.
Q vérifie donc bien $E_{a,b}$.

10. Deux cas sont possibles pour Q.

   - 1$^{\text{er}}$ cas : Q est de degré $< m$. Q ne peut alors pas être autre chose qu'un polynôme constant, car sinon cela contredirait la définition de M en mettant en évidence un élément de $S_{a,b}$ de degré $< m$. Donc Q est constant, et comme $Q \neq 0$, on a $\boxed{Q = 1}$ (et donc $P = M$).

- 2^{nd} cas : Q est de degré $\geqslant m$. On peut alors appliquer à Q tout ce qu'on a appliqué à P. Q est de la forme $\boxed{Q = MQ_2}$, où Q_2 vérifie $E_{a,b}$, et $P = M^2 Q_2$.

De nouveau, une disjonction de cas s'engage sur Q_2, qui mène à :

- 1^{er} cas : $Q_2 = 1$, et donc $P = M^2$.
- 2^{nd} cas : Q_2 est de la forme $Q = MQ_3$, où Q_3 vérifie $E_{a,b}$, et $P = M^3 Q_3$, etc.

En itérant ce processus autant de fois qu'il faut pour se retrouver dans le 1^{er} cas (le degré des Q_k étant strictement décroissant, cela doit arriver), on obtient bien qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P = M^n$.

Le travail mené depuis la question 6 montre donc que tout polynôme $P \in S_{a,b}$ est de la forme M^n, pour un $n \in \mathbb{N}^*$.
Réciproquement, comme $M \in S_{a,b}$, les polynômes du type M^n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont bien dans $S_{a,b}$, d'après la question 1.
Conclusion : $S_{a,b} = \{M^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 2 1. (a) • $0_E \in F$ car $(0_E)^{(3)} = 0_E$.

- Si $f, g \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}&(\lambda f + \mu g)^{(3)} = \lambda f^{(3)} + \mu g^{(3)}\\ &= \lambda(-f) + \mu(-g) \text{ car } f, g \in E\\ &= -(\lambda f + \mu g)\end{aligned}$$

Conclusions: F est donc un sous-espace vectoriel.

(b) • L'application D est bien définie de E dans E car si f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, alors f' l'est aussi.

- Montrons qu'elle est linéaire. Soient $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$D(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' = \lambda D(f) + \mu D(g)$$

donc D est linéaire.

Conclusion: D est donc un endomorphisme de E.

- $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall f \in E$, on a $D^k(f) = f^{(k)}$ par une récurrence évidente sur k.

(c)

$\forall f \in E$, $(D^3 + \mathrm{Id}_E)(f) = D^3(f) + \mathrm{Id}_E(f) = f^{(3)} + f$ donc $f \in \ker(D^3 + \mathrm{Id}_E) \Leftrightarrow f \in F$ d'où $F = \ker(D^3 + \mathrm{Id}_E)$ or $D^3 + \mathrm{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$ donc F est un sous-espace vectoriel de E.

2. (a) Soit $f" - f' + f = 0$ une EDL à coefficients constants d'ordre 2. Son équation caractéristique associée est $z^2 - z + 1 = 0$ de discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$, ses racines sont $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de cette EDL sont donc

$$x \mapsto e^{x/2}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

donc

$$G = \{Af_1 + Bf_2, A, B \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$$

où

$$\begin{cases} f_1 : x \mapsto e^{x/2} \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ f_2 : x \mapsto e^{x/2} \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{cases}$$

donc G est un sous-ev de E.
Montrons que (f_1, f_2) est libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0_E$, alors

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

En particulier, on doit avoir

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 & (\text{ pour } x = 0) \\ \lambda_2 f_2\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = 0 & (\text{ pour } x = \frac{\pi}{\sqrt{3}}) \end{cases}$$

et comme $f_2\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = e^{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \neq 0$, on a nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc (f_1, f_2) est libre, c'est bien une base de G.

(b)

On a

$$f \in H \Leftrightarrow (D + \mathrm{Id}_E)(f) = 0 \Leftrightarrow f' + f = 0 \Leftrightarrow f' = -f$$

On reconnaît une EDL du premier ordre, homogène et à coefficients constants donc

$$H = \left\{x \mapsto \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\,(f_3)$$

où $f_3 : x \mapsto e^{-x}$ donc H est une droite vectorielle.

3. (a)

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi &= Q(D) \circ P(D) \\ &= (P \times Q)(D) = (X^3 + 1)(D) = D^3 + \mathrm{Id}_E \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} P(X) = X^2 - X + 1 \\ Q(X) = X + 1 \\ PQ = X^3 + 1 = QP \end{cases}$$

De même $\varphi \circ \psi = P(D) \circ Q(D) = (QP)(D) = D^3 + \mathrm{Id}_E$ donc

$$\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = D^3 + \mathrm{Id}_E$$

(b) Soit $f \in \ker(\varphi)$, alors $\varphi(f) = 0_E$ donc $\psi \circ \varphi(f) = \psi(O_E) = O_E$ car $\psi \in \mathcal{L}(E)$ d'où $\psi \circ \varphi(f) = 0_E$ c'est-à-dire $\left(D^3 + \mathrm{Id}_E\right)(f) = 0_E$ d'après a), on a donc $f \in F$ d'après 1c) d'où $\ker(\varphi) \subset F$.

De même, $\ker(\psi) \subset F$ (car on a aussi $\varphi \circ \psi = D^3 + \mathrm{Id}_E$) donc $\ker(\varphi)$ et $\ker(\psi)$ sont deux sous-ev de E.

Or $G = \ker(\varphi)$ car $\forall f \in E$, $\varphi(f) = D^2(f) - D(f) + f = f" - f' + f$ et $H = \ker(\psi)$ par définition. D'après ce qui précède, $G + H \subset F$.

De plus, si $f \in G \cap H$, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} f" - f' + f = 0_E (1) \\ f' = -f (2) \end{array} \right.$$

d'où $f" = (f')' = (-f)' = -f' = f$. On reporte dans (1): $f - (-f) + f = 0_E$ donc $3f = 0_E$ soit $f = 0_E$.
J'en déduis $G \cap H \subset \{0_E\}$ or $0_E \in G \cap H$ (ce sont des ssev de E) d'où $G \cap H = \{0_E\}$.

Conclusion: $G \oplus H \subset F$.

(c) On peut passer par des polynômes: on reprend les notations du a):

$$\varphi = P(D), \psi = Q(D), A = T(D) \text{ où } T(X) = -X + 2$$

or $P + (-X+2)Q = X^2 - X + 1 + (-X+2)(X+1) = 3$ d'où $P(D) + T(D) \circ Q(D) = 3\mathrm{Id}_E$ c'est-à-dire $\varphi + A \circ \psi = 3\mathrm{Id}_E$.

Conclusion: $\mathrm{Id}_E = \frac{1}{3}(\varphi + A \circ \psi)$.

Comme au a), on montre que $\varphi \circ A = A \circ \varphi$.

(d) soit f dans F.
On a $\psi(\varphi(f)) = (D^3 + \mathrm{Id}_E)(f) = 0_E$ d'après a). Donc $\varphi(f) \in \ker(\psi)$.
On a aussi $\varphi(A(\psi(f))) = A\varphi(\psi(f)))$ car A et φ commutent. Or comme ci-dessus, d'après a), $\varphi(\psi(f))) = 0_E$ et $A(0_E) = 0_E$ car A est linéaire. Donc $A \circ \psi(f) \in \ker(\varphi)$.

(e)

Soit $f \in F$, $f = \mathrm{Id}_E(f) = \frac{1}{3}[\varphi(f) + A(\psi(f))]$ d'après c). Notons $h = \frac{1}{3}\varphi(f)$ et $g = \frac{1}{3}A(\psi(f))$. Alors $g \in G$ et $h \in H$ d'après la question d) et comme $f = h + g$, on a bien montré l'inclusion $F \subset H + G$.

4.

y solution de " $y^{(3)} + y = 0$ " $\Leftrightarrow y \in F$

$\Leftrightarrow \exists A, B, \lambda \in \mathbb{R} / y : x \mapsto e^{x/2}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + \lambda e^{-x}$