# Correction du TD n 17

***Correction 1*** 1. Le polynôme nul admet $\alpha$ pour racine, l'ensemble $F_\alpha$ est donc non vide. Soient $(P,Q) \in F_\alpha^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $(\lambda P + Q) \in F_\alpha$. On sait que $P$ et $Q$ admettent $\alpha$ pour racine, on doit montrer que le polynôme $\lambda P + Q$ s'annule en $\alpha$ ce qui est clair. L'ensemble $F_\alpha$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Si $\alpha = \beta$, alors $F_\alpha = F_\beta = \mathcal{F}_\alpha \cap F_\beta$. Si $\alpha \neq \beta$, on raisonne par équivalence. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors :

$$P \in F_\alpha \cap F_\beta \Leftrightarrow P(\alpha) = P(\beta) = 0 \Leftrightarrow (X-\alpha)(X-\beta) \text{ divise } P.$$

Par équivalence, on a montré que $F_\alpha \cap F_\beta$ est l'ensemble des polynômes divisible par $(X-\alpha)(X-\beta)$.

***Correction 2*** On remarque que la suite nulle vérifie la relation donc elle appartient à $F$ ce qui montre que $F$ est non vide. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $F$. On a :

$$3(\lambda u_n + v_n) + 2n(\lambda u_{n-1} + v_{n-1}) = \lambda \underbrace{(3u_n + 2nu_{n-1})}_{=u_{n+1}\text{car } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F} + \underbrace{(3v_n + 2nv_{n-1})}_{=v_{n+1}\text{car } (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F},$$

ainsi, on a

***Correction 3*** On remarque que la fonction nulle vérifie $f(0) = f'(1) = 0$ donc elle appartient à $F$ ce qui montre que $F$ est non vide. Soient maintenant $f$ et $g$ deux éléments de $F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda f + g$ est un élément de $F$. On a :

$$\begin{aligned}(\lambda f + g)(0) &= \lambda f(0) + g(0)\\ &= 0 \text{car } f(0) = g(0) = 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\lambda f + g)'(1) &= \lambda f'(1) + g'(1)\\ &= 0 \text{car } f'(1) = g'(1) = 0\end{aligned}$$

On a donc bien $\lambda f + g \in F$, ce qui montre que $F$ est un sous-espace vectoriel.

***Correction 4*** On remarque tout d'abord que la fonction nulle s'écrit $x \mapsto ax\ln(x) + b\ln(x)$ avec $a = 0 = b$ donc elle appartient à $F$ qui est donc non vide.

Soient maintenant $f, g$ deux éléments de $F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition de $F$, on sait qu'il existe $(a,b,a',b') \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$f : x \mapsto ax\ln(x) + b\ln(x) \text{ et } g : x \mapsto a'x\ln(x) + b'\ln(x).$$

On a alors, $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$(\lambda f + g)(x) = \lambda(ax\ln(x) + b\ln(x)) + a'x\ln(x) + b'\ln(x) = (\lambda a + a')\,x\ln(x) + (\lambda b + b')\ln(x).$$

Comme $(\lambda a + a')$ et $(\lambda b + b')$ sont deux réels, $\lambda f + g$ est bien de la forme souhaitée donc elle appartient à $F$. Ce dernier est bien un sous-espace vectoriel de $E$.

***Correction 5*** On a $A \cap B \subset A$ et $A \subset \text{vect}(A)$ donc $A \cap B \subset \text{Vect}(A)$. De même, $A \cap B \subset B$ et $B \subset \text{vect}(B)$ donc $A \cap B \subset \text{Vect}(B)$. On a alors $A \cap B \subset \text{vect}(A) \cap \text{vect}(B)$. Comme $\text{vect}(A) \cap \text{vect}(B)$ est un espace vectoriel qui contient $A \cap B$, on a $\text{vect}(A \cap B) \subset \text{vect}(A) \cap \text{vect}(B)$.

Montrons qu'il n'y a, en général, pas égalité. Soient $A = \{X\}$, $B = \{2X\}$, alors $A \cap B = \emptyset$ donc $\text{vect}(A \cap B) = \{0\}$ mais $\text{vect}(A) = \text{vect}(B) = \text{vect}(X)$ ce qui montre que l'inclusion est stricte.

***Correction 6*** 1. On a l'inclusion $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$. En effet, si $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$, alors $x = a + b$ avec $a \in (F \cap G)$ et $b \in (F \cap H)$. On a $a \in G$ et $b \in H$ donc $a + b \in G + H$. On a également $a \in F$ et $b \in F$ et comme $F$ est un ssev, $a + b \in F$ d'où l'inclusion.

**Remarque:** l'inclusion est stricte. Prenons par exemple $F = \text{Vect}(1 + X)$, $G = \text{Vect}(1)$, $H = \text{Vect}(X)$. Alors $F \cap G = F \cap H = \{0\}$ mais $G + H = \mathbb{R}_1[X]$ donc $F \cap (G + H) = F$.

2. On a l'inclusion $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$ En effet, si $x \in F + (G \cap H)$, alors $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in G \cap H$. On a $b \in G$ donc $a + b \in F + G$. On a également $b \in H$ donc $a + b \in F + H$ d'où l'inclusion.

**Remarque:** l'inclusion est stricte. On reprend le même exemple, on a $F \cap (G + H) = F = \text{Vect}(1 + X)$, $F \cap G = F \cap H = \{0\}$ donc $(F \cap G) + (F \cap H) = \{0\}$.

3. On applique la première inclusion à $F, G$ et $F \cap H$. On obtient :

$$(F \cap G) + (F \cap (F \cap H)) \subset F \cap (G + F \cap H),$$

donc

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + F \cap H).$$

On montre ensuite directement la deuxième inclusion. Soit $x \in F \cap (G + F \cap H)$, alors $x = a + b$ avec $x \in F$, $a \in G$ et $b \in F \cap H$. On a $a = x - b \in F$ car $F$ est un ssev donc $a \in F \cap G$. On en déduit que $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$. On a bien l'égalité

***Correction 7*** Montrons, par analyse/synthèse, que toute fonction continue s'écrit comme la somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $G$.
Analyse :Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $(f, g) \in F \times G$ tel que $h = f + g$. On sait qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = ax + b$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) + ax + b.$$

Cela implique, d'une part, $h(0) = b$ et, d'autre part, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}_{=0 \text{ car } f\in F} + \int_0^1 (at + b)\,\mathrm{d}t.$$

On a donc $\displaystyle\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a}{2} + b$ d'où $a = 2\left(\displaystyle\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t\right) - 2h(0)$.

Synthèse :Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Posons $b = h(0)$, $a = 2\left(\displaystyle\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t\right) - 2h(0)$, $g : x \mapsto ax + b$ et $f = h - g$. Montrons que :

- $f \in F$,
- $g \in G$ et
- $h = f + g$.

Les deux derniers points sont clairs, montrons le premier:

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 h(t) - g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (at + b)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t - \frac{a}{2} - b.$$

Par définition de $a$ et $b$, on a bien $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc $f \in F$. Par analyse/synthèse, on a montré que toute fonction continue $f$ s'écrit comme la somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $G$. De plus, d'après la phase d'analyse, on a montré que cette écriture est unique ce qui montre l'inclusion $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subset F \oplus G$ d'où l'égalité.

***Correction 8*** Soit $P$ un élément de l'intersection. Alors $P = \lambda(X^3 + 2)$ et $P'(1) = 0$. On a $P'(1) = 3\lambda$ donc $\lambda = 0$ et $P = 0$. L'inclusion $\{0\} \subset F$ étant toujours vraie, la somme est bien directe.

***Correction 9***
Analyse :Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $(f, g) \in F \times G$, $h = f + g$. Il existe alors $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = ax^2 + bx + c$ d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) + ax^2 + bx + c.$$

On a :

- $h(0) = f(0) + c = c$ car $f(0) = 0$.
- $h'(0) = f'(0) + b = b$ car $f'(0) = 0$ et
- $h(1) = f(1) + a + b + c = a + b + c$ car $f(1) = 0$.

On en déduit que $a = h(1) - h(0) - h'(0)$, $b = h'(0)$ et $c = h(0)$.

Synthèse :Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Posons $a = h(1) - h(0) - h'(0)$, $b = h'(0)$, $c = h(0)$, $g : x \mapsto ax^2 + bx + c$ et $f = h - g$. Montrons que :

- $f \in F$,
- $g \in G$ et
- $f + g = h$.

Les deux derniers points sont clairs. En utilisant la phase d'analyse, on montre facilement que $f(0) = 0 = f'(0) = f(1)$ donc $f \in F$. On a montré que tout élément de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ s'écrit comme la somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $G$. De plus, l'unicité de l'écriture a été montrée dans la phase d'analyse. Ainsi, on a $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subset F \oplus G$ d'où l'égalité.

***Correction 10*** On raisonne par analyse/synthèse.
Analyse :Soit $f \in \mathcal{C}(R)$. Supposons qu'il existe $(g, h)$ telles que $f = \alpha + h$ avec $\alpha$ constante et $\displaystyle\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Intégrons l'égalité $f = \alpha + h$ entre 0 et 1. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \alpha\,\mathrm{d}t + \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \alpha \text{car} \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

On a donc $\alpha = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Synthèse :Soit $f \in \mathcal{C}(R)$. Posons $\alpha = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $h = f - \alpha$. On a alors

- $\alpha$ est une fonction constante,
- $\displaystyle\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (f(t)-\alpha)\,\mathrm{d}t = 0$ par linéarité de l'intégrale.
- $f = \alpha + h$ par définition de $h$.

On a montré que toute fonction continue s'écrit comme la somme d'une fonction constante et d'une fonction dont l'intégrale entre 0 et 1 est nulle. L'unicité de l'écriture a été montrée dans la phase d'analyse. Les deux espaces sont bien supplémentaires dans $\mathcal{C}(R)$.

***Correction 11*** On se donne une fonction $h$ quelconque de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Que faut-il lui soustraire pour qu'elle appartienne à $F$? Il est clair que $x \mapsto h(x) - (h(0) + h'(0))$ appartient à $F$. Si on pose $G$ l'ensemble des fonctions constantes, on vient de montrer que tout élément $h$ de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ s'écrit :

$$h = \underbrace{h - ((h(0) + h'(0))}_{\in F} + \underbrace{(h(0) + h'(0))}_{\in G},$$

ce qui montre l'égalité $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) = F + G$. Comme il est clair que $F$ et $G$ sont en somme directe (ils n'ont que la fonction nulle en commun et l'autre inclusion étant toujours vraie, on a bien $F \cap G = \{0\}$), $G$ est bien un supplémentaire de $F$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

***Correction 12*** On se donne une fonction $h$ quelconque de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Il est clair que $x \mapsto h(x) - (h(0))$ s'annule en 0 et la dérivée de $x \mapsto h(x) - xh'(0)$ s'annule en 0. Ainsi, la fonction $x \mapsto h(x) - h(0) - xh'(0)$ appartient à $F$. Si on pose $G$ l'ensemble des fonctions affines, on vient de montrer que tout élément $h$ de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ s'écrit :

$$h = \underbrace{h - ((h(0) + h'(0))}_{\in F} + \underbrace{(h(0) + xh'(0))}_{\in G},$$

ce qui montre l'égalité $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) = F + G$. Montrons que $F$ et $G$ sont en somme directe. Soit donc $f \in F \cap G$. Alors, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = ax + b$. On a, de plus, $f(0) = 0 = b$ et $f'(0) = 0 = b$ d'où $f = 0$.L'autre inclusion étant toujours vraie, on a bien $F \cap G = \{0\}$. La somme est directe, ainsi $G$ est bien un supplémentaire de $F$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

***Correction 13*** Notons $F$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_3 = 0$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque, alors :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \underbrace{(u_n - u_3)_{n\in\mathbb{N}}}_{\in F} + (u_3)_{n\in\mathbb{N}}.$$

On a montré que toute suite s'écrit comme la somme d'un élément de $F$ et un élément de l'ensemble $G$ des suites constantes. Il est clair que l'ensemble des suites constantes est en somme directe avec $F$ (ils n'ont que la suite nulle en commun et l'autre inclusion étant toujours vraie, on a bien $F \cap G = \{0\}$) donc c'est un supplémentaire de $F$ dans l'ensemble des suites.

***Correction 14*** 1. Il est clair que $F$ contient la fonction nulle donc il est non-vide. Soient $(f,g) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda f + g \in F$. On a :

$$\begin{array}{rl} & (\lambda f + g)(0) + (\lambda f + g)(1) \\ = & \lambda f(1) + g(1) + \lambda f(0) + g(0) \\ = & \lambda\left(f(0) + f(1)\right) + \left(g(0) + g(1)\right) \\ = & \lambda 0 + 0 \text{car } f(0) + f(1) = 0 \text{ et } g(0) + g(1) = 0 \end{array}$$

L'ensemble $F$ est bien un sous-espace vectoriel.

2. Analyse :Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On cherche un réel $\alpha$ tel que $f - \alpha \in F$. On a :

$$(f-\alpha)(0) = f(0) - \alpha \text{ et } (f-\alpha)(1) = f(1) - \alpha,$$

donc :

$$f - \alpha \in F \Leftrightarrow f(0) + f(1) - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{f(0)+f(1)}{2}.$$

Synthèse :Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On écrit :

$$f = \left(\frac{f(0)+f(1)}{2}\right) + \underbrace{\left(f - \frac{f(0)+f(1)}{2}\right)}_{\in F}.$$

Notons $G$ l'ensemble des fonctions constantes. On a montré que toute fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'un élément de $G$ et d'un élément de $F$. De plus, d'après la phase d'analyse, la fonction constante est unique donc l'écriture aussi ce qui montre que $F$ et $G$ sont en somme directe. On a donc $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset F \oplus G$ d'où l'égalité ce qui montre qu'un supplémentaire de $F$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions constantes.

***Correction 15*** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Faisons la division euclidienne de $P$ par $(X-1)(X-2)$ :

$$\exists!(Q,R) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_1[X],\ P(X) = (X-1)(X-2)Q(X) + R(X).$$

On a donc :

$$P(X) = \underbrace{(X-1)(X-2)Q(X)}_{\in F} + \underbrace{R(X)}_{\in \mathbb{R}_1[X]}.$$

On a montré que tout élément de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit comme la somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $\mathbb{R}_1[X]$. De plus, par unicité de la division euclidienne, l'écriture est unique donc $\mathbb{R}_1[X]$ est bien un supplémentaire de $F$ dans $\mathbb{R}[X]$.

***Correction 16*** On remarque tout d'abord que $A \in F$ ce qui montre que $F$ est non vide. Soient maintenant $(P_1, P_2) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $A$ divise $P_1$ donc $\lambda P_1$ et $A$ divise $P_2$. On en déduit que $A$ divise $\lambda P_1 + P_2$ donc $\lambda P_1 + P_2 \in F$ ce qui montre que $F$ est stable par combinaison linéaire. On en déduit que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Soit maintenant $P \in \mathbb{R}[X]$ alors, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ avec $\deg(R) < 2$ tel que :

$$P = AQ + R.$$

Le polynôme $AQ$ est un élément de $F$, on donc montré qu'un polynôme $P$ de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit, de manière unique, comme la somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $\mathbb{R}_2[X]$. On en déduit que $\mathbb{R}_2[X]$ est un supplémentaire de $F$ dans $\mathbb{R}[X]$.

***Correction 17*** Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ quatre réels tels que $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 + \alpha_4 f_4 = 0$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha_1 \cos x + \alpha_2 x \cos x + \alpha_3 \sin x + \alpha_4 x \sin x = 0.$$

Pour $x = 0$, on obtient $\alpha_1 = 0$. On pose ensuite $x = \pi$, ce qui donne $\pi\alpha_2 = 0$ donc $\alpha_2 = 0$. On évalue ensuite en $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$, on obtient $\alpha_3 + \frac{\pi}{2}\alpha_4 = 0$ et $-\alpha_3 - \frac{3\pi}{2}\alpha_4 = 0$ ce qui implique $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ et la famille est par conséquent libre.

***Correction 18*** Soient $\lambda, \mu, \nu$ trois réels tels que la suite $(\lambda + \mu n^2 + \nu 2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit nulle et montrons que $\lambda = \mu = \nu = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lambda + \mu n^2 + \nu 2^n = 0$$

On a donc, pour $n = 0, 1$ et $2$,

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda + \nu = 0 \\ \lambda + \mu + 2\nu = 0 \\ \lambda + 4\mu + 4\nu = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = -\nu \\ \mu = \lambda \\ \lambda = 0 \end{array}\right.$$

d'où $\lambda = \mu = \nu = 0$ et la famille est bien libre.

***Correction 19*** Soient $\alpha, \beta, \gamma$ trois réels tels que $\alpha(x+y) + \beta(y+z) + \gamma(z+x) = 0$, on a alors :

$$(\alpha + \gamma)x + (\alpha + \beta)y + (\beta + \gamma)z = 0$$

et comme la famille $(x, y, z)$ est libre, on a $\alpha + \gamma = \alpha + \beta = \beta + \gamma = 0$ ce qui impose $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

***Correction 20***

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} (a,b,c) \in F_1 &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a + 2b + c &=& 0 \\ 2a + b + 3c &=& 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3b - c &=& 0 \\ 3a + 5c &=& 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow (a,b,c) = \frac{c}{3}(-5, 1, 3). \end{aligned}$$

   Par équivalence, on a montré: $F_1 = \mathrm{Vect}(-5, 1, 3)$ donc $F_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et le vecteur $(-5, 1, 3)$ est une famille génératrice de $F_1$.

2. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} (a,b,c,d) \in F_2 &\Leftrightarrow a + 3b - c = d \\ &\Leftrightarrow (a,b,c,d) = a(1,0,0,1) + b(0,1,0,3) + c(0,0,1,-1). \end{aligned}$$

   Par équivalence, on a montré $F_2 = \mathrm{Vect}\,((1,0,0,1), (0,1,0,3), (0,0,1,-1))$ donc $F_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et une famille génératrice de $F_2$ est $((1,0,0,1), (0,1,0,3), (0,0,1,-1))$.

3. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. On raisonne par équivalence :

$$P \in F_3 \Leftrightarrow P(X^2) = (X^3 + 1)P(X).$$

   On écrit $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on a alors

$$\begin{aligned} P \in F_3 &\Leftrightarrow aX^6 + bX^4 + cX^2 + d = (X^3 + 1)(aX^3 + bX^2 + cX + d) \\ &\Leftrightarrow aX^6 + bX^4 + cX^2 + d \\ &\quad = aX^6 + bX^5 + cX^4 + (a+d)X^3 + bX^2 + cX + d \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b &=& 0 \\ b &=& c \\ a + d &=& 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow b = c = 0 \text{ et } a = -d \\ &\Leftrightarrow P = a(X^3 - 1) \end{aligned}$$

   On a montré, par équivalence, $F_3 = \mathrm{Vect}(X^3 - 1)$ ce qui montre que $F_3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et il est donc engendré par $X^3 - 1$.

***Correction 21*** Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que la fonction $\sum_{k=1}^{4} \lambda_k f_k$ soit nulle. Montrons que tous ces réels sont nuls.
On pose $g(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos(kx)$. Cette fonction étant nulle, on a :

$$g(0) = g(\pi) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

Les égalités précédentes donnent le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +\lambda_4 & = & 0 \\ -\lambda_1 & +\lambda_2 & -\lambda_3 & +\lambda_4 & = & 0 \\ & -\lambda_2 & & +\lambda_4 & = & 0 \\ \dfrac{1}{2}\lambda_1 & -\dfrac{1}{2}\lambda_2 & -\lambda_3 & -\frac{1}{2}\lambda_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

On fait $L_2 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 + \dfrac{1}{2}L_1$, on obtient le système équivalent suivant :

$$\left\{\begin{array}{llllll} \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & +\lambda_4 & = & 0 \\ & 2\lambda_2 & & +2\lambda_4 & = & 0 \\ & -\lambda_2 & & +\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_1 & & -\lambda_3 & & = & 0 \end{array}\right.$$

On en déduit que $\forall i \in [\![1,4]\!],\ \lambda_i = 0$ donc la famille est libre.

***Correction 22*** On sait que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x$ réel tel que $f(x) = \lambda_x x$. Montrons que $\lambda_x$ ne dépend pas de $x$. Soient $x \in E$ non nul et $\alpha$ un réel, alors $f(\alpha x) = \lambda_{\alpha x}\alpha x$ et comme $f$ est linéaire, $f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha\lambda_x x$ donc, comme $x \neq 0_E$, $\lambda_x = \lambda_{\alpha x}$; autrement dit, $\lambda_x = \lambda_y, \forall y \in \text{vect}(x)$.

Soit maintenant $y \notin \text{vect}(x)$, alors la famille $(x,y)$ est libre. On a :

$$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

d'où :

$$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$$

et la famille étant libre, on a $\lambda_x - \lambda_{x+y} = 0 = \lambda_y - \lambda_{x+y}$ ce qui montre que, pour tout $y \notin \text{vect}(x)$, $\lambda_x = \lambda_y$. On a montré, par disjonction de cas, que :

$$\forall y \in E, \lambda_x = \lambda_y$$

donc $\lambda_x$ ne dépend pas de $x$ et $f$ est donc bien une homothétie.

***Correction 23*** Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ tel que $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0_E$. On applique $f^{n-1}$ à l'égalité, on obtient $\lambda_0 f^{n-1}(x_0) = 0_E$ car pour tout $k \geqslant n$, $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $f^k(x_0) = 0_E$. On a supposé $f^{n-1}(x_0) \neq 0$, on a donc $\lambda_0 = 0$.

L'égalité devient $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0_E$. On applique maintenant $f^{n-2}$ à l'égalité et on obtient $\lambda_1 f^{n-1}(x_0) = 0_E$ donc $\lambda_1 = 0$. En itérant le procédé, on montre que tous les coefficients sont nuls donc la famille est libre.

***Correction 24***

1. non car $\varphi_1(2,2) = 4 = 4\varphi_1(1,1) \neq 2\varphi_1(1,1) = 2$
2. non car $\varphi_2(0) = 1 \neq 0$.
3. non car $\varphi_3(f) + \varphi_3(-f) = (0, 2|f(1)|) \neq (0,0)$.
4. Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi_4(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(0) + (\lambda P + Q)'(1) \\ &= \lambda P(0) + Q(0) + (\lambda P' + Q')(1) \\ &= \lambda P(0) + Q(0) + \lambda P'(1) + Q'(1) \\ &= \lambda \underbrace{(P(0) + P'(1))}_{=\varphi_4(P)} + \underbrace{(Q(0) + Q'(1))}_{=\varphi_4(Q)} \\ &= \lambda\varphi_4(P) + \varphi_4(Q) \end{aligned}$$

donc $\varphi_4$ est bien linéaire.

5. non car $\varphi 5(2) = 4 \neq 2\varphi_5(1) = 2$.
6. Soit $(f,g) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi_6(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)\left(\frac{1}{4}\right) - \int_1^2 (\lambda f + g)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda f\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{1}{4}\right) - \int_1^2 (\lambda f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda f\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{1}{4}\right) - \left(\lambda\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 g(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &\text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \lambda f\left(\frac{1}{4}\right) + g\left(\frac{1}{4}\right) - \lambda\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^2 g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda\underbrace{\left(f\left(\frac{1}{4}\right) - \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t\right)}_{=\varphi_6(f)} + \underbrace{\left(g\left(\frac{1}{4}\right) - \int_1^2 g(t)\,\mathrm{d}t\right)}_{=\varphi_6(g)} \\ &= \lambda\varphi_6(f) + \varphi_6(g) \end{aligned}$$

7. Soit $(f,g) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi_7(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)\left(\frac{3}{4}\right) + (\lambda f + g)(5) \\ &= \lambda f\left(\frac{3}{4}\right) + g\left(\frac{3}{4}\right) + \lambda f(5) + g(5) \\ &= \lambda\underbrace{\left(f\left(\frac{3}{4}\right) + f(5)\right)}_{=\varphi_7(f)} + \underbrace{\left(g\left(\frac{3}{4}\right) + g(5)\right)}_{\varphi_7(g)} \\ &= \lambda\varphi_7(f) + \varphi_7(g) \end{aligned}$$

L'application $\varphi_7$ est donc linéaire.

8. Soit $(f,g) \in \mathcal{C}(R)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi_8(\lambda f + g)$ est l'application qui à $t$ associe

$$\frac{(\lambda f + g)(t)}{1+t^2}.$$

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi_8(\lambda f + g)(t) &= \frac{(\lambda f + g)(t)}{1+t^2} \\ &= \frac{\lambda f(t) + g(t)}{1+t^2} \\ &= \lambda \underbrace{\frac{f(t)}{1+t^2}}_{=\varphi_8(f)(t)} + \underbrace{\frac{g(t)}{1+t^2}}_{=\varphi_8(g)(t)} \\ &= \lambda\varphi_8(f)(t) + \varphi_8(g)(t)\end{aligned}$$

Ainsi, les fonctions $\varphi_8(\lambda f + g)$ et $\lambda\varphi_8(f) + \varphi_8(g)$ prennent les mêmes valeurs en tout $t$ réel, elles sont donc égales, ce qui montre que $\varphi_8$ est linéaire.

***Correction 25*** On note $\varphi_i$ l'application linéaire de la question i.

1. non car $\varphi_1(2) = 8 \neq 2\varphi_1(1)$.

2. non car $\varphi_2(0) \neq 0$.

3. non car $\varphi_3(-1) + \varphi_3(1) \neq 0$.

4. Soit $X = (x,y)$ et $Y = (x',y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi_4(\lambda X + Y) &= \varphi_4(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= 3(\lambda x + x') + 5(\lambda y + y') \\ &= \lambda \underbrace{(3x+5y)}_{=\varphi_4(x,y)} + \underbrace{(3x'+5y')}_{=\varphi_4(x',y')} \\ &= \lambda\varphi_4(X) + \varphi_4(Y)\end{aligned}$$

L'application $\varphi_4$ est linéaire. On a $\mathrm{Im}\varphi_4 \subset \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, le vecteur $\left(\frac{x}{3}, 0\right)$ est un antécédent de $x$ donc on a l'autre inclusion $\mathbb{R} \subset \mathrm{Im}\varphi_4$ d'où l'égalité.

On cherche maintenant à déterminer le noyau. Soit $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}X \in \mathrm{Ker}(\varphi_4) &\Leftrightarrow \varphi_4(x,y) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x + 5y = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x = -5y \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x \\ &\Leftrightarrow X = x\left(1, -\frac{3}{5}\right) \\ &\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(1, -\frac{3}{5}\right) \\ &\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\,(5,-3)\end{aligned}$$

Par équivalence, on a montré $\mathrm{Ker}(\varphi_4) = \mathrm{Vect}\,(5,-3)$.

5. non car $\varphi_5(-1,-1) = \varphi_5(1,1) \neq -\varphi_5(1,1)$.

6. non car $\varphi_6(3,3) \neq 3\varphi_6(1,1)$ puisque l'image du sinus est $[-1,1]$.

7. Soit $X = (x,y)$ et $Y = (x',y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi_7(\lambda X + Y) &= \varphi_7(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= (-(\lambda x + x'), \lambda y + y') \\ &= (-\lambda x - x', \lambda y + y') \\ &= \lambda \underbrace{(-x,y)}_{=\varphi_7(x,y)} + \underbrace{(-x',y')}_{=\varphi_7(x',y')} \\ &= \lambda\varphi_7(X) + \varphi_7(Y)\end{aligned}$$

l'application $\varphi_7$ est donc linéaire. On a $\mathrm{Im}\varphi_7 \subset \mathbb{R}^2$. De plus, si on prend $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors $(x,y) = \varphi_7(-x,y)$ donc tout élément de $\mathbb{R}^2$ admet un antécédent par $\varphi_7$ ce qui montre l'autre inclusion et donc l'égalité.
Soit $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors $X \in \mathrm{Ker}(\varphi_7) \Leftrightarrow \varphi_7(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (-x,y) = (0,0) \Leftrightarrow x = y = 0$. Par équivalence, on a montré $\ker(\varphi_7) = \{(0,0)\}$.

8. L'application est linéaire par linéarité de la dérivation. Toute fonction continue admet une primitive donc l'application est surjective et son image est donc l'ensemble des fonctions continues. Le noyau est l'ensemble des fonctions dont la dérivée est nulle c'est-à-dire l'ensemble des fonctions constantes.

9. Soit $x$ et $y$ deux réels et $\lambda$ un réel. On a

$$\begin{aligned}\varphi_9(\lambda x + y) &= \left(2(\lambda x + y), \frac{\lambda x + y}{\pi}, \sqrt{2}(\lambda x + y)\right) \\ &= \lambda \underbrace{(2x, \frac{x}{\pi}, x\sqrt{2})}_{\varphi_9(x)} + \underbrace{\left(2y, \frac{y}{\pi}, \sqrt{2}y\right)} \\ &= \lambda\varphi_9(x) + \varphi_9(y).\end{aligned}$$

L'application est linéaire. On a $\mathrm{Im}\varphi_9 \subset \mathrm{vect}\left(2, \frac{1}{\pi}, \sqrt{2}\right)$ et tout élément de Vectvect $\left(2, \frac{1}{\pi}, \sqrt{2}\right)$ s'écrit $\left(2a, \frac{a}{\pi}, \sqrt{2}a\right)$ donc admet pour antécédent le réel $a$.

On cherche à déterminer les éléments qui s'envoient sur $(0,0,0)$. Il est clair que seul le réel 0 s'envoie sur $(0,0,0)$ donc $\mathrm{Ker}(\varphi_9) = \{0\}$.

10. Soit $x$ et $y$ deux réels et $\lambda$ un réel. On a :

$$\begin{aligned}\varphi_{10}(\lambda x + y) &= \ln\left(3^{(\lambda x+y)\sqrt{2}}\right)\\ &= \ln\left(3^{\lambda x\sqrt{2}+y\sqrt{2}}\right)\\ &= \ln\left(3^{\lambda x\sqrt{2}}.3^{y\sqrt{2}}\right)\\ &= \ln\left(3^{\lambda x\sqrt{2}}\right) + \ln\left(3^{y\sqrt{2}}\right)\\ &= \ln\left(\left(3^{x\sqrt{2}}\right)^{\lambda}\right) + \ln\left(3^{y\sqrt{2}}\right)\\ &= \lambda \underbrace{\ln\left(3^{x\sqrt{2}}\right)}_{=\varphi_{10}(x)} + \underbrace{\ln\left(3^{y\sqrt{2}}\right)}_{=\varphi_{10}(y)}\\ &= \lambda\varphi_{10}(x) + \varphi_{10}(y)\end{aligned}$$

donc l'application $\varphi_{10}$ est linéaire. On a $\ln(3^{x\sqrt{2}}) = x\sqrt{2}\ln(3)$. Étant donné un réel $y$, on a $x = \frac{y}{\sqrt{2}\ln(3)}$ un antécédent de $y$ par $\varphi_{10}$, l'application est donc surjective et l'image est donc égale à $\mathbb{R}$.

On a $\varphi_{10}(x) = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{2}\ln(3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc le noyau est $\{0\}$.

11. non car $\varphi_{11}(0,1) + \varphi_{11}(1,0) = 0 + 0 \neq \varphi_{11}(1,1) = \frac{1}{2}$.

12. L'application est linéaire par linéarité de l'intégrale. L'image est $\{x \mapsto \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. En effet, on a clairement

$$\mathrm{Im}(\varphi_{12}) \subset \{x \mapsto \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

car $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est un réel. Pour l'inclusion réciproque, on se donne une fonction de la forme $x \mapsto e^{-x}\lambda$. Alors, l'application constante égale à $\lambda$ est un antécédent de la fonction par $\varphi_{12}$ donc cette fonction appartient bien à l'image ce qui montre l'inclusion réciproque et donc l'égalité.

Pour déterminer le noyau, on se donne $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et on raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned} f \in \mathrm{Ker}(\varphi_{12}) &\Leftrightarrow \varphi_{12}(f) = 0 \text{ ( la fonction nulle)}\\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\\ &\Leftrightarrow \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ car l'exponentielle ne s'annule pas}\end{aligned}$$

ainsi le noyau est l'ensemble $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \int_0^1 f(t)dt = 0\}$.

13. Elle n'est pas linéaire car $\varphi_{13}(1,0) + \varphi_{14}(0,1) = (1,0) + (0,1) \neq \varphi_{14}(1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

14. non elle n'est pas linéaire car si on note $f_1 : t \mapsto 1 - t$ et $f_2 : t \mapsto t$, on a $\varphi_{16}(f_1) = 1 = \varphi_{16}(f_2)$ mais $\varphi_{14}(f_1 + f_2) = 1 \neq \varphi_{16}(f_1) + \varphi_{16}(f_2)$.

15. Le plus simple est de résoudre le système. On trouve que l'unique solution est $\left(\frac{x+y}{12}, \frac{y-2x}{4}\right)$. L'application associe donc à $(x,y)$ le couple $\left(\frac{x+y}{12}, \frac{y-2x}{4}\right)$, elle est linéaire.

Le système étant inversible, l'application est bijective (sa bijection réciproque vaut $(u,v) \mapsto (3u - v, 6u + 2v)$. On en déduit que l'unique antécédent de $(0,0)$ est $(0,0)$ donc oui, $\ker\varphi_{17} = \{(0,0)\}$ et, comme elle est surjective, $\mathrm{Im}\varphi_{15} = \mathbb{R}^2$.

16. non elle n'est pas linéaire car si on prend la fonction constante $f = 1$, on a $\varphi_{19}(-f) = \ln(2) = \varphi_{19}(f)$ donc $\varphi_{16}(-f) \neq -\varphi_{19}(f)$.

17. La linéarité se montre comme pour $\varphi_6$ de l'ex1, le noyau est l'ensemble des fonctions telles que $f'(1/2) + \int_0^1 f(t)dt = 0$, l'image est $\mathbb{R}$ car tout réel $\lambda$ admet pour antécédent la fonction constante égale à $\lambda$.

***Correction 26*** Montrons que l'application est linéaire. Soient $P_1, P_2$ deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$f(\lambda P_1 + P_2) = (\lambda P_1 + P_2) - X(\lambda P_1 + P_2)' = \lambda(P_1 - XP_1') + (P_2 - XP_2') = \lambda f(P_1) + f(P_2).$$

L'application $f$ est bien linéaire.

Déterminons son noyau. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$. On raisonne par équivalence :

$$P \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(P) = 0 \Leftrightarrow P = XP' \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=1}^n k a_k X^k.$$

Par unicité des coefficients, on a :

$$f(P)=0 \Leftrightarrow a_0=0 \text{ et } \forall k=1\dots n, a_k=ka_k$$

d'où :

$$\forall k\in [\![0,n]\!], k\neq 1,\ a_k=0.$$

Par équivalence, on a montré : $\mathrm{Ker} f=\mathrm{vect}(X)$.

Déterminons l'image de $f$. Soit $Q\in\mathbb{R}[X]$, alors $Q=\sum_{k=0}^{n} b_kX^k$ avec $n\in\mathbb{N}$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} Q\in \mathrm{Im}(f) &\Leftrightarrow \exists P\in\mathbb{R}[X], f(P)=Q\\ &\Leftrightarrow \exists P=\sum_{k=0}^{m} a_kX^k, f(P)=Q. \end{aligned}$$

On a $f(P)=\sum_{k=0}^{m} a_kX^k-\sum_{k=0}^{m} ka_kX^k=\sum_{k=0}^{m}(1-k)a_kX^k$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} Q\in \mathrm{Im}(f) &\Leftrightarrow \exists a_k\in\mathbb{R},\forall k\in[\![0,n]\!],(1-k)a_k=b_k\\ &\Leftrightarrow b_1=0 \end{aligned}$$

Un polynôme de $\mathrm{Im} f$ est donc de la forme $a_0+\sum_{k=2}^{n} a_kX^k$, l'image est donc engendrée par $1,X^2,X^3,\dots$.

***Correction 27*** Soit $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors :

$$\begin{aligned} f(\lambda P+Q) &= (\lambda P+Q)-X(\lambda P+Q)'-(\lambda P+Q)(0)\\ &=(\lambda P+Q)-X(\lambda P'+Q')-(\lambda P(0)+Q(0))\\ &=\lambda(P-XP'-P(0))+(Q-XQ'-Q(0))\\ &=\lambda f(P)+f(Q) \end{aligned}$$

et l'application est linéaire.
Déterminons son noyau. Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. On raisonne par équivalence :

$$P\in\mathrm{Ker}(f)\Leftrightarrow f(P)=0=P-XP'-P(0).$$

On écrit $P=\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$, alors $P'=\sum_{k=1}^{n} ka_kX^{k-1}$. On a donc :

$$f(P)=\sum_{k=0}^{n} a_kX^k-X\sum_{k=1}^{n} ka_kX^{k-1}-a_0=\sum_{k=0}^{n} a_kX^k-\sum_{k=1}^{n} ka_kX^k-a_0$$

On le réécrit en enlevant le premier terme de la première somme:

$$f(P)=a_0+\sum_{k=1}^{n} a_kX^k-\sum_{k=1}^{n} ka_kX^k-a_0=\sum_{k=1}^{n}(1-k)a_kX^k$$

Ainsi, on a, par unicité des coefficients :

$$P\in\mathrm{Ker}(f)\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}(1-k)a_kX^k\Leftrightarrow a_k=0,\forall k=2\cdots n\Leftrightarrow P=a_1X+a_0.$$

Par équivalence, on a montré que le noyau est $\mathrm{Ker} f=\mathbb{R}_1[X]$.

Déterminons l'image. On cherche les polynômes $Q$ possédant un antécédent. D'après le travail déjà effectué, on sait que :

$$Q\in\mathrm{Im}(f)\Leftrightarrow \exists(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n,\ \sum_{k=1}^{n}(1-k)a_kX^k=Q.$$

. De tels réels existent à la condition que $Q$ n'ait pas de coefficient constant et le coefficient devant son terme de degré 1 soit nul. Ainsi :

$$\mathrm{Im} f=\{Q\in\mathbb{R}_n[X], Q(0)=0=Q'(0)\}.$$

L'application n'est ni injective, ni surjective, elle n'est pas bijective.

***Correction 28*** L'application est clairement linéaire par linéarité de l'intégrale.
Déterminons son noyau, soit $P=a_2X^2+a_1X+a_0\in\mathbb{R}_2[X]$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} P\in\mathrm{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(P)=0\Leftrightarrow \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t=0\Leftrightarrow \int_0^1 (a_2t^2+a_1t+a_0)\,\mathrm{d}t=0\\ &\Leftrightarrow \frac{a_2}{3}+\frac{a_1}{2}+a_0=0 \end{aligned}$$

Le noyau est donc l'ensemble $\left\{a_2X^2+a_1X+a_0\in\mathbb{R}_2[X], \frac{a_2}{3}+\frac{a_1}{2}+a_0=0\right\}$.
Déterminons l'image, soit $a\in\mathbb{R}$, alors il est clair que le polynôme constant $P=a$ a pour image $a$, par conséquent, tout réel possède un antécédent par $f$ et l'image est donc $\mathbb{R}$.

***Correction 29*** C'est une application linéaire et son noyau est l'ensemble des matrices de trace nulle.

Cherchons à déterminer une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$. Pour cela, on se donne $M\in M_n(\mathbb{K})$ et on raisonne par équivalence. On note $M=(a_{ij})_{1\leqslant i,j,\leqslant n}$. On peut aussi écrire

$$M=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}E_{ij},$$

où $E_{ij}$ désigne la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ avec des zéros partout sauf le coefficient d'indice $(i,j)$ qui vaut 1.

On a

$$\begin{aligned}
M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \quad & \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(M) = 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0 \\
& \Leftrightarrow a_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} \\
& \Leftrightarrow M = \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ (i,j)\neq(n,n)}} a_{ij}E_{ij} - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{nn} \\
& \quad \text{on a remplacé } a_nn \text{ par son expression} \\
& \Leftrightarrow M = \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} a_{ij}E_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}E_{ii} - \sum_{i=1}^{n} a_{ii}E_{nn} \\
& \text{(on coupe la somme pour faire apparaître les termes diagonaux} \\
& = M = \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} a_{ij}E_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}\left(E_{ii} - E_{nn}\right) \\
& \Leftrightarrow M \in \mathrm{Vect}\left(\{E_{i,j}, i\neq j\} \cup \{E_{ii} - E_{nn}\}\right)
\end{aligned}$$

Par équivalence, on a montré que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est engendré par la famille $(E_{i,j}, i\neq j, E_{ii} - E_{nn})$. De plus, cette famille est une base car les coefficients qui apparaissent dans la combinaison linéaire sont uniques (ce sont les coefficients de la matrice). On peut donc affirmer que la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est $n^2 - 1$.

En effet, il y a $n^2 - n$ termes dans la première somme et $n-1$ dans la deuxième.

L'image de Tr est un ssev de $\mathbb{R}$. On sait que $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) \neq \{0\}$ (car, par exemple, $\mathrm{Tr}(I_n) = n$) donc il n'est pas réduit à 0. Comme $\mathbb{R}$ est de dimension 1, il y a nécessairement égalité, cela implique $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})$ est donc de dimension 1.

***Correction 30*** Il est clair que l'application est linéaire. Soit maintenant $Q = \sum_{k=0}^{n} b_kX^k$, existe-t-il $P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ tel que $P - P' = Q$? Nous allons chercher à exprimer les coefficients $a_k$ de $P$ en fonction des coefficients $b_k$ de $Q$. On a :

$$\begin{aligned}
P - P' \quad & = \textstyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k - \sum_{k=1}^{n} ka_kX^{k-1} \\
& = a_nX^n + \textstyle\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - (k+1)a_{k+1})X^k.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$a_n = b_n \text{ et } a_k - (k+1)a_{k+1} = b_k, \forall k = 0\dots n-1$$

On a $a_n = b_n$ et $b_{n-1} = a_{n-1} - na_n$ donc $a_{n-1} = b_{n-1} + nb_n$. Par ailleurs, on a $a_{n-2} - (n-1)a_{n-1} = b_{n-2}$ et $a_{n-1} - na_n = b_{n-1}$ donc

$$a_{n-2} - (n-1)a_{n-1} + (n-1)a_{n-1} - n(n-1)a_n = b_{n-2} - (n-1)b_{n-1}$$

ou encore, $a_{n-2} = b_{n-2} + (n-1)b_{n-1} + n(n-1)b_n$. Par récurrence descendante, on montre que :

$$a_{n-k} = b_{n-k} + (n-k+1)b_{n-k+1} + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k+1)b_n = \sum_{i=0}^{k} \frac{(n-k+i)!}{(n-k)!} b_{n-k+i}$$

On a montré que pour tout polynôme $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_kX^k$, il existe un unique polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ tel que $P - P' = Q$. L'application est donc bijective et sa réciproque est l'application qui envoie le polynôme $\sum_{k=0}^{n} b_kX^k$ sur $\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$, avec $a_k = \sum_{i=0}^{n-k} \dfrac{(k+i)!}{k!!} b_{k+i}$.

***Correction 31*** Soient $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P_1 + P_2) \quad & = (\lambda P_1 + P_2) + (\lambda P_1 + P_2)' \\
& = (\lambda P_1 + P_2) + (\lambda P_1' + P_2') \text{par linéarité de la dérivation} \\
& = \lambda(P_1 + P_1') + (P_2 + P_2') \\
& = \lambda\varphi(P_1) + \varphi(P_2)
\end{aligned}$$

L'application est bien linéaire.

Soit maintenant $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_kX^k$, existe-t-il $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ tel que $Q + Q' = P$? Si un tel $Q$ existe, on a :

$$\begin{aligned}
Q'(X) \quad & = \sum_{k=0}^{n} ka_kX^{k-1} \\
& = \sum_{k=1}^{n} ka_kX^{k-1} \\
& = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)a_{j+1}X^j
\end{aligned}$$

Comme $j$ est une variable muette, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
Q'(X) + Q(X) \quad & = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}X^k + \sum_{k=0}^{n} a_kX^k \\
& = a_nX^n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k + (k+1)a_{k+1})X^k
\end{aligned}$$

L'égalité $Q' + Q = P$ est équivalente, en identifiant les coefficients, à $a_n = b_n$ et $\forall k \in [\![0, n-1]\!] a_k + (k+1)a_{k+1} = b_k$.

Le polynôme $P$ admet donc un antécédent par $\varphi$ si le système suivant, d'inconnues $(a_0,\ldots,a_n)$, admet une solution :

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} a_0 & +a_1 & & & & & = & b_0\\ & a_1 & +2a_2 & & & & = & b_1\\ & & & \ddots & & & \vdots & \\ & & & & a_{n-1} & +na_n & = & b_{n-1}\\ & & & & & a_n & = & b_n \end{array}\right.$$

Le système est échelonné et ses pivots sont non nuls, il admet donc une unique solution. Cela montre que $P$ admet un unique antécédent $Q$ donc l'application $\varphi$ est bijective.

***Correction 32*** **Injectivité** : Les éléments du noyau sont les fonctions $f$ telles que $f+f'=0$. On a, par exemple, $x\mapsto e^{-x}$ donc le noyau n'est pas réduit à $0_E$ et l'application n'est pas injective.
**Surjectivité**: Soit $g\in E$, existe-t-il $f\in E$ telle que $f+f'=g$? Un antécédent de $g$ est une solution de l'équation différentielle $y'+y=g$. On la résout en utilisant la méthode de la variation de la constante. On cherche donc une solution sous la forme $x\mapsto\lambda(x)e^{-x}$. En injectant dans l'équation, on doit avoir $\lambda'(x)e^{-x}=g(x)$ c'est-à-dire $\lambda'(x)=e^xg(x)$.

La fonction $x\mapsto e^xg(x)$ est continue, elle admet donc une primitive $h$. La fonction $x\mapsto h(x)e^{-x}$ est alors une solution de l'équation différentielle donc un antécédent de $g$ par $\varphi$.

***Correction 33*** On écrit :

$$\left(id_E+f+f^2+\ldots+f^{n-1}\right)(id_E-f)=id_E-f^n.$$

Comme $f^n=0_{\mathcal{L}(E)}$, l'application $h=id_E+f+f^2+\ldots+f^{n-1}$ vérifie $h\circ g=id_E$. Il est clair qu'on a également $g\circ h=id_E$ donc $g$ est bijective et son inverse est $h$.

***Correction 34***

1. On a $f\circ(-f)=id_E$, $f$ est donc un automorphisme (et son inverse et $-f$).
2. On suppose qu'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\lambda a+\mu f(a)=0_E$. En appliquant $f$ qui est linéaire, on obtient $\lambda f(a)-\mu a=0_E$. On a donc

   $$\lambda^2a=-\lambda\mu f(a)=-\mu\lambda f(a)=-\mu^2a.$$

   On a donc $(\lambda^2+\mu^2)a=0_E$. Comme $a\neq 0_E$, on a $\lambda^2+\mu^2=0$ donc $\lambda=\mu=0$ et la famille est bien libre.
3. Il suffit de montrer qu'une base de $G_a$ est stable par $f$, on aura alors la stabilité de $G_a$ par linéarité de $f$.

   D'après la question précédente, $(a,f(a))$ est libre, c'est donc une base de $G_a$.

   - $f(a)\in G_a$
   - $f(f(a))=-a\in G_a$

   donc $\forall x\in\{a,f(a)\}, f(x)\in G_a$. On en déduit que $G_a$ est stable par $f$.
4. Soit $F$ un ssev contenant $a$ et stable par $f$. On a donc $f(a)\in F$ donc la famille $(a,f(a))$ appartient à $F$. On en déduit, comme c'est un ssev, qu'il contient $G_a$.
5. On prend $f:(x,y)\mapsto(-y,x)$. On a alors $f^2(x,y)=f(-y,x)=(-x,-y)=-(x,y)$ donc $f^2=-id_{\mathbb{R}^2}$.

***Correction 35*** On commence par regarder la linéarité. Soit $f,h$ deux fonctions continues et $\lambda\in\mathbb{R}$, alors $\varphi(\lambda f+h)$ est définie par

$$\forall x\in\mathbb{R},\varphi(\lambda f+h)(x)=\int_0^x t\left(\lambda f(t)+h(t)\right)\,\mathrm{d}t=\lambda\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x tg(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\varphi(\lambda f+h)(x)=\lambda\varphi(f)(x)+\varphi(h)(x)$ donc $\varphi(\lambda f+h)=\lambda\varphi(f)+\varphi(h)$. On en déduit que $\varphi$ est linéaire.

Par ailleurs, la fonction $\varphi(f)$ est dérivable, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ donc $\varphi$ est bien un endomorphisme de $E$.

Pour savoir s'il est injectif, on regarde son noyau. Soit $f\in E$ telle que $\varphi(f)\equiv 0$. Alors

$$\forall x\in\mathbb{R},\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

Notons $F$ une primitive de $t\mapsto tf(t)$. On a donc

$$\forall x\in\mathbb{R}, F(x)-F(0)=0,$$

donc $F$ est constante. Comme elle est dérivable, on en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=0$ donc $xf(x)=0$. On obtient $\forall x\in\mathbb{R}^\star, f(x)=0$ et comme $f$ est continue, elle est nulle sur tout $\mathbb{R}$. On a montré que le noyau de $\varphi$ est réduit à la fonction nulle donc $\varphi$ est injective.

Elle ne peut pas être surjective car l'image de $\varphi$ est inclus dans l'ensemble des fonctions dérivables (et pas seulement continues). Si on suppose, par exemple, que la valeur absolue admet un antécédent $f$ par $\varphi$, on a

$$\forall x\in\mathbb{R},\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=|x|\,.$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=\varphi(f)'(x)=0.f(0)0$. Pourtant, $\dfrac{|x|}{x}$ n'admet pas de limite en 0.

***Correction 36*** 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) &= \varphi\left((\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \\
&= \left((\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) - (\lambda u_n + v_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \left(\lambda(u_{n+1} - u_n) + (v_{n+1} - v_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \lambda(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_{n+1} - v_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \lambda\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \varphi((v_n)_{n\in\mathbb{N}})
\end{aligned}$$

On a donc bien $\varphi$ linéaire.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On raisonne par équivalence

$$\begin{aligned}
(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ker\varphi &\Leftrightarrow \varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (0)_{n\in\mathbb{N}} \\
&\Leftrightarrow (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n
\end{aligned}$$

On en déduit que $\ker(\varphi) = \{$ suites constantes$\}$.

3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on cherche $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On pose $u_0 = 0$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k$. Alors $\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour $n = 0$, on obtient $u_1 - u_0 = u_1 = v_0$ et pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = v_n$, on a donc bien trouvé un antécédent de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\varphi$, l'application est bien surjective. L'application n'est pas un automorphisme puisqu'elle n'est pas injective (noyau non réduit au vecteur nul).

***Correction 37*** 1. On doit montrer que $\varphi_a$ est linéaire. On se donne donc deux polynômes $P$ et $Q$ de $\mathbb{R}[X]$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$. On veut montrer que

$$\varphi_a(\lambda P + Q) = \lambda\varphi_a(P) + \varphi_a(Q).$$

On a:

$$\begin{aligned}
\varphi_a(\lambda P + Q) &= (X^2-1)\left(\lambda P + Q\right)'(X) - aX(\lambda P + Q) \\
&= (X^2-1)\left(\lambda P' + Q'\right)(X) - aX(\lambda P + Q) \\
&= \lambda(X^2-1)P' + (X^2-1)Q' - \lambda aXP - aXQ \\
&= \lambda\underbrace{\left((X^2-1)P' - aXP\right)}_{=\varphi_a(P)} + \underbrace{\left((X^2-1)Q' - aXQ\right)}_{=\varphi_a(Q)} \\
&= \lambda\varphi_a(P) + \varphi_a(Q)
\end{aligned}$$

L'application $\varphi_a$ est bien linéaire, c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Pour déterminer le degré de $\varphi_a(P)$ en fonction de $P$, on écrit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $a_n \neq 0$ (et donc $\deg(P) = n$).

On a $P'(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$. On remarque que le terme de plus haut degré de $\varphi_a(P)$ sera égal à $na_nX^{n+1} - aa_nX^{n+1}$. Si $a \neq n$, on a alors $(n-a)a_n \neq 0$ et $\deg(\varphi_a(P)) = \deg(P) + 1$. Si $a = n$, on peut simplement dire que $\varphi_a(P) \leqslant \deg(P)$ mais on ne peut donner précisément son degré. En effet, le terme en $X^n$ vaudra $(n-1-a)a_{n-1}X^n$ et on ne sait pas si $a_{n-1}$ est nul ou non (contrairement à $a_n$ que l'on sait être non nul car c'est le terme dominant de $P$).

2. On suppose $a \notin \mathbb{N}$, on a donc, pour tout polynôme $P \neq 0$, $\varphi_a(P) = \deg(P) + 1 \geqslant 1$. Ainsi, seul le polynôme nul s'envoie sur 0, le noyau de $\varphi_a$ est donc réduit à $\{0\}$ ce qui montre que $\varphi_a$ est injectif.

Pour autant, $\varphi_a$ n'est pas bijectif car un polynôme constant non nul n'admet pas d'antécédent par $\varphi_a$. En effet, $\forall P \neq$, on a $\deg(\varphi_a(P)) \geqslant 1$ donc $\deg(\varphi_a(P))$ n'est jamais nul.

Si on anticipe sur les applications en dimension finie, cette situation (endomorphisme injectif mais non bijectif) ne peut se produire qu'en dimension infinie.

***Correction 38***

$\boxed{\Rightarrow}$On suppose $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. Montrons $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. Il est clair que $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) \subset E$, montrons l'autre inclusion. Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$. Comme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$, il existe $a \in E$ tel que $f(x) = f^2(a)$ ce que l'on peut réécrire $f\left(x - f(a)\right) = 0_E$. On a $x - f(a) \in \mathrm{Ker}(f)$ donc :

$$x = \underbrace{x - f(a)}_{\in\mathrm{Ker}(f)} + \underbrace{f(a)}_{\in\mathrm{Im}(f)}.$$

On a bien $x \in \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ ce qui montre l'inclusion souhaitée et, par suite, l'égalité :

$$E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f).$$

$\boxed{\Leftarrow}$On suppose $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. Montrons que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. On sait déjà que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$ d'après l'exercice 25. Montrons l'inclusion réciproque. Soit donc $y \in \mathrm{Im}(f)$, montrons que $y \in \mathrm{Im}(f^2)$. On sait qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or, $E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ donc il existe $(a, b) \in \mathrm{Ker}(f) \times \mathrm{Im}(f)$ tel que $x = a + b$. Comme $b \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $c \in E$ tel que $b = f(c)$, donc $x = a + f(c)$. On a alors : $y = f(a) + f^2(c) = f^2(c)$ car $a \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $y \in \mathrm{Im}(f^2)$. On a montré l'inclusion souhaitée et donc l'égalité :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

On montre de même, l'autre équivalence par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$On suppose que $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0_E\}$, montrons que $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(f\circ f)$. On sait déjà que $\mathrm{Ker}(f)\subset\mathrm{Ker}(f\circ f)$, montrons l'autre inclusion. Soit $x\in\mathrm{Ker}(f\circ f)$, alors $f\circ f(x)=0_E$ donc $f(x)\in\mathrm{Ker}(f)$. Or, $f(x)\in\mathrm{Im}(f)$ donc $f(x)\in\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)$. On a supposé $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ en somme directe, on a donc $f(x)=0_E$, c'est-à-dire $x\in\mathrm{Ker}(f)$. Ainsi, on a l'inclusion $\mathrm{Ker}(f\circ f)\subset\mathrm{Ker}(f)$.

$\boxed{\Leftarrow}$On suppose $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(f\circ f)$, montrons que $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0_E\}$. Soit $x\in\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)$, on sait que $f(x)=0_E$ et il existe $c\in E$ tel que $x=f(c)$. On a donc $f\circ f(c)=0_E$ c'est-à-dire $c\in\mathrm{Ker}(f\circ f)$. Or $\mathrm{Ker}(f\circ f)=\mathrm{Ker}(f)$ donc $c\in\mathrm{Ker}(f)$ soit $f(c)=0_E$. On a montré $x=0_E$ donc la somme est directe.

***Correction 39*** Soit $y\in\mathrm{Im}(f)$, montrons que $g(y)\in\mathrm{Im}(f)$. On sait qu'il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$ donc $g(y)=g\circ f(x)=f\circ g(x)$. On a $g(x)\in E$ donc $f(g(x))\in\mathrm{Im}(f)$ et on a montré que $g(y)$ était un élément de $\mathrm{Im}(f)$.

Soit $x\in\mathrm{Ker}(f)$, montrons que $g(x)\in\mathrm{Ker}(f)$. On calcule :

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= g\circ f(x) \text{ car } f\circ g=g\circ f\\ &= g(0_E) \text{ car } x\in\mathrm{Ker}(f)\\ &= O_E \text{ car } g \text{ est linéaire}\end{aligned}$$

On a bien $g(x)\in\mathrm{Ker}(f)$ donc $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par $g$.

***Correction 40*** Soit $y\in\mathrm{Im}(g\circ f)$, alors il existe $x\in E$, $y=g\circ f(x)$. On pose $a=f(x)$. On a $a\in F$ et $a$ est un antécédent de $y$ par $g$ donc $a\in\mathrm{Im}(g)$. On a montré l'inclusion :

$$\mathrm{Im}(g\circ f)\subset\mathrm{Im}(g).$$

Soit maintenant $x\in\mathrm{Ker}(f)$, alors $f(x)=0_E$ puis $g\circ f(x)=0_E$ par linéarité de $g$ donc $x\in\mathrm{Ker}(g\circ f)$ ce qui montre l'inclusion :

$$\mathrm{Ker}(f)\subset\mathrm{Ker}(g\circ f).$$

***Correction 41*** Montrons tout d'abord que $f\circ g=id_E$ implique $f$ surjective et $g$ injective. Soit $x\in E$, alors $x=f\circ g(x)=f(g(x))$ donc $g(x)$ est un antécédent de $x$ par $f$ ce qui montre que $f$ est surjective.
Soit $x\in\mathrm{Ker}(g)$, alors $g(x)=0_E$ d'où $f\circ g(x)=f(0_E)=0_E$ par linéarité de $f$. Or $f\circ g(x)=x$ donc $x=0_E$ et $g$ est injective.

Montrons maintenant que $\mathrm{Im}(g\circ f)=\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g\circ f)=\mathrm{Ker}(f)$ par double inclusion.

On sait que $\mathrm{Im}(g\circ f)\subset\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(f)\subset\mathrm{Ker}(g\circ f)$ d'après l'exercice 40. Montrons les inclusions réciproques.

Soit $y\in\mathrm{Im}(g)$, alors il existe $a\in E$ tel que $g(a)=y$. Or $f$ est surjective donc il existe $x\in E$ tel que $f(x)=a$. On a alors $y=g\circ f(x)$ donc $y\in\mathrm{Im}(g\circ f)$ et on a montré l'inclusion $\mathrm{Im}(g)\subset\mathrm{Im}(g\circ f)$ d'où l'égalité :

$$\mathrm{Im}(g)=\mathrm{Im}(g\circ f).$$

Soit $x\in\mathrm{Ker}(g\circ f)$. Alors $g\circ f(x)=0_E$ donc $f(x)\in\mathrm{Ker}(g)$. Comme $g$ est injective, on a $\mathrm{Ker}(g)=\{0_E\}$ et $f(x)=0_E$. Ceci montre que $x\in\mathrm{Ker}(f)$ donc on a l'inclusion $\mathrm{Ker}(g\circ f)\subset\mathrm{Ker}(f)$ et, par suite,

$$\mathrm{Ker}(g\circ f)=\mathrm{Ker}(f).$$

***Correction 42*** On raisonne par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$On suppose $f\circ g$ un automorphisme, on a $f$ surjective et $g$ injective d'après le cours sur les fonctions. Je vous le refais dans l'hypothèse improbable où vous auriez oublié: Soit $y\in E$, comme $f\circ g$ est un automorphisme, $y$ admet un antécédent (unique) par $f\circ g$ donc il existe $x\in E$ tel que $f\circ g(x)=y$. On a alors $y=f(g(x))$ avec $g(x)\in E$ donc $y$ admet un antécédent par $f$ et $f$ est surjective.

Montrons que $g$ est injective. Soit $x\in\mathrm{Ker}(g)$, alors $g(x)=0_E$ donc $f\circ g(x)=f(0_E)=0_E$. Or $f\circ g$ est bijective donc injective. On en déduit que $x=0_E$ ce qui achève de montrer que $g$ est injective.

Pour la somme, on raisonne par analyse synthèse:
<u>Analyse</u> :Soit $x\in E$, on suppose qu'il existe $(a,b)\in\mathrm{Ker}(f)\times\mathrm{Im}(g)$, alors $f(a)=0_E$ et il existe $c\in E$ tel que $b=g(c)$. On a $f(x)=f(b)=f\circ g(c)$, d'où $x-g(c)\in\mathrm{Ker}(f)$ par linéarité de $f$ et on remarque que $c$ est l'unique antécédent de $f(x)$ par $f\circ g$.
<u>Synthèse</u> :Soit $x\in E$, on pose $c$ l'unique antécédent de $f(x)$ par $f\circ g$, $b=g(c)$ et $a=x-b$. On doit montrer que

- $a\in\mathrm{Ker}(f)$
- $b\in\mathrm{Im}(g)$
- $a+b=x$.

les deux derniers points sont clairs, on calcule $f(a)=f(x-b)=f(x)-f(b)=f(x)-f\circ g(c)=0_E$ donc le premier point est vrai.

On a montré, que tout élément de $E$ s'écrit comme la somme d'un élément de $\mathrm{Ker}(f)$ et d'un élément de $\mathrm{Im}(g)$. De plus, d'après la phase d'analyse, cette écriture est unique donc $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont supplémentaires dans $E$.
$\boxed{\Leftarrow}$Réciproquement, si $E=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(g)$, $f$ surjective et $g$ injective, montrons que $f\circ g$ est un automorphisme.

Soit $x\in\mathrm{Ker}(f\circ g)$, alors $f\circ g(x)=0_E$ donc $g(x)\in\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(g)=\{0_E\}$, puis $g$ injective donc $x=0_E$. On a donc $f\circ g$ injective.

Soit $y\in E$, alors comme $f$ est surjective, $y=f(a)$. Or $a\in E$ donc $a=b+c$ avec $c\in\mathrm{Im}(g)$, on a donc $c=g(d)$ puis $y=f\circ g(d)$ donc $y$ admet un antécédent dans $E$.

On a bien $f\circ g$ un automorphisme.

**Correction 43** 1. On a $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) \subset \ker(u+v)$. En effet, si $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \ker(v)$, alors $u(x) = v(x) = 0_E$, on a donc

$$(u+v)(x) = u(x) + v(x) = 0_E + 0_E = 0_E.$$

2. On a $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$. En effet, si $y \in \mathrm{Im}(u+v)$, alors il existe $x \in E$ tel que $u(x) + v(x) = y$. On a $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ et $v(x) \in \mathrm{Im}(v)$ donc $y \in \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.

**Correction 44** On raisonne par analyse synthèse:
Analyse :Soit $x \in E$, on suppose qu'il existe $(a,b) \in \mathrm{Ker}(u - id_E) \times \mathrm{Ker}(u^2 + Id_E)$ tel que $x = a+b$. On a $(u - id_E)(a) = u(a) - a$ donc $u(a) = a$ puisque $a \in \mathrm{Ker}(u - Id_E)$. On a aussi $(u^2 + id_E)(b) = u^2(b) + b$ donc $u^2(b) = -b$ puisque $b \in \mathrm{Ker}(u^2 + Id_E)$. On a

$$\begin{aligned} u^2(x) &= u^2(a) + u^2(b) \text{ par linéarité de } u^2 \\ &= u(a) - b \text{ car } u(a) = a \\ &= a - b \text{toujours car } u(a) = a \end{aligned}$$

Ainsi, on a $a = \frac{1}{2}(x + u^2(x))$ et $b = \frac{1}{2}\left(x - u^2(x)\right)$.

Synthèse :Soit $x \in E$, on pose $a = \frac{1}{2}(x + u^2(x))$ et $b = \frac{1}{2}\left(x - u^2(x)\right)$. On doit montrer que

- $a + b = x$
- $a \in \mathrm{Ker}(u - Id_E)$
- $b \in \mathrm{Ker}(u^2 + Id_E)$.

Le premier point est clair.
Calculons $u(a)$:

$$\begin{aligned} u(a) &= \frac{1}{2}\left(u(x) + u^3(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(u(x) + u^2(x) - u(x) + x\right) \text{ car } u^3 = u^2 - u + Id_E \\ &= \frac{1}{2}\left(u^2(x) + x\right) \\ &= a \end{aligned}$$

On a bien $a \in \mathrm{Ker}(u - Id_E)$.
On veut montrer que $u^2(b) = -b$, on calcule $u(b)$ puis $u^2(b)$:

$$\begin{aligned} u(b) &= \frac{1}{2}\left(u(x) - u^3(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(u(x) - u^2(x) + u(x) - x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2u(x) - u^2(x) - x\right) \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} u^2(b) &= \frac{1}{2}\left(2u^2(x) - u^3(x) - u(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2u^2(x) - u^2(x) + u(x) - x - u(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(u^2(x) - x\right) \\ &= -b \end{aligned}$$

On a bien $b \in \mathrm{Ker}(u^2 + Id_E)$. On a montré que tout élément de $E$ s'écrit comme la somme d'un élément de $\mathrm{Ker}(u - Id_E)$ et d'un élément de $\mathrm{Ker}(u^2 + Id_E)$. De plus, d'après la phase d'analyse, cette écriture est unique, les deux espaces sont donc supplémentaires dans $E$.

On peut aussi aller plus rapidement en remarquant que $(u - Id_E) \circ (u^2 + Id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $(u^2 + Id_E) \circ (u - Id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On a donc $\mathrm{Im}(u - Id_E) \subset \mathrm{Ker}(u^2 + Id_E)$ et $\mathrm{Im}(u^2 + Id_E) \subset \mathrm{Ker}(u - Id_E)$.

On écrit ensuite, pour tout $x \in E$, $u^3(x) - u^2(x) + u(x) - x = 0_E$ donc

$$2x = (u^3(x) + u(x) - 2u^2(x)) + (x + u^2(x)).$$

On a $x + u^2(x) \in \mathrm{Im}(u^2 + Id_E)$ donc $x + u^2(x) \in \mathrm{Ker}(u - Id_E)$.

On a aussi

$$u^3(x) - 2u^2(x) + u(x) = u^3(x) - u^2(x) - (u^2(x) - u(x)) = (u - Id_E)(u^2(x) - u(x)) \in \mathrm{Im}(u - Id_E) \subset \mathrm{Ker}($$

On montre ensuite que la somme est directe en prenant un élément de l'intersection.

**Correction 45** Montrons que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$ par analyse/synthèse.
Analyse :Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on suppose qu'il existe $(Q,R) \in F \times G$ tel que $P = Q + R$.

On sait qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $R = \lambda(X^2 + X) + \mu(X^3 + 1)$. On a, de plus,

$$P(0) = Q(0) + \mu = \mu \text{ car } Q(0) = 0,$$

et

$$P(1) = Q(1) + 2\lambda + 2\mu = 2\lambda + 2\mu \text{ car } Q(1) = 1.$$

On en déduit que $\mu = P(0)$ et $\lambda = \frac{P(1)}{2} - P(0)$.

Synthèse :Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose $\lambda = \frac{P(1)}{2} - P(0)$, $\mu = P(0)$, $R = \lambda(X^2 + X) + \mu(X^3 + 1)$ et $Q = P - R$. Montrons que :

- $Q \in F$,
- $R \in G$ et

- $Q + R = P$.

Les deux derniers points sont clairs. On écrit :

$$Q(0) = P(0) - \mu = 0 \text{ et } Q(1) = P(1) - 2\lambda - 2\mu = 0,$$

ce qui montre que $Q \in F$. Par analyse/synthèse, on a montré que tout polynôme $P$ s'écrit comme la somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $G$. De plus, d'après la phase d'analyse, l'écriture est unique ce qui montre l'inclusion $\mathbb{R}[X] \subset F \oplus G$ d'où l'égalité.

Pour déterminer le projeté de $P = X^5 - X^3 + 1$, on calcule $P(0) = 1$ et $P(1) = 1$. D'après la phase d'analyse, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} P &= \underbrace{P - \left(\frac{P(1) - 2P(0)}{2}(X^2 + X) + P(0)(X^3 + 1)\right)}_{\in F} \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{P(1) - 2P(0)}{2}(X^2 + X) + P(0)(X^3 + 1)\right)}_{\in G}. \end{aligned}$$

Le projeté de $P$ sur $F$ parallèlement à $G$ est donc :

$$X^5 - X^3 + 1 - \left(-\frac{1}{2}(X^2 + X) + (X^3 + 1)\right) = X^5 - 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X.$$

***Correction 46*** 1. **Injectivité** : Soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0_E$. Alors $p(x) = -x$. On applique $p$ à l'égalité. On obtient, par linéarité de $p$, $p^2(x) = -p(x)$. Or, $p$ est un projecteur donc $p^2(x) = p(x)$. On en déduit que $p(x) = 0_E$ et, comme, par hypothèse, $p(x) = -x$, alors $x = 0_E$. Ainsi, $f$ est injective.

**Surjectivité** : On va raisonner par analyse/synthèse.

Analyse :Soit $y \in E$. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $p(x) + x = y$. On a alors $p^2(x) + p(x) = p(y)$ c'est-à-dire, comme on sait que $p^2 = p$, $2p(x) = p(y)$ ou encore $p(x) = \frac{1}{2}p(y)$. Or, on sait que $x = y - p(x)$ donc $x = y - \frac{p(y)}{2}$.

Synthèse :Soit $y \in E$. On pose $x = y - \frac{p(y)}{2}$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + x \\ &= p\left(y - \frac{p(y)}{2}\right) + y - \frac{p(y)}{2} \\ &= p(y) - \frac{p^2(y)}{2} + y - \frac{p(y)}{2} \\ &= p(y) - \frac{p(y)}{2} + y - \frac{p(y)}{2} \\ &= y \end{aligned}$$

et $x$ est un antécédent de $y$ par $f$. Pour tout $y \in E$, on a bien un antécédent de $y$ par $f$ donc $f$ est surjective.

2. Les applications $p$ et $id_E$ commutent donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} (p + id_E)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} p^k \, (id_E)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} p^k \\ &= id_E + \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{n} p^k \\ &= id_E + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{n}\right) p \text{car } p^k = p \text{ pour tout } k \geqslant 1 \end{aligned}$$

On sait, de plus, que $\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{n} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n}\right) - 1 = 2^n - 1$. On a donc :

$$f^n = id_E + (2^n - 1)\, p.$$

***Correction 47*** 1. Montrons que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Analyse :Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose qu'il existe $Q \in F$ et $\lambda X \in G$ tels que $P = Q + \lambda X$. On a alors :

$$\begin{aligned} P(1) &= \lambda + Q(1) \\ &= \lambda \text{car } Q(1) = 0 \end{aligned}$$

On a donc $\lambda = P(1)$.

Synthèse :Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a alors :

$$P = \underbrace{P(1)X}_{\in G} + \underbrace{(P - XP(1))}_{\in F \text{ car } P(1) - 1P(1)}.$$

On a montré que tout élément $P$ de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit comme la somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $G$. De plus, l'unicité de l'écriture a été montrée dans la phase d'analyse. On a donc l'inclusion $\mathbb{R}[X] \subset F \oplus G$ d'où l'égalité.

Les deux espaces sont donc bien supplémentaires.

2. On cherche à écrire $X^2 - 3X + 1$ comme la somme $P(X) + \lambda X$ avec $P(1) = 0$. D'après la phase d'analyse, on a $\lambda = P(1) = -1$. On en déduit que:

$$P(X) = (X^2 - 3X + 1) + X = X^2 - 2X + 1.$$

On peut alors conclure:

$$f(2X^2 - 3X + 3) = X^2 - 2X + 1.$$

On a, $\forall i \geqslant 1$, $X^i - 1 \in F$ d'où $f\left(X^i - 1\right) = X^i - 1$.

***Correction 48*** 1. Supposons tout d'abord que $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$, alors :

$$(p+q) \circ (p+q) = p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q = p^2 + q^2 = p + q$$

et l'application $p+q$ est bien un projecteur.
Réciproquement, supposons que $p+q$ soit un projecteur, on sait alors que $(p+q) \circ (p+q) = p+q$, ce qui implique, d'après le calcul précédent,

$$p \circ q + q \circ p = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}.$$

En composant à droite par $p$ cette égalité, on obtient :

$$p \circ q \circ p + q \circ p^2 = p \circ q \circ p + q \circ p = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{E})},$$

car $p$ est un projecteur. De même, en composant à gauche par $p$, on obtient :

$$p^2 \circ q + p \circ q \circ p = p \circ q + p \circ q \circ p = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}.$$

Cela implique $p \circ q = q \circ p$ or $p \circ q + q \circ p = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$, on obtient donc :

$$p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}.$$

2. Soit $x \in \mathrm{Im}p \cap \mathrm{Im}q$, alors il existe $a, b \in E$ tels que $q(a) = p(b) = x$. Composons par $p$, on obtient, d'après la question précédente :

$$p(x) = p \circ q(a) = 0_E.$$

Or $p(x) = p^2(b) = p(b)$ donc $x = 0_E$ et l'intersection est réduite à zéro.

3. On veut montrer que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}p \oplus \mathrm{Im}q$ et $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Ker}q$.
On a $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$ pour toutes applications, il suffit donc de montrer l'inclusion inverse. On se donne un élément $x$ de $\mathrm{Im}p \oplus \mathrm{Im}q$, il s'écrit $x = p(a) + q(b)$ avec $a, b \in E$. On a :

$$p(x) = p^2(a) + p \circ q(a) = p(a) \text{ car } p \circ q = 0_{(E)}$$

et

$$q(x) = q^2(b) + q \circ p(a) = q(b) \text{ car } q \circ p = 0_{(E)}$$

donc $x = p(x) + q(x) = (p+q)(x)$ et l'inclusion réciproque est montrée.

Pour le noyau, on a l'inclusion $\mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Ker}q \subset \mathrm{Ker}(p+q)$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$, alors :

$$\begin{aligned} p(x) &= p^2(x) \\ &= p(-q(x)) \text{car } p(x) = -q(x) \\ &= -p \circ q(x) \\ &= 0_E \text{car } p \circ q = 0_{(E)} \end{aligned}$$

donc $x \in \mathrm{Ker}p$. De même, $q \circ p(x) = 0_E = -q^2(x) = -q(x)$ donc $x \in \mathrm{Ker}q$.
Au final, on a montré $x \in \mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Ker}q$ ce qui montre l'inclusion réciproque.

***Correction 49*** 1. On calcule $r \circ r$:

$$\begin{aligned} r \circ r &= (p + q - q \circ p) \circ (p + q - q \circ p) \\ &= p \circ (p + q - q \circ p) + q \circ (p + q - q \circ p) - q \circ p \circ (p + q - q \circ p) \end{aligned}$$

Or on a

- $p \circ (p + q - q \circ p) = p + 0_{\mathcal{L}(E)} - 0_{\mathcal{L}(E)}$ car $p \circ p = p$ et $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- $q \circ (p + q - q \circ p) = q \circ p + q - q \circ p = q$ car $q^2 = q$.
- $q \circ p \circ (p + q - q \circ p) = q \circ p + 0_{\mathcal{L}(E)} - 0_{\mathcal{L}(E)}$

On a donc

$$r \circ r = p + q - q \circ p = r,$$

donc $r$ est bien un projecteur.

2. On a $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(r)$. Si $x \in \mathrm{Ker}(r)$, alors $p(x) = q(x - p(x))$, on a $p^2(x) = p \circ q(x - p(x)) = 0_E$ donc $p^2(x) = p(x) = 0_E$ puis $x \in \mathrm{Ker}(p)$. On a donc $r(x) = 0_E = q(x)$ donc $x \in \mathrm{Ker}(q)$.
Soit $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ alors $q(x) = x$ donc $0_E = p \circ q(x) = p(x)$. Or $p(x) = x$ puisque $x \in \mathrm{Im}(p)$. On a donc $x = 0_E$ et la somme est directe. On a $\mathrm{Im}(r) \subset \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ car pour tout $x \in E$,

$$r(x) = p(x) + q(x - p(x)) \in \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$$

Soit maintenant $x \in \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$. Alors $x = p(a) + q(b)$.
On calcule $r(x)$:

$$\begin{aligned} r(x) &= p(p(a) + q(b)) + q(p(a) + q(b)) - q \circ p(p(a) + q(b)) \\ &= p^2(a) + p \circ q(b) + q \circ p(a) + q^2(b) - q \circ p^2(a) - q \circ p \circ q(b) \\ &= p(a) + 0_E + q \circ p(a) + q(b) - q \circ p(a) + 0_E \\ &= p(a) + q(b) \\ &= x \end{aligned}$$

On a $r(x) = x$ donc $x \in \mathrm{Im}(r)$ ce qui montre l'inclusion réciproque.