Devoir surveillé 6, sujet 1 .

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1.
On pose : $A = (X+1)^{2n} - 1$, polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que l'on peut écrire $A = X \times B$ où B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant noté b_0.

2. Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$. On posera $z_0 = 0$ et les autres racines $z_1, z_2, ..., z_{2n-1}$ seront mises sous la forme $\rho_k e^{i\alpha_k}$ avec $(\rho_k, \alpha_k) \in \mathbb{R}^2$.

3. Déterminer la somme des racines de A et vérifier la cohérence du résultat avec les coefficients de A.

   On pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

4. Montrer, à l'aide d'un changement d'indice, que $P_n = \displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$.

   En déduire que, si $Q_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.

5. Calculer de deux façons : $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$.

6. En déduire Q_n et enfin, P_n.

Exercice 2.
Soit n un entier supérieur ou égal à 3; soit $P_n(X)$ le polynôme défini par la relation suivante:

$$P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1.$$

1. Démontrer que ce polynôme P_n est divisible par le polynôme $(X-1)^2$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Rappeler, en la justifiant, la factorisation, du polynôme $X^p - 1$ au moyen du polynôme $X - 1$.

3. Déterminer la factorisation de $P_n(X)$ au moyen de $(X-1)$ et d'un polynôme $Q(X)$.

4. Factoriser à son tour le polynôme $Q(X)$ par $(X-1)$ en faisant apparaître des polynômes du type $X^p - 1$. On explicitera les coefficients du quotient.

5. En déduire l'expression du quotient de P_n par $(X-1)^2$.

Exercice 3.
Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie A

1. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

2. Montrer que $A = PDP^{-1}$.

Partie B

On étudie le comportement d'un consommateur M à partir d'une semaine donnée, appelée " semaine 1 ". Ce consommateur choisit chaque semaine chez le pâtissier un dessert parmi les trois desserts A, B et C. On considère en outre que:

- si M a choisi le dessert A la semaine n, alors la semaine $(n+1)$ il choisit le dessert A avec une probabilité de $1/3$ ou le dessert C avec une probabilité de $2/3$;

- si M a choisi le dessert B la semaine n, alors la semaine $(n+1)$ il choisit le dessert A avec une probabilité de $1/3$ ou le dessert B avec une probabilité de $2/3$;

- si M a choisi le dessert C la semaine n, alors il le reprend la semaine $n+1$;

- le consommateur M choisit de façon équiprobable son dessert la première semaine.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera:

- A_n l'événement: " M a choisi le dessert A la n-ième semaine ";

- B_n l'événement: " M a choisi le dessert B la n-ième semaine ";

- C_n l'événement: " M a choisi le dessert C la n-ième semaine ".

On note aussi $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$.

3. (a) Calculer $P(C_3)$.

   (b) Quelle est la probabilité que le consommateur mange le dessert C pour la première fois lors de la semaine 3?

   (c) Un ami du consommateur le croise durant la semaine 3 et constate qu'il mange le dessert C. Quelle est la probabilité que ce soit la première fois?

4. Justifier avec soin que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n)$.

5. Donner ensuite sans justification des relations exprimant $P(B_{n+1})$ et $P(C_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$.

6. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = AU_n$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = A^{n-1}X_1$.

7. En déduire, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, les probabilités $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$ ainsi que leurs limites, si elles existent, lorsque $n \to +\infty$.

8. Que peut-on en déduire?

Exercice 4.

Pour tout réel $x > 0$ et entier $n \geqslant 3$, on pose : $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle ouvert $]0, 2[$. On appellera désormais a_n cette solution.

2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante

3. Montrer que cette suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.

4. Soit Φ la fonction telle que $\Phi(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$ avec t réel strictement supérieur à -1.
Déterminer le développement limité de Φ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

5. Montrer que, sur l'intervalle $]-1, e-1[$, la fonction Φ induit une bijection; on note Ψ sa réciproque .

6. Dresser le tableau de variations de Ψ.

7. Déterminer le développement limité de Ψ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

8. Déterminer des constantes A, B et C telles que $a_n = A + \dfrac{B}{n} + \dfrac{C}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Correction du DS n 6, sujet 1

Exercice 1 1. D'après la formule du binôme de Newton, on a $A = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k - 1 = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^k = XB$ avec $B = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} X^{k-1}$. Le polynôme B est de degré $2n-1$, son coefficient dominant est $C_{2n}^{2n} = 1$ et son terme constant b_0 vaut $C_{2n}^1 = 2n$.

2. z est racine de A si et seulement si $(z+1)^{2n} = 1$ ce qui équivaut à $z + 1 = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right)$ où k est un entier compris entre 1 et $2n-1$.

   Donc les racines de A sont $z_0 = 0$ et $z_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right) - 1$ avec k est un entier compris entre 1 et $2n-1$.

   Remarquons que pour tout entier k compris entre 1 et $2n-1$:

$$\begin{aligned} z_k &= \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right)\left(\exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) - \exp\left(-\frac{ik\pi}{2n}\right)\right) \\ &= 2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) \\ &= 2\sin\left(\tfrac{k\pi}{2n}\right)\exp\left(\tfrac{ik\pi}{2n} + i\tfrac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

3. On a $\sum_{k=0}^{2n-1} z_k = \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\exp\left(\frac{2ik\pi}{2n}\right) - 1\right) = 0 - 2n$. car la somme des racines $2n$ième de l'unité est nulle.
   Par ailleurs, A est unitaire et le coefficient de son terme d'indice $2n-1$ vaut $\binom{2n}{2n-1} = 2n$.
   Le résultat est donc bien cohérent.

4. Faisons dans P_n le changement d'indice $l = 2n - k$. Alors :

$$P_n = \prod_{l=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{(2n-l)\pi}{2n}\right) = \prod_{l=n+1}^{2n-1} \sin\left(\pi - \frac{l\pi}{2n}\right) = \prod_{l=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{l\pi}{2n}\right)$$

   car $\sin(\pi - x) = \sin x$.

   On en déduit que $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = P_n^2$.

   De plus, pour tout entier k compris entre 1 et $2n-1$, $\frac{k\pi}{2n}$ appartient à $[0, \pi]$ donc $\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \geqslant 0$ ce qui implique que P_n et Q_n sont positifs. Par conséquent, $P_n = \sqrt{Q_n}$.
   L'immense majorité d'entre vous a posé $j = n + k$ pour que ça colle au niveau des bornes. Ensuite, il y a eu ceux qui m'ont trafiqué le produit avec des formules trigo fausses pour que ça marche et quelques uns (rares) qui ont eu l'honnêteté de reconnaître que ce changement d'indice faisait apparaître des cosinus dans le produit.

5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$ est le produit des racines du polynôme B. D'après les relations coefficients racines, ce produit vaut $(-1)^{2n-1}b_0$. Donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = -2n$. D'autre part, d'après l'expression des z_k donnée au **2.** :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{2n-1} z_k &= (2i)^{2n-1} \times Q_n \prod_{k=1}^{2n-1} \exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right)\\ &= \frac{2^{2n-1}(-1)^n Q_n}{i} \exp\left(\frac{i\pi}{2n} \sum_{k=1}^{2n-1} k\right)\\ &= \frac{2^{2n-1}(-1)^n Q_n}{i} \exp\left(i\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= -2^{2n-1} Q_n\end{aligned}$$

En égalant les deux résultats, on trouve $Q_n = \dfrac{4n}{2^{2n}}$ et $P_n = \sqrt{Q_n} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

Exercice 2 1. On a $P_n(1) = 0$ et $P_n'(X) = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1}$ donc $P_n'(1) = 0$. On en déduit que 1 est racine de multiplicité au moins 2 de P_n donc $(X-1)^2$ divise P_n.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Alors

$$(X-1)\sum_{k=0}^{p-1} X^k = \sum_{k=0}^{p-1} \left(X^{k+1} - X^k\right) = X^p - 1,$$

car on reconnaît une somme télescopique.

Là j'avoue que je suis partagée entre la fierté de voir que la majorité d'entre vous sait factoriser le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ et le fait que, clairement, ce n'était ce qu'on attendait ici puisque l'on voulait simplement faire apparaître ce fameux polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$. Pour le peu qui y ont pensé, quand on dit " en la justifiant", on attend une preuve de la fameuse factorisation $a^n - b^n$ par $a - b$.

3. On a

$$P_n(X) = (X-1)(nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} \ldots - 1),$$

donc $P_n(X) = (X-1)Q(X)$ avec $Q(X) = nX^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$.

4. On écrit

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(X^n - X^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k \left(X^{n-k} - 1\right) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k (X-1) \sum_{j=0}^{n-k-1} X^j.$$

Le quotient vaut donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} X^{k+j}$. Pour trouver ses coefficients, on commence par poser $i = k+j$. On a alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-k-1} X^{k+j} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k}^{n-1} X^i,$$

puis on permute les deux signes somme :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k}^{n-1} X^i = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{i} X^i = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) X^i.$$

Personne n'est arrivé jusque là, quel dommage !

5. On en déduit que

$$P_n(X) = (X-1)^2 A(X) \text{ avec } A(X) = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)X^i.$$

***Exercice 3* Partie A**

1. On étudie le système associé à P et on trouve que

$$\boxed{P \text{ est inversible}} \text{ et } \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

2. On vérifie aisément (par un calcul direct) que $AP = PD$ et comme P est inversible, on en déduit que $\boxed{A = PDP^{-1}.}$

3.

Partie B

4. (a) On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènement (A_2, B_2, C_2) on obtient

$$\begin{aligned} P(C_3) &= P(A_2)P_{A_2}(C_3) + P(B_2)P_{B_2}(C_3) + P(C_2)P_{C_2}(C_3) \\ &= \frac{2}{3}P(A_2) + 0.P(B_2) + 1.P(C_2) \end{aligned}$$

puis on utilise (deux fois) la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (A_1, B_1, C_1):

$$\begin{aligned} P(C_3) &= \frac{2}{3}\left(P(A_1)P_{A_1}(A_2) + P(B_1)P_{B_1}(A_2) + P(C_1)P_{C_1}(A_2)\right) + \left(P(A_1)P_{A_1}(C_2) + P(B_1)P_{B_1}(C_2\right. \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}P(A_1) + \frac{1}{3}P(B_1)\right) + \left(\frac{2}{3}P(A_1) + P(C_1)\right) \\ &= \frac{19}{27} \end{aligned}$$

car $P(A_1) = P(B_1) = P(C_1) = \dfrac{1}{3}$. On a donc $\boxed{P(C_3) = \frac{19}{27}.}$

Le principal problème de cette question (et des suivantes !) a été la rédaction et la justification. Un arbre de probabilité n'est pas une preuve, m'énumérer les cas "possibles" sans justification non plus. Certains confondent probabilité conditionnelle et probabilité de l'intersection, c'est un point à bien comprendre.

(b) Notons $\widetilde{C}_3$ cet événement. On cherche à calculer $P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap C_3)$. On a

$$\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap C_3 = (A_1 \cap A_2 \cap C_3) \cup (A_1 \cap B_2 \cap C_3) \cup (B_1 \cap A_2 \cap C_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap C_3),$$

et la réunion est disjointe. On en déduit que la probabilité cherchée est la somme des 4 probabilités. Or, d'après la formule des probabilités composées, on a

$$P(A_1 \cap B_2 \cap C_3) = P(A_1)P_{A_1}(B_2)P_{A_1 \cap B_2}(C_3) = 0$$

et

$$P(B_1 \cap B_2 \cap C_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{A_1 \cap B_2}(C_3) = 0.$$

On a donc

$$P(\widetilde{C}_3) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(C_3) + P(B_1)P_{B_1}(A_2)P_{B_1 \cap A_2}(C_3) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} + \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{27}$$

(c) Il s'agit de calculer $P_{C_3}(\widetilde{C}_3)$. Par définition des probabilités conditionnelles, on a

$$P_{C_3}(\widetilde{C}_3) = \frac{P(C_3 \cap \widetilde{C}_3)}{P(C_3)} = \frac{P(\widetilde{C}_3)}{P(C_3)}.$$

On a utilisé le fait que $\widetilde{C}_3 \subset C_3$, ce qui implique que $C_3 \cap \widetilde{C}_3 = \widetilde{C}_3$. On en déduit que

$$\boxed{P_{C_3}(\widetilde{C}_3) = \frac{4/27}{19/27} = \frac{4}{19}.}$$

5.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n) (notons que c'est bien un système complet d'événements puisque, selon l'énoncé, "le consommateur choisit chaque semaine chez le pâtissier un dessert parmi les trois desserts A, B et C"). Cette formule donne

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n)$$

On sait que

$$\begin{aligned} P_{A_n}(A_{n+1}) &= \tfrac{1}{3}, \\ P_{A_n}(B_{n+1}) &= 0, \\ P_{A_n}(C_{n+1}) &= \tfrac{2}{3}, \end{aligned}$$

et donc, $\boxed{P(A_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n).}$

Comme la formule vous est donnée, la justification doit être impeccable.

7. On sait que

$$\begin{aligned} P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}, &\quad P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3}, \quad P_{B_n}(C_{n+1}) = 0, \\ P_{C_n}(A_{n+1}) = 0, &\quad P_{C_n}(B_{n+1}) = 0, \quad P_{C_n}(C_{n+1}) = 1. \end{aligned}$$

On montre de la même façon (c'est-à-dire en appliquant la même formule, avec le même système complet d'événements) que

$$\boxed{P(B_{n+1}) = \frac{2}{3}P(B_n) \text{ et } P(C_{n+1}) = \frac{2}{3}P(A_n) + P(C_n).}$$

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les relations obtenues à la question précédente s'expriment matriciellement par la relation $\boxed{U_{n+1} = AU_n.}$

Certains ont tenté (en vain) de raisonner par récurrence. Pourquoi?

(b) Il suffit de raisonner par récurrence simple.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_n = A^{n-1}X_1$, donc, en utilisant ??,

$$U_n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (2/3)^{n-1} \\ (2/3)^{n-1} \\ 3 - 2(2/3)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Comme $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{P(A_n) = \frac{1}{3} \times (2/3)^{n-1}, \quad P(B_n) = \frac{1}{3} \times (2/3)^{n-1}, \quad P(C_n) = 1 - (2/3)^n.}$$

Comme $\frac{2}{3} \in]-1,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1.}$$

Beaucoup d'entre vous ont écrit $A^n = P^n D^n \left(P^{-1}\right)^n$ et ont donc calculé les puissances n-ièmes des trois matrices ce qui leur a fait perdre un temps considérable. Il est dommage que vous ne vous assuriez pas, à la fin de votre calcul, que la somme des trois probabilités fait bien 1 !

10. Asymptotiquement (c'est-à-dire lorsque n devient *grand*), le consommateur mange toutes les semaines le dessert C. Cela n'est pas surprenant compte tenu des données de l'énoncé puisque dès qu'il commence à manger ce dessert il n'arrête plus.

Exercice 4 Pour tous réel $x > 0$ et entier $n \geqslant 3$, on pose : $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. La fonction f_n est dérivable sur $]0,2[$ de dérivée $f' : x \mapsto \dfrac{x-n}{x}$. Comme $n \geqslant 3$, on a donc le tableau de variations suivant :

x	0 2
$f_n'(x)$	$-$
f_n	$+\infty$ $\searrow$ $2-2\ln(2)$

La fonction f_n est strictement décroissante sur $]0,2[$ donc injective et 0 appartient à son image. Il admet donc un unique antécédent par f_n.
On appellera désormais a_n cette solution.
J'ai lourdement insisté sur le fait que le TVI ne donnait pas l'unicité, je suis donc très déçue (et le mot est faible) que seule Marianne ait rédigé correctement cette question... Renseignement pris auprès de mes collègues de spé, c'est tout à fait le genre de questions où vous perdrez des points (et peut-être l'estime du correcteur) en balançant tous les arguments sans les ordonner et sans bien distinguer l'existence de l'unicité.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $f_{n+1}(a_n) = -\ln(a_n)$. On remarque que $f_n(1) = 1 > 0$ donc $a_n \in]1,2[$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(a_n) > 0$ donc $f_{n+1}(a_n) < 0$. On a donc $f_{n+1}(a_n) < f_{n+1}(a_{n+1})$ et, comme f_{n+1} est décroissante, on en déduit que $a_{n+1} < a_n$ donc la suite est bien décroissante.
Là il y avait un piège car il fallait remarquer que $a_n > 1$ pour attraper le signe de la différence.

3. D'après la question précédente, elle est minorée par 1, elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite et supposons, par l'absurde, que $\ell > 1$. On a alors, $f_n(a_n) \to -\infty$ ce qui est absurde puisque $f_n(a_n) = 0$. On a montré que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
Certains m'ont parlé de point fixe de la fonction ce qui n'a aucun sens dans le cas d'une suite définie de manière implicite

4. Soit Φ la fonction telle que $\Phi(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$ avec t réel strictement supérieur à -1.
On a $\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$ et $\dfrac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + o(t^2)$ donc
$$\Phi(t) = t - \frac{3t^2}{2} + o(t^2).$$
Question plutôt bien traitée.

5. La fonction Φ est dérivable sur l'intervalle $]-1, e-1[$, de dérivée $\Phi' : t \mapsto \dfrac{1-\ln(1+t)}{(1+t)^2}$, elle est donc strictement croissante sur l'intervalle $]-1, e-1[$. On en déduit qu'elle induit une bijection sur son image. On la note Ψ.
Certains me disent que la fonction est surjective, c'est faux ! il faut corestreindre à son image pour obtenir une fonction surjective

6. On a

x	-1		$e-1$
Φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$

on en déduit

x	$-\infty$		$\frac{1}{e}$
Φ	-1	$\nearrow$	$e-1$

D'où la bijection réciproque a même ensemble de départ que la fonction ?????

7. On a $\Phi(0) = 0$ donc $\Psi(0) = 0$. On a $\Phi(t) \sim t$ donc $\Phi \circ \Psi(x) \sim \Psi(x)$ donc $\Psi(x) \sim x$. En utilisant $\Phi(t) - t \sim -\dfrac{3t^2}{2}$, on en déduit $x - \Psi(x) \sim -\dfrac{3\psi(x)^2}{2}$ donc

$$x - \Psi(x) \sim -\frac{3x^2}{2}$$

puisque $\Psi(x) \sim x$.
On en déduit $\Psi(x) = x + \dfrac{3x^2}{2} + o(x^2)$.
On peut aussi dire que Ψ est deux fois dérivable car Φ l'est ET la dérivée de Φ ne s'annule pas. La fonction Ψ admet donc un DL2 de la forme $\Psi(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$ avec $a = 0$ puisque $\Psi(0) = 0$. On a donc

$$\Phi \circ \Psi(x) = x = bx + cx^2 + o(x^2) - \frac{3}{2}\left(x = bx + cx^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^2),$$

c'est-à-dire

$$x = bx + \left(c - \frac{3b^2}{2}\right)x^2 + o(x^2),$$

donc, par unicité du DL, $b = 1$ et $c = \dfrac{3}{2}$.

8. Par définition de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\dfrac{1}{n} = \dfrac{\ln(a_n)}{a_n} = \Phi(a_n - 1)$ donc $a_n - 1 = \Psi(\dfrac{1}{n})$ puis

$$a_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si on ne voit pas comment utiliser la question précédente, on y va par étapes: On sait que $A = 1$ puisque l'on a montré que $a_n \to 1$. Par définition de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\dfrac{1}{n} = \dfrac{\ln(a_n)}{a_n}$. Comme $a_n \to 1$, $\dfrac{\ln(a_n)}{a_n} \sim a_n - 1$. On a donc $a_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}$ donc $a_n = 1 + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On utilise ensuite le DL2 de Φ:

$$\frac{1}{n} = \Phi(a_n - 1) = (a_n - 1) - \frac{3}{2}(a_n - 1)^2 + o\left(a_n - 1\right)^2,$$

donc

$$\frac{1}{n} = a_n - 1 - \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

puis

$$a_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$