Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2023-2024
DS 6

Devoir surveillé 6, sujet 2 .

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1.

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie A

1. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

2. Montrer que $A = PDP^{-1}$.

Partie B

On étudie le comportement d'un consommateur M à partir d'une semaine donnée, appelée " semaine 1 ". Ce consommateur choisit chaque semaine chez le pâtissier un dessert parmi les trois desserts A, B et C. On considère en outre que:

- si M a choisi le dessert A la semaine n, alors la semaine $(n+1)$ il choisit le dessert A avec une probabilité de $1/3$ ou le dessert C avec une probabilité de $2/3$;
- si M a choisi le dessert B la semaine n, alors la semaine $(n+1)$ il choisit le dessert A avec une probabilité de $1/3$ ou le dessert B avec une probabilité de $2/3$;
- si M a choisi le dessert C la semaine n, alors il le reprend la semaine $n+1$;
- le consommateur M choisit de façon équiprobable son dessert la première semaine.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera:

- A_n l'événement: " M a choisi le dessert A la n-ième semaine ";
- B_n l'événement: " M a choisi le dessert B la n-ième semaine ";
- C_n l'événement: " M a choisi le dessert C la n-ième semaine ".

On note aussi $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$.

3. (a) Calculer $P(C_3)$.
   (b) Quelle est la probabilité que le consommateur mange le dessert C pour la première fois lors de la semaine 3?
   (c) Un ami du consommateur le croise durant la semaine 3 et constate qu'il mange le dessert C. Quelle est la probabilité que ce soit la première fois?

4. Justifier avec soin que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n)$.
5. Donner ensuite sans justification des relations exprimant $P(B_{n+1})$ et $P(C_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$.
6. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = AU_n$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = A^{n-1}X_1$.
7. En déduire, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, les probabilités $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$ ainsi que leurs limites, si elles existent, lorsque $n \to +\infty$.
8. Que peut-on en déduire?

Exercice 2.

pour tout entier naturel non nul n, on pose $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} X^{2k}$

Dans les questions 1) et 2), n est un entier naturel non nul fixé.

1. Soit A le polynôme tel que $A(X^2) = P_n(X)$. On note $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}$ la liste des racines de A comptées avec multiplicité dans A.
   (a) Donnez la forme développée de A (sous forme de somme).
   (b) Exprimez en fonction de n la somme et le produit des $(z_k)_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$.
   (c) Quel est un lien simple entre les racines de A et celles de P_n ?
2. (a) Vérifiez que :
$$P_n'' + P_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} X^{2n-2}$$
   (b) Déduisez-en que les racines de P_n sont de multiplicité 1 ou 2.
   (c) Montrez que P_n a au moins $n-1$ racines distinctes complexes.
3. Soit u la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^n}{n!e^n}$$
   (a) Vérifiez que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e$.
   (b) Déduisez-en que u est décroissante et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n^n}{n!e^n} \leqslant \dfrac{1}{e}$
4. On fixe de nouveau un entier naturel non nul n.
   (a) Vérifiez que :
$$P_n = \sum_{j=0}^{2n-2} \frac{\cos^{(j)}(0)}{j!} X^j$$
   (b) Grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange, on peut en déduire que (vous l'admettrez) :
$$\forall x \in \mathbb{R}, |P_n(x) - \cos(x)| \leqslant \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
   Déduisez-en que :
$$\forall x \in \left[0, \frac{2n}{e}\right], |P_n(x) - \cos(x)| \leqslant 1/e$$

(c) Déduisez-en que pour tout entier k dans $[0, 2n/(e\pi)]$, $P_n(k\pi)$ est du signe de $(-1)^k$ et qu'il est non nul.

(d) Montrez enfin que P_n a au moins $2\left\lfloor \dfrac{2n}{e\pi} \right\rfloor$ racines distinctes réelles, où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière du réel t.

5. Soit k un entier naturel fixé et $I_k = [k\pi, (k+1)\pi]$.

   (a) Montrez que, pour n assez grand, P_n admet au moins une racine dans I_k, que l'on notera x_n.

   (b) Montrez que : $\cos(x_n) \to 0$ en utilisant l'inégalité donnée plus haut.

   (c) Vérifiez que :
   $$\forall x \in I_k, x = \arccos((-1)^k \cos(x)) + k\pi$$

   (d) Déduisez-en que $x_n \to k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Exercice 3.
L'objectif est d'obtenir un DL en 0 de $f : x \mapsto \operatorname{sh}(\arcsin x)$.

1. Détermination d'un DL à un ordre raisonnable.

   (a) Déterminer le DL en 0 à l'ordre 5 de $\arcsin x$.

   (b) En déduire le DL en 0 à l'ordre 5 de f.

Obtention d'une équation différentielle

2. Justifier que f est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$.
3. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
4. Montrer que $(1-x^2) f''(x) - xf'(x) - f(x)$ est une constante à expliciter.

Utilisation de cette équation différentielle

5. Justifier qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que l'on peut écrire, quand $x \to 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.
6. Montrer que $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k a_k x^{k-1} + o(x^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   On admet qu'on a de même $f''(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+2} k(k-1) a_k x^{k-2} + o(x^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide de certains termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le coefficient c_n en x^n du DL en 0 de $(1-x^2) f''(x) - xf'(x) - f(x)$
8. En déduire que $a_{n+2} = \dfrac{n^2+1}{(n+1)(n+2)} a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9. Déterminer a_0 et a_1.
10. Déduire des questions précédentes la valeur des a_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}$.
11. Donner une formule de récurrence pour les a_{2n+1}. En déduire a_3 et a_5 et vérifier la cohérence des résultats.
12. Donner un DL7 en 0 de f.

Correction du DS n 6, sujet 2

Exercice 1 **Partie A**

1. On étudie le système associé à P et on trouve que

$$\boxed{P \text{ est inversible}} \text{ et } \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

2. On vérifie aisément (par un calcul direct) que $AP = PD$ et comme P est inversible, on en déduit que $\boxed{A = PDP^{-1}.}$

3.

Partie B

4. (a) On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènement (A_2, B_2, C_2) on obtient

$$\begin{aligned} P(C_3) &= P(A_2)P_{A_2}(C_3) + P(B_2)P_{B_2}(C_3) + P(C_2)P_{C_2}(C_3) \\ &= \frac{2}{3}P(A_2) + 0.P(B_2) + 1.P(C_2) \end{aligned}$$

puis on utilise (deux fois) la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements (A_1, B_1, C_1):

$$\begin{aligned} P(C_3) &= \frac{2}{3}\left(P(A_1)P_{A_1}(A_2) + P(B_1)P_{B_1}(A_2) + P(C_1)P_{C_1}(A_2)\right) + \left(P(A_1)P_{A_1}(C_2) + P(B_1)P_{B_1}(C \right. \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}P(A_1) + \frac{1}{3}P(B_1)\right) + \left(\frac{2}{3}P(A_1) + P(C_1)\right) \\ &= \frac{19}{27} \end{aligned}$$

car $P(A_1) = P(B_1) = P(C_1) = \dfrac{1}{3}$. On a donc $\boxed{P(C_3) = \frac{19}{27}.}$

Le principal problème de cette question (et des suivantes !) a été la rédaction et la justification. Un arbre de probabilité n'est pas une preuve, m'énumérer les cas "possibles" sans justification non plus. Certains confondent probabilité conditionnelle et probabilité de l'intersection, c'est un point à bien comprendre.

(b) Notons $\widetilde{C}_3$ cet événement. On cherche à calculer $P(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap C_3)$. On a

$$\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap C_3 = (A_1 \cap A_2 \cap C_3) \cup (A_1 \cap B_2 \cap C_3) \cup (B_1 \cap A_2 \cap C_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap C_3),$$

et la réunion est disjointe. On en déduit que la probabilité cherchée est la somme des 4 probabilités. Or, d'après la formule des probabilités composées, on a

$$P\left(A_1 \cap B_2 \cap C_3\right) = P(A_1)P_{A_1}(B_2)P_{A_1 \cap B_2}(C_3) = 0$$

et

$$P\left(B_1 \cap B_2 \cap C_3\right) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{A_1 \cap B_2}(C_3) = 0.$$

On a donc

$$P(\widetilde{C}_3) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(C_3) + P(B_1)P_{B_1}(A_2)P_{B_1 \cap A_2}(C_3) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} + \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{27}$$

(c) Il s'agit de calculer $P_{C_3}(\widetilde{C}_3)$. Par définition des probabilités conditionnelles, on a

$$P_{C_3}(\widetilde{C}_3) = \frac{P(C_3 \cap \widetilde{C}_3)}{P(C_3)} = \frac{P(\widetilde{C}_3)}{P(C_3)}.$$

On a utilisé le fait que $\widetilde{C}_3 \subset C_3$, ce qui implique que $C_3 \cap \widetilde{C}_3 = \widetilde{C}_3$. On en déduit que

$$\boxed{P_{C_3}(\widetilde{C}_3) = \frac{4/27}{19/27} = \frac{4}{19}.}$$

5.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n) (notons que c'est bien un système complet d'événements puisque, selon l'énoncé, "le consommateur choisit chaque semaine chez le pâtissier un dessert parmi les trois desserts A, B et C"). Cette formule donne

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n)$$

On sait que

$$\begin{aligned} P_{A_n}(A_{n+1}) &= \tfrac{1}{3}, \\ P_{A_n}(B_{n+1}) &= 0, \\ P_{A_n}(C_{n+1}) &= \tfrac{2}{3}, \end{aligned}$$

et donc, $\boxed{P(A_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n).}$

Comme la formule vous est donnée, la justification doit être impeccable.

7. On sait que

$$\begin{aligned} P_{B_n}(A_{n+1}) &= \frac{1}{3}, \quad P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3}, \quad P_{B_n}(C_{n+1}) = 0, \\ P_{C_n}(A_{n+1}) &= 0, \quad P_{C_n}(B_{n+1}) = 0, \quad P_{C_n}(C_{n+1}) = 1. \end{aligned}$$

On montre de la même façon (c'est-à-dire en appliquant la même formule, avec le même système complet d'événements) que

$$\boxed{P(B_{n+1}) = \frac{2}{3}P(B_n) \text{ et } P(C_{n+1}) = \frac{2}{3}P(A_n) + P(C_n).}$$

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les relations obtenues à la question précédente s'expriment matriciellement par la relation $\boxed{U_{n+1} = AU_n.}$

Certains ont tenté (en vain) de raisonner par récurrence. Pourquoi?

(b) Il suffit de raisonner par récurrence simple.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_n = A^{n-1}X_1$, donc, en utilisant ??,

$$U_n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (2/3)^{n-1} \\ (2/3)^{n-1} \\ 3 - 2(2/3)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Comme $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{P(A_n) = \frac{1}{3} \times (2/3)^{n-1}, \quad P(B_n) = \frac{1}{3} \times (2/3)^{n-1}, \quad P(C_n) = 1 - (2/3)^n.}$$

Comme $\frac{2}{3} \in]-1,1[$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1.}$$

Beaucoup d'entre vous ont écrit $A^n = P^n D^n \left(P^{-1}\right)^n$ et ont donc calculé les puissances n-ièmes des trois matrices ce qui leur a fait perdre un temps considérable. Il est dommage que vous ne vous assuriez pas, à la fin de votre calcul, que la somme des trois probabilités fait bien 1 !

10. Asymptotiquement (c'est-à-dire lorsque n devient *grand*), le consommateur mange toutes les semaines le dessert C. Cela n'est pas surprenant compte tenu des données de l'énoncé puisque dès qu'il commence à manger ce dessert il n'arrête plus.

Exercice 2 1. (a) $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(X^2\right)^k = A(X^2)$ où $A = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} X^k$.

(b) On note $A(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On a $a_{n-1} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} \neq 0$ donc A est de degré $n-1$.

D'après le cours,

$$\sum_{k=1}^{n-1} z_k = -\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{\frac{(-1)^{n-2}}{(2n-4)!}}{\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}} = \frac{(2n-2)!}{(2n-4)!} = (2n-2)(2n-3)$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} z_k = (-1)^{n-1} \frac{a_0}{a_{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{1}{\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}} = (2n-2)!$$

Conclusion: $\sum_{k=1}^{n-1} z_k = (2n-2)(2n-3)$ et $\prod_{k=1}^{n-1} z_k = (2n-2)!$

Le degré du polynôme A est $n-1$ et non pas n ! Par ailleurs, beaucoup d'erreurs dans la simplification de $\dfrac{(2n-2)!}{(2n-4)!}$.

(c) Soit $z \in \mathbb{C}$, on a $A(z^2) = P(z)$ donc

$$z \text{ racine de } P \Leftrightarrow P(z) = 0 \Leftrightarrow A(z^2) = 0 \Leftrightarrow z^2 \text{ racine de } A$$

Conclusion: les racines de A sont les carrés des racines de P.

Le symbole $\sqrt{\ }$ est réservé à la racine carrée positive d'un RÉEL POSITIF !!!!!! c'est inadmissible de voir ce symbole utilisé sur des complexes (et pareil pour la puissance 1/2).

2. (a)

$$\begin{aligned} P_n"(X) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (X^{2k})" = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} 2k(2k-1) X^{2k-2} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k-2)!} X^{2k-2} \text{ car le terme pour } k=0 \text{ est nul} \end{aligned}$$

Posons $j = k-1$, alors

$$P"_n = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j)!} X^{2j} = -\sum_{j=0}^{n-2} \frac{(-1)^j}{(2j)!} X^{2j} = -\left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{(2j)!} X^{2j} - \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} X^{2n-2}\right] = -\left[P_n - \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} X^{2n-2}\right]$$

Conclusion: $P"_n + P_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} X^{2n-2}$.

(b) Si z est racine de P de multiplicité $m \geqslant 3$ alors $P_n(z) = P_n'(z) = P"_n(z) = 0$. D'après a), on a

$$P_n(z) + P_n"(z) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} z^{2n-1}$$

donc $z^{2n-2} = 0$. C'est impossible si $n = 1$ et cela donne $z = 0$ si $n \geqslant 2$. Mais 0 n'est pas racine de P_n puisque $P_n(0) = 1$.

Conclusion: les racines de P_n sont soit simple, soit double.

Beaucoup d'arnaques sur cette question car vous avez souvent fait démarrer la somme de la dérivée seconde à 2 (alors que le terme d'indice 1 ne s'annule pas !) et vous avez ensuite ramé pour justifier la formule. Sachez qu'il est, dans ce cas, appréciable de dire " je ne comprends pas pourquoi il reste un 1" plutôt que " je tente de faire disparaître le 1 d'une ligne à la suivante en espérant qu'elle ne le remarquera pas".

(c) Notons $x_1, \ldots, x_r$ les r racines complexes distinctes de P_n, notons $m_1, \ldots, m_r$ leur multiplicité respective dans P_n. On a $\deg(P_n) = \sum_{k=1}^{r} m_k$.

Or, d'après b), $\forall k \in [|1, r|]$, $m_k \leqslant 2$ donc $\sum_{k=1}^{r} m_k \leqslant 2r$ d'où $r \geqslant \frac{1}{2}\deg(P_n) = \frac{1}{2}(2n-2) = n-1$.

Conclusion: P_n a au moins $n-1$ racines complexes distinctes.

Ceux qui ont compris ont souvent eu du mal à me l'expliquer correctement, en traitant notamment le cas de où toutes les racines sont doubles puis en expliquant vaguement que c'était le cas où on avait le moins de racines. J'ai rarement été convaincue.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+\frac{1}{n})^n = exp\left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ or, $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$ par concavité de la fonction (ou par une brève étude de fonction) donc $\ln(1+\frac{1}{n}) \leqslant \frac{1}{n}$ $\left(\text{car } \frac{1}{n} > -1\right)$. Or $n \geqslant 0$ d'où $n\ln(1+\frac{1}{n}) \leqslant 1$. Enfin, exp est croissante donc $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
J'ose à peine l'écrire mais un nombre non négligeable a tenté une récurrence.

(b)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}.\frac{n^n}{n!e^n} = \frac{(n+1)e.n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

donc

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{e.n^n}{(n+1)^n} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} \geqslant 1$$

d'après la question a) car $(1+\frac{1}{n})^n > 0$. On a donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ et $u_n > 0$ d'où $u_{n+1} \leqslant u_n, \forall n \geqslant 1$. La suite u est décroissante.

De plus, $u_1 = \frac{1}{e}$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \frac{1}{e}$

4. (a) On sait que: $\forall j \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(j)}(x) = \cos\left(x + j\frac{\pi}{2}\right)$. Donc $\cos^{(j)}(0) = \cos\left(j\frac{\pi}{2}\right)$.

- Si j est pair, $j = 2k$ où $k \in \mathbb{N}$, $\cos^{(j)}(0) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.
- Si j est impair, $j = 2k+1$ où $k \in \mathbb{N}$, $\cos^{(j)}(0) = \cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$.

donc

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \frac{\cos^{(j)}(0)}{j!} X^j = \sum_{j=0, j \text{ pair}}^{2n-1} \frac{\cos^{(j)}(0)}{j!} X^j$$

On pose $j = 2k$, on a

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \frac{\cos^{(j)}(0)}{j!} X^j = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} X^{2k} = P_n(X)$$

Là encore, l'explication était souvent douteuse pour justifier l'égalité. J'ai vu souvent " on pose $j = 2k$" alors que j est quelconque (et donc le nouvel indice n'est pas entier!!). Je passe là encore sur les $(-1)^{k/2}$ qui n'ont aucun sens si k est impair

(b) Soit $x \in \left[0, \frac{2n}{e}\right]$, alors $x^{2n} \leqslant \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$ car $0 \leqslant x^2 \leqslant \left(\frac{2n}{e}\right)^2$.

$$| P_n(x) - \cos(x) | \leqslant \frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}(2n)!} \leqslant \frac{1}{e}$$

d'après 3b).

(c) Soit k un entier dans $[0, \frac{2n}{e}]$ alors $k\pi \in \left[0, \frac{2n}{e}\right]$ donc, d'après b),

$$| P_n(k\pi) - \cos(k\pi) | \leqslant \frac{1}{e}$$

or $\cos(k\pi) = (-1)^k$ d'où $-\frac{1}{e} \leqslant P_n(k\pi) - (-1)^k \leqslant \frac{1}{e}$ donc

$$-\frac{1}{e} + (-1)^k \leqslant P_n(k\pi) \leqslant \frac{1}{e} + (-1)^k$$

- Pour k pair, $0 < 1 - \frac{1}{e} \leqslant P_n(k\pi)$ donc $P_n(k\pi) > 0$.
- Pour k impair, $P_n(k\pi) \leqslant \frac{1}{e} - 1 < 0$ donc $P_n(k\pi) < 0$.

(d)

• On applique le théorème des valeurs intermédiaires à P_n (continue sur $\mathbb{R}$) sur chaque intervalle $[k\pi, (k+1)\pi]$ où $k \in [0, \frac{2n}{e\pi} - 1]$ (ce qui donne $E\left(\frac{2n}{e\pi} - 1\right) + 1 = E\left(\frac{2n}{e\pi}\right)$ valeurs de k).

$P_n(k\pi)$ et $P_n((k+1)\pi)$ sont de signes opposés stricts d'après c) donc $\exists c_k \in]k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $P_n(c_k) = 0$.

• On a donc trouvé $E\left(\frac{2n}{e\pi}\right)$ racines distinctes pour P_n dans $\mathbb{R}_+^\star$ (distinctes car les intervalles $]k\pi, (k+1)\pi[$ sont disjoints).

De plus, P_n est pair donc les opposés des c_k sont aussi racines. Cela fait $2E\left(\frac{2n}{e\pi}\right)$, au moins, racines distinctes dans $\mathbb{R}$ pour P_n.

5. (a) On vient de voir que pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour $k \in \left[\!| \, 0, E\left(\frac{2n}{e\pi}\right) - 1 \, |\!\right]$, P_n a au moins une racine dans I_k. Or , pour n assez grand, $k \leqslant E\left(\frac{2n}{e\pi}\right) - 1$ car $\frac{2n}{e\pi} \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

   Donc, pour n assez grand, P_n a au moins une racine dans I_k.

   (b) D'après 4b) et l'énoncé:

   Pour n assez grand, $| P_n(x_n) - \cos(x_n) | \leqslant \dfrac{x_n^{2n}}{(2n)!}$.

   Or, $P_n(x_n) = 0$ par définition et $x_n \in [0, (k+1)\pi]$ d'où $x_n^{2n} \in \left[0, ((k+1)\pi)^{2n}\right]$.

   On a donc, pour n assez grand, $| \cos(x_n) | \leqslant \frac{((k+1)\pi)^{2n}}{(2n)!}$. Or k est fixé donc $((k+1)\pi)^{2n}$ est négligeable devant $(2n)!$ quand n tend vers $+\infty$. D'où, par encadrement, $| \cos(x_n) | \to 0$ quand $n \to +\infty$ donc $\cos(x_n) \to 0$.

Il faut impérativement majorer x_n pour passer à la limite car la limite que vous connaissez est $\frac{a^n}{n!}$ avec a une constante ! Par ailleurs, beaucoup m'ont dit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ par croissances comparées ce qui est parfaitement faux. On l'a montré à la main en faisant une longue fraction.

(c) Soit $x \in I_k$, $x - k\pi \in [0, \pi]$ donc $x - k\pi = \arccos(\cos(x - k\pi))$ car arccos est la réciproque de la restriction de cos à $[0, \pi]$.
D'où $x - k\pi = \arccos((-1)^k \cos x)$ donc $x = k\pi + \arccos((-1)^k \cos x)$.

(d) D'après b), $(-1)^k \cos(x_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$ or $\arccos(y) \to \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ quand y tend vers 0 (arccos est continue en 0).
Donc $\arccos((-1)^k \cos(x_n)) \to \frac{\pi}{2}$ quand n tend vers $+\infty$, d'où, d'après c) et comme $x_n \in I_k$, pour n assez grand, $x_n \to k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 L'objectif est d'obtenir un DL en 0 de $f : x \mapsto \operatorname{sh}(\arcsin x)$.

1. Détermination d'un DL à un ordre raisonnable.

(a) On peut déterminer le DL de arcsin en intégrant celui de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2),$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4),$$

puis, en intégrant :

$$\arcsin(x) = \arcsin(0) + x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5).$$

On peut également utiliser le DL de sinus : $\sin(x) \sim x$ et $\arcsin(0) = 0$ donc $\arcsin(x) \sim x$.
On a également $\sin(x) - x \sim -\frac{x^3}{6}$ donc

$$x - \arcsin(x) \sim -\frac{\arcsin^3(x)}{6} \sim -\frac{x^3}{6},$$

d'où

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Enfin, on écrit

$$\sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \sim \frac{x^5}{5!} \text{ donc } x - \arcsin(x) + \frac{\arcsin^3(x)}{6} \sim \frac{\arcsin^5(x)}{5!} \sim \frac{x^5}{5!}.$$

On a donc

$$x - \arcsin(x) + \frac{1}{6}\arcsin^3(x) = \frac{x^5}{5!} + o(x^5).$$

Or,

$$\arcsin^3(x) = \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 = x^3 + 3x^2\frac{x^3}{6} + o(x^5),$$

on a donc

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{12} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5).$$

Certains ont choisi de poser $\arcsin(x) = x + ax^3 + bx^5 + o(x^5)$ et d'identifier. C'est possible mais il faut, au préalable, justifier le fait que arcsin *admet un DL5 au voisinage de* 0.

(b) On sait que $\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$, on a donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin(x) + \frac{1}{6}\arcsin^3(x) + \frac{1}{5!}\arcsin^5(x) + o\left(\arcsin^5(x)\right) \\ &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5) + \frac{1}{6}\left(x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right) + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\ &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{6} + o(x^5) \end{aligned}$$

Obtention d'une équation différentielle

2. La fonction f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ en tant que composée de fonctions C^∞.

3. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{ch}(\arcsin(x)) \text{ et } f''(x) = \frac{1}{1-x^2}\mathrm{sh}(\arcsin(x)) + \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\mathrm{ch}(\arcsin(x)).$$

BEAUCOUP d'erreurs de signes ou autre sur cette question.

4. Soit $x \in]-1,1[$, alors, d'après la question précédente, on a

$$\left(1-x^2\right) f''(x) - xf'(x) - f(x) = 0$$

Utilisation de cette équation différentielle

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est de classe C^n, elle admet donc un DL en 0 à l'ordre n. On en déduit qu'existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que l'on peut écrire, quand $x \to 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right)$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f' est de classe C^n, elle admet donc un DL d'ordre n en 0. De plus, par unicité du DL, on sait que ce DL est égal à la dérivation terme à terme DL d'ordre $n+1$ en 0 de f. On a donc Montrer que $f'(x) = \sum_{k=0}^{n+1} k a_k x^{k-1} + o\left(x^n\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   On admet qu'on a de même $f''(x) = \sum_{k=0}^{n+2} k(k-1)a_k x^{k-2} + o\left(x^n\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Certains m'ont juste dit qu'il fallait dériver le DLn de f et ont ensuite ramé pour m'expliquer pourquoi on avait un terme en plus. Attention, si f admet un DLn, il n'y a aucune raison pour que f' admette un DLn-1 !

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, on remplace f, f' et f'' par leur DL d'ordre n en 0, on obtient :

$$\begin{aligned} & (1-x^2) f''(x) - xf'(x) - f(x) \\ = \ & (1-x^2)\sum_{k=0}^{n+2} k(k-1)a_k x^{k-2} - x\sum_{k=0}^{n+1} k a_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \\ = \ & \sum_{k=0}^{n} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{n+2} k(k-1)a_k x^k - \sum_{k=0}^{n+1} k a_k x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^{n+2}) \end{aligned}$$

   on en déduit que le terme en x^n vaut

$$c_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - na_n - a_n = (n+2)(n+1) - (n^2+1)a_n.$$

8. D'après la question précédente, le coefficient c_n de la fonction étudiée vaut $(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2+1)a_n$ et, comme cette fonction est nulle, on a, par unicité du DL, $c_n = 0$ donc $a_{n+2} = \dfrac{n^2+1}{(n+1)(n+2)}a_n$ et ceci est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9. On a $a_0 = f(0) = 0$ et $a_1 = f'(0) = 1$.

10. On sait que $a_{n+2} = \dfrac{n^2+1}{(n+1)(n+2)}a_n$ et $a_0 = 0$ donc, par récurrence immédiate, $a_{2n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n+1} = \dfrac{(2n-1)^2+1}{2n(2n+1)}a_{2n-1}$. On a donc

$$a_3 = \frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{3} \text{ et } a_5 = \frac{10}{20}a_3 = \frac{1}{6}.$$

On retrouve bien les mêmes coefficients.

12. On calcule $a_7 = \dfrac{26}{42}a_5 = \dfrac{13}{126}$, on a donc

$$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} + \frac{13x^7}{126} + o(x^7).$$