Devoir surveillé 7.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit A une partie de E . On dit que A est un sous-espace affine de E ssi $A = \emptyset$ ou s'il existe un sous-espace vectoriel F de E et $a \in E$ tels que:

$$A = \{a + u, u \in F\}.$$

- (a) Montrer que si A est un sous-espace vectoriel de E , alors A est un sous-espace affine de E .
(b) Soit $a \in E$, montrer que $\{a\}$ est un sous-espace affine de E .
(c) Montrer que si $A = \{a + u, u \in F\}$ est un sous-espace affine et $(v, w) \in A^2$, alors $v - w \in F$.
(d) Montrer que si $A = \{a + u, u \in F\}$ et $\alpha \in A$, alors $A = \{\alpha + u, u \in F\}$.
- Dans cette question, on pose: $E = \mathbb{K}[X]$,

$$F = \{P \in E, P(1) = P(-1)\} \text{ et } A = \{P \in E, P(1) = 2 + P(-1)\}$$

- (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
(b) Montrer que $X \in A$.
(c) Montrer que A est un sous-espace affine de E .
- Dans cette question, on pose: $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des suites réelles),

$$F = \{(u_n) \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0\}$$

$$\text{et } A = \{(u_n) \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 1\}$$

- (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
(b) On pose: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n$.
Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$.
(c) Montrer que A est un sous-espace affine de E .

- Soit A un sous-espace affine de E . Montrer que A est un sous-espace vectoriel de E ssi $0_E \in A$.
- Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E . Soient $a, b \in E$.
On considère les sous-espaces affines de E :

$$A = \{a + u, u \in F\} \text{ et } B = \{b + v, v \in G\}.$$

- (a) Montrer que: $A \subset B \Leftrightarrow (a - b \in G \text{ et } F \subset G)$.
(b) Montrer que: $A = B \Leftrightarrow (a - b \in G \text{ et } F = G)$.

On a donc prouvé que si A est un sous-espace affine non vide de E , il existe un **unique** sous-espace vectoriel F de E tel que:

$$A = \{a + u, u \in F\} \text{ avec } a \in E.$$

L'espace vectoriel F est appelé **la direction** du sous-espace affine A .

- Soient A et B des sous-espaces affines non vides de E de directions respectives F et G .
On suppose que $A \cap B \neq \emptyset$.
Montrer que $A \cap B$ est un sous-espace affine de E de direction $F \cap G$.
- Soient A et B des sous-espaces affines non vides de E de directions respectives F et G .
Soient $a, b \in E$ tels que:

$$A = \{a + u, u \in F\} \text{ et } B = \{b + v, v \in G\}.$$

On suppose dans cette question que $F \oplus G = E$.

- (a) Justifier l'existence de $u \in F, v \in G$ tels que:

$$b - a = u + v.$$

- (b) Montrer que $A \cap B \neq \emptyset$.
(c) En déduire que $A \cap B$ est un singleton.

Exercice 2.

Dans tout ce problème, étant donné un entier n , on définit les polynômes réels

$$Q_n = (X^2 - 1)^n \text{ et } L_n = \frac{1}{2^n n!} Q_n^{(n)}.$$

Attention: Q_n est la puissance n ème de $X^2 - 1$, L_n est la dérivée n ème.

Partie I. Propriétés de la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Calculer L_0 et L_1 . Vérifier que $L_2 = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme Q_n .
 - (b) En déduire le degré et le coefficient dominant du polynôme L_n
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction polynomiale $x \mapsto L_n(x)$ est de même parité que n .
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) En écrivant $Q_n = (X - 1)^n (X + 1)^n$, exprimer L_n comme une combinaison linéaire de polynômes de la forme $(X - 1)^{n-k} (X + 1)^k$ (pour k variant entre 0 et n).
 - (b) Montrer $L_n(1) = 1$ et déterminer $L_n(-1)$.
5. Racines de L_n . Soit $n \geq 1$.
 - (a) Déterminer les racines de Q_n , avec leur multiplicité.
 - (b) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $H(k)$ l'assertion " il existe un réel non nul $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et une liste de réels $-1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k < 1$ tels que $Q_n^{(k)} = \lambda (X - 1)^{n-k} (X + 1)^{n-k} (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_k)$ ". Montrer $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, H(k)$ par récurrence.
 - (c) En déduire qu'il existe n réels $-1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < 1$ tels que

$$L_n = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k) \quad \text{et} \quad \forall k \in [1, n], \alpha_k + \alpha_{n+1-k} = 0.$$

- (d) À quelle condition le nombre 0 est-il racine de L_n ?

Partie II: Spectre d'un opérateur différentiel.

Dans cette partie, on considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & ((X^2 - 1)P')' = (X^2 - 1)P'' + 2XP' \end{cases} .$$

6. Justifier que φ est linéaire.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ , c'est-dire que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
8. Déterminer l'ensemble $\ker(\varphi)$.
9. On veut montrer que pour tout entier naturel $n, \varphi(L_n) = n(n+1)L_n$
 - (a) Montrer cette propriété pour $n \in \{0, 1, 2\}$.
 - (b) On suppose maintenant $n \geq 2$
 - i. Montrer $(X^2 - 1)Q_n' = 2nXQ_n$
 - ii. En dérivant $n+1$ fois la relation précédente, conclure.
10. Montrer que pour tout entier n , la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est libre.
11. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $(n+1)$ -uplet $(\mu_0, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que
$$P = \sum_{k=0}^n \mu_k L_k.$$
12. On souhaite finalement trouver tous les couples $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X]$ tels que $\varphi(P) = \lambda P$.
 - (a) Soit $P \neq 0$ tel que $\varphi(P) = \lambda P$. Montrer qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ et $\mu_i \in \mathbb{R}$ tels que $P = \mu_i L_i$.
 - (b) En déduire l'ensemble des couples $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X]$ tels que $\varphi(P) = \lambda P$.

Exercice 3.

Dans tout le problème, on désigne par E le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si u est une telle suite, on note, pour tout entier naturel n , u_n son terme d'indice n . On note I l'application identité de E . On définit un endomorphisme T de E en posant

$$T : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & T(u) = (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

c'est-à-dire que, pour tout entier naturel n , le n -ième terme de la suite $T(u)$ vérifie $T(u)_n = u_{n+1}$.

On considère également l'endomorphisme L de E défini par $L = I + T$. Enfin, on rappelle que pour tout endomorphisme φ de E , on définit par récurrence l'endomorphisme itéré φ^k par $\varphi^0 = I$ et pour tout entier naturel k non nul, $F^k = F \circ F^{k-1}$.

Préliminaires

1. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$ une matrice inversible d'inverse $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$. On se donne deux familles $(f_1, \dots, f_p)$ et $(e_1, \dots, e_p)$ de E . Montrer que

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, f_k = \sum_{r=1}^p a_{rk} e_r \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, e_k = \sum_{s=1}^n b_{sk} u_s.$$

2. Exprimer, pour tout entier n , L^n en fonction des puissances de T et de I .

Partie I

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note Ω_p l'ensemble des suites complexes p -périodiques, c'est-à-dire l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n$.

1. (a) Montrer que Ω_p est un ssev de E .
(b) Soit φ l'application définie par

$$\varphi : \begin{cases} \Omega_p & \longrightarrow & \mathbb{C}^p \\ u & \longmapsto & \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{p-1} \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Démontrer que φ est un isomorphisme.

- (c) Pour $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on définit la suite c^j en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n^j = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv j[p] \text{ c'est-à-dire } n-j \text{ est un multiple de } p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que la famille de suites $B_c = (c^0, \dots, c^{p-1})$ est une base de Ω_p .

- (d) Soit $u \in \Omega_p$, expliciter les coordonnées de u dans la base B_c .

2. Justifier que Ω_p est stable par T et L .

Dans la suite du problème, on fixe $p \geq 2$ et on s'intéresse aux endomorphismes induits sur Ω_p par T et L que l'on note respectivement t et l (on a donc $t = T|_{\Omega_p}$ et $l = L|_{\Omega_p}$).

3. Déterminer $\ker(t)$. Qu'en conclure?
4. (a) Soit $u \in \ker(l)$. Montrer que $\varphi(u)$ vérifie le système S :

$$(S) \begin{cases} u_0 + u_1 & & & & = 0 \\ & u_1 + u_2 & & & = 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & u_{p-2} + u_{p-1} & = 0 \\ u_0 & & & & + u_{p-1} = 0 \end{cases}$$

- (b) Résoudre le système S en discutant selon la parité de p .
- (c) Déterminer $\text{Ker}(l)$.

5. On note pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$ et on considère la matrice $A = (\omega_{k-1}^{j-1})_{1 \leq k, j \leq p} = \left(e^{\frac{i(k-1)(j-1)\pi}{p}} \right)_{1 \leq k, j \leq p}$.

- (a) Montrer que $\bar{A}^\top A = pI_p$, où $\bar{A}$ désigne la matrice conjuguée de A c'est-à-dire celle dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de A .
- (b) En déduire que A est inversible et préciser son inverse.

6. Déterminer p suites $\epsilon^0, \epsilon^1, \dots, \epsilon^{p-1}$ de Ω_p telles que pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $\epsilon_0^k = 1$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, t(\epsilon^k) = \omega_k \epsilon^k.$$

cette page blanche n'est pas une erreur, c'est pour vous permettre d'avoir les deux parties de cet exercice côte à côte (et distribuer le sujet avec un verso blanc).

7. Montrer que $B_\epsilon = (\epsilon^0, \epsilon^1, \dots, \epsilon^{p-1})$ est une famille libre. On admet que c'est alors une base de Ω_p .

Indication: Si A est inversible, le système associé à $AX = (0)$ admet uniquement la solution nulle.

8. On note $x_0, \dots, x_{p-1}$ les coordonnées de u dans la base B_ϵ ce qui permet d'écrire $u = \sum_{k=0}^{p-1} x_k \epsilon^k$.

(a) Exprimer $l(u)$ puis $l^n(u)$ pour tout entier naturel n en fonction des $x_k, \omega_k, \epsilon^k$.

(b) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \omega_k}{2}\right)^n = 0$.

(c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} l^n(u)_0 = x_0$

(d) Montrer que $x_0 = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u_k$.

Indication: Utiliser la question préliminaire.

(e) En déduire que pour tout $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{0 \leq k \leq \frac{n-j}{p}} \binom{pk+j}{n} = \frac{1}{p}$.

-----fin officielle du sujet-----

Bonus:

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit u une suite de E admettant a pour limite réelle.

(a) Vérifier que $\frac{1}{2^n} L^n(u)_0 - a = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (u_k - a)$.

(b) Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose

$$S_N(n) \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N \binom{n}{k} (u_k - a) \text{ et } R_N(n) \frac{1}{2^n} \sum_{k=N+1}^n \binom{n}{k} (u_k - a)$$

i. Montrer que $|R_N(n)| \leq \max_{k \in \llbracket N+1, n \rrbracket} |u_k - a|$.

ii. On pose $P_N(x) = \sum_{k=0}^N \frac{x^k}{k!}$ pour $x \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$|S_N(n)| \leq \frac{1}{2^n} P_N(n) \max_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket} |u_k - a|$$

iii. Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} P_N(n) = 0$.

(c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} L^n(u)_0 = a$.

10. Soit $u \in E$. On définit une suite s par $s_0 = 0$ et $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$, pour tout

$n \geq 1$. On définit également une suite $S_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s_k$.

(a) Montrer les inégalités ci-dessous, pour tout entier naturel n .

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} s_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s_k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s_{k+1}$$

(b) En déduire que pour tout entier naturel n , $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2^{n+1}} L^n(u)_0$.

(c) On suppose que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k+1}} L^k(u)_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

11. On considère les suites u et J définies par $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $J_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$.

(a) Montrer que $J_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k$.

(b) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$ (intégrale de Wallis)

et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = \frac{\pi}{4}$ (série de Fourier), montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{2^{k-1} (k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{\pi}{4}$$

sujet 2

Correction provisoire du DS n 7,

Exercice 1 1. (a) Montrer que si A est un sous-espace vectoriel de E , alors A est un sous-espace affine de E . On suppose que A est un ssev de E , on a bien $A \neq \emptyset$ car $O_E \in A$. Par ailleurs, on a

$$A = \{O_E + u, u \in A\}, \text{ avec } A \text{ un ssev de } E$$

A est donc bien un sous-espace affine.

(b) Soit $a \in E$, montrer que $\{a\}$ est un sous-espace affine de E .

On a $A \neq \emptyset$. De plus, si on considère le ssev $\{0_E\}$, alors on a $\{a\} = \{a + u, u \in \{0_E\}\}$, on a donc bien $\{a\}$ ss-espace affine de E .

(c) Montrer que si $A = \{a + u, u \in F\}$ est un sous-espace affine et $(v, w) \in A^2$, alors $v - w \in F$

Soit $(v, w) \in A^2$, alors il existe $(u, u') \in F^2$ tel que $v = a + u$ et $w = a + u'$. On a donc $v - w = u - u'$ et, comme F est un ssev, $u - u' \in F$. On a donc bien $v - w \in F$.

(d) Montrer que si $A = \{a + u, u \in F\}$ et $\alpha \in A$, alors $A = \{\alpha + u, u \in F\}$

On va raisonner par double inclusion. Soit $b \in A$, alors il existe $u \in F$ tel que $b = a + u$. On écrit alors

$$b = \alpha + \underbrace{a - \alpha}_{\in F} + u,$$

d'après la question précédente, on a donc $a - \alpha + u \in F$ et b appartient bien à $\{\alpha + u, u \in F\}$.

Soit maintenant $b \in \{\alpha + u, u \in F\}$, alors il existe $u \in F$ tel que $b = \alpha + u$ et on fait comme précédemment, on écrit

$$b = a + (\alpha - a) + u \text{ avec } (\alpha - a) + u \in F,$$

on a donc bien $b \in A$ ce qui achève de montrer l'égalité des deux ensembles.

2. Dans cette question, on pose: $E = \mathbb{K}[X]$,

$$F = \{P \in E, P(1) = P(-1)\} \text{ et } A = \{P \in E, P(1) = 2 + P(-1)\}$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

Le polynôme nul appartient à F . Si $(P, Q) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\begin{aligned} (\lambda P + Q)(1) &= \lambda P(1) + Q(1) \\ &= \lambda P(-1) + Q(-1) \\ &\text{car } (P, Q) \in F^2 \\ &= (\lambda P + Q)(-1) \end{aligned}$$

On a bien $\lambda P + Q \in F$ et F est bien un ssev de E .

(b) Montrer que $X \in A$.

On a $2 + X(-1) = 2 - 1 = 1 = X(1)$ donc $X \in A$.

(c) Montrer que A est un sous-espace affine de E .

Tout d'abord A est non vide puisqu'il contient X . On va montrer que $A = \{X + P, P \in F\}$ par double inclusion. Soit $Q \in \{X + P, P \in F\}$, alors il existe $P \in F$ tel que $Q = X + P$ avec $P \in F$. On a donc

$$2 + Q(-1) = 2 + (-1) + P(-1) = 1 + P(1) = Q(1),$$

donc $Q \in A$.

Réciproquement, si $Q \in A$, alors on montre facilement que $Q - X \in F$ on a donc

$$Q = X + \underbrace{Q - X}_{\in F},$$

donc $Q \in \{X + P, P \in F\}$. On a bien l'égalité par double inclusion.

3. Dans cette question, on pose: $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des suites réelles),

$$F = \{(u_n) \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0\}$$

$$\text{et } A = \{(u_n) \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 1\}$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

La suite nulle appartient bien à F . Si $(u, v) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $w = \lambda u + v$ appartient à F . Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \lambda u_{n+1} + v_{n+1} \\ &= \lambda u_n + v_n \\ &\text{car } (u, v) \in F^2 \\ &= w_n \end{aligned}$$

donc a donc bien $w \in F$ et F est un ssev de E .

- (b) On pose: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = n$. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$.
 Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $v_{n+1} - v_n = (n+1) - n = 1$, on a donc bien $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$.
- (c) Montrer que A est un sous-espace affine de E .

On pose $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Tout d'abord A est non vide puisqu'il contient v . On va montrer que $A = \{v + u, u \in F\}$ par double inclusion. Soit donc $w = v + u$ avec $u \in F$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} - w_n = v_{n+1} + u_{n+1} - v_n - u_n = 1,$$

on a donc bien $w \in A$.

Réciproquement, si $w \in A$, montrons que $w - v \in F$ pour pouvoir écrire $w = v + (w - v)$. Soit donc $n \in \mathbb{N}$, alors

$$w_{n+1} - v_{n+1} - (w_n - v_n) = w_{n+1} - w_n - (v_{n+1} - v_n) = 1 - 1 = 0,$$

on a bien $w - v \in F$. Ceci achève la preuve de l'égalité $A = \{v + u, u \in F\}$.

4. Soit A un sous-espace affine de E . Montrer que A est un sous-espace vectoriel de E ssi $0_E \in A$.

On pose $A = \{a + u, u \in F\}$. On raisonne par double implication. On suppose tout d'abord $0_E \in A$, alors d'après la question ??, on a $A = \{0_E + u, u \in F\} = F$ donc A est bien un ssev de E .

Réciproquement, si A est un ssev, alors A contient 0_E . On a montré l'équivalence.

5. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E . Soient $a, b \in E$. On considère les sous-espaces affines de E :

$$A = \{a + u, u \in F\} \text{ et } B = \{b + v, v \in G\}.$$

- (a) Montrer que: $A \subset B \Leftrightarrow (a - b \in G \text{ et } F \subset G)$.

À nouveau, on raisonne par double implication. On suppose $A \subset B$. Alors $a \in B$ et d'après la question ??, on a $b - a \in G$. De plus, si $u \in F$, alors $a + u \in A$ donc $a + u \in B$. On a alors $a + u = b + v$ avec $v \in G$, ce qui permet d'écrire

$$u = \underbrace{b - a}_{\in G} + v \in G,$$

on a bien montré l'inclusion $F \subset G$.

Supposons maintenant $b - a \in G$ et $F \subset G$. Soit $x \in A$, alors $x = a + u, u \in F$. On a donc

$$x = b + (a - b) + u.$$

Or $a - b = -(b - a) \in G$ puis que G est un ssev et $u \in F$ avec $F \subset G$ donc $u \in G$. On en déduit que $a - b + u \in G$ donc $x \in B$ ce qui montre l'inclusion $A \subset B$.

On a bien montré l'équivalence.

- (b) Montrer que: $A = B \Leftrightarrow (a - b \in G \text{ et } F = G)$.

On utilise la question précédente et l'équivalence $B \subset A \Leftrightarrow (b - a \in F \text{ et } G \subset F)$ qui se montre par symétrie des rôles. On obtient l'équivalence souhaitée. On a donc prouvé que si A est un sous-espace affine non vide de E , il existe un **unique** sous-espace vectoriel F de E tel que:

$$A = \{a + u, u \in F\} \text{ avec } a \in E.$$

L'espace vectoriel F est appelé **la direction** du sous-espace affine A .

6. Soient A et B des sous-espaces affines non vides de E de directions respectives F et G .

On suppose que $A \cap B \neq \emptyset$.

Montrer que $A \cap B$ est un sous-espace affine de E de direction $F \cap G$. Soit $x \in A \cap B$, on veut montrer que $A \cap B = \{x + u, u \in F \cap G\}$.

Soit $y \in A \cap B$, alors $y - x \in F$ et $y - x \in G$ donc $y - x \in F \cap G$, on a donc $y \in \{x + u, u \in F \cap G\}$. Réciproquement, soit $u \in F \cap G$, montrons que $x + u \in A \cap B$. On a $x + u \in A$ car $x \in A$ et $u \in F$. De même $x + u \in B$ donc $x + u \in A \cap B$.

7. Soient A et B des sous-espaces affines non vides de E de directions respectives F et G .

Soient $a, b \in E$ tels que:

$$A = \{a + u, u \in F\} \text{ et } B = \{b + v, v \in G\}.$$

On suppose dans cette question que $F \oplus G = E$.

- (a) Justifier l'existence de $u \in F, v \in G$ tels que:

$$b - a = u + v.$$

On sait que $b - a \in E$ car $(a, b) \in E^2$ et E est un ev. Comme $E = F \oplus G$, on sait qu'il existe $(u, v) \in F \times G$, $b - a = u + v$.

(b) Montrer que $A \cap B \neq \emptyset$.

D'après la question précédente, on a $\underbrace{b - v}_{\in B} = \underbrace{a + u}_{\in F}$ donc on a bien $b - v \in F \cap G$ et l'intersection est non vide.

(c) En déduire que $A \cap B$ est un singleton.

Soit $x \in A \cap B$, alors d'après la question ??, on a

$$A = \{x + u, u \in F\} \text{ et } B = \{x + v, v \in G\}$$

Soit maintenant $y \in A \cap B$, alors $y = x + u = x + v$ avec $(u, v) \in F \times G$, on a alors $u = v \in F \cap G$, or $F \cap G = \{0_E\}$ donc $u = v = 0_E$ et $y = x$.

On a bien montré que $A \cap B$ est un singleton.

Exercice 2 Partie I. Propriétés de la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Calculer L_0 et L_1 . Vérifier que $L_2 = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}$. On a

$$- Q_0 = (X^2 - 1)^0 = 1, \text{ danc } L_0 = \frac{1}{2^0 - 0!} Q_0^{(0)} = 1.$$

$$- Q_1 = X^2 - 1, \text{ danc } L_1 = \frac{1}{2^1 - 1!} Q_1' = \frac{2X}{2} = X.$$

$$- Q_2 = (X^2 - 1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1, \text{ danc } L_2 = \frac{1}{2^2 \cdot 2!} Q_2'' = \frac{1}{8} (12X^2 - 4) = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme Q_n .

Le degré d'un produit étant la somme des degrés, le degré de Q_n est $n \deg(X^2 - 1) = 2n$. Le polynôme $(X^2 - 1)$ étant unitaire, Q_n l'est aussi.

(b) En déduire le degré et le coefficient dominant du polynôme L_n .

D'après la question précédente, on peut trouver un polynôme R_n de degré strictement inférieur à $2n$ tel que l'on puisse écrire $Q_n = X^{2n} + R_n$. Après dérivation n -uple, on a donc $Q_n^{(n)} = (2n) \cdots (n + 1)X^n + R_n^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!} X^n + R_n^{(n)}$, puis

$$L_n = \frac{1}{2^n n!} Q_n^{(n)} = \frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{n!} X^n + \frac{1}{2^n n!} R_n^{(n)}.$$

On sait que $\deg R_n^{(n)} \leq \deg R_n - n < n$, donc ce calcul montre que L_n est de degré n et de coefficient dominant

$$\frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{n!} = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction polynomiale $x \mapsto L_n(x)$ est de même parité que n .

La fonction $x \mapsto Q_n(x)$ est manifestement paire, par opérations. La dérivation envoyant les fonctions paires sur les fonctions impaires, et réciproquement, on en déduit que $Q_n^{(n)}$, et donc L_n , sont de la même parité que n .

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) En écrivant $Q_n = (X - 1)^n (X + 1)^n$, exprimer L_n comme une combinaison linéaire de polynômes de la forme $(X - 1)^{n-k} (X + 1)^k$ (pour k variant entre 0 et n).

On applique la formule de Leibniz :

$$Q_n^{(n)} = [(X - 1)^n (X + 1)^n]^{(n)}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(X - 1)^n]^{(k)} [(X + 1)^n]^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{n \cdots (n - k + 1)}_{=n!/(n-k)!} (X - 1)^{n-k} \underbrace{n \cdots (k + 1)}_{=n!/k!} (X + 1)^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } L_n &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!^2}{k!(n-k)!} (X - 1)^{n-k} (X + 1)^k \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X - 1)^{n-k} (X + 1)^k. \end{aligned}$$

(b) Montrer $L_n(1) = 1$ et déterminer $L_n(-1)$.

On déduit du calcul précédent que tous les termes de la somme s'annule en 1 sauf celui d'indice $k = n$, on a donc

$$L_n(1) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{n}^2 1 \cdot 2^n = \frac{2^n}{2^n} = 1.$$

On peut appliquer le même raisonnement en -1 (tous les termes de la somme s'annule en -1 sauf celui d'indice $k = 0$) ou bien dire que la fonction polynomiale associée à L_n est de même parité que n donc $L_n(-1) = (-1)^n$.

5. *Racines de L_n . Soit $n \geq 1$.*

(a) *Déterminer les racines de Q_n avec leur multiplicité.*

L'expression $Q_n = (X - 1)^n(X + 1)^n$ montre directement que, si $n \geq 1$, les racines de Q_n sont -1 et 1 , avec multiplicité n dans les deux cas. Naturellement, $Q_0 = 1$ n'a pas de racine.

(b) *Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $H(k)$ l'assertion "il existe un réel non nul $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et une liste de k réels $-1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k < 1$ tels que $Q_n^{(k)} = \lambda (X^2 - 1)^{n-k} (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_k) \dots$ ". Montrer $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, H(k)$ par récurrence.*

Initialisation. On a $Q'_n = n(X^2 - 1)'(X^2 - 1)^{n-1} = 2nX(X^2 - 1)^{n-1}$, ce qui montre $H(1)$: les réels $\lambda = 2n$ et $\alpha_1 = 0$ conviennent.

Hérédité. Soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ tel que $H(k)$. On peut donc trouver $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^*$ et $-1 < \tilde{\alpha}_1 < \dots < \tilde{\alpha}_k < 1$ tels que

$$Q_n^{(k)} = \tilde{\lambda} (X - 1)^{n-k} (X + 1)^{n-k} (X - \tilde{\alpha}_1) \dots (X - \tilde{\alpha}_k) = \lambda (X + 1)^{n-k} (X - \tilde{\alpha}_1) \dots (X - \tilde{\alpha}_k) (X - 1)^{n-k}.$$

Montrons $H(k + 1)$. - Comme $k < n$, les réels -1 et 1 sont racines de $Q^{(k)}$, de multiplicité $n - k$ dans les deux cas. On en déduit que 1 et -1 sont racines de $Q_n^{(k+1)}$ de multiplicité $n - k - 1$.

Soit $\ell \in \llbracket 1, k - 1 \rrbracket$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction (de classe C^1) $x \mapsto Q_n^{(k)}(x)$ entre $\tilde{\alpha}_\ell$ et $\tilde{\alpha}_{\ell+1}$, on obtient l'existence d'un nombre réel $\alpha_{\ell+1} \in]\tilde{\alpha}_\ell, \tilde{\alpha}_{\ell+1}[$ tel que $Q_n^{(k+1)}(\alpha_{\ell+1}) = 0$. En appliquant le même argument entre -1 et $\tilde{\alpha}_1$ (resp entre $\tilde{\alpha}_k$ et 1), on obtient une nouvelle racine α_1 (resp α_{k+1}) de $Q_n^{(k+1)}$. Notons que l'on a les inégalités

$$-1 < \alpha_1 < \tilde{\alpha}_1 < \alpha_2 < \tilde{\alpha}_2 < \dots < \tilde{\alpha}_{k-1} < \alpha_k < \tilde{\alpha}_{k+1} < \alpha_{k+1} < 1,$$

ce qui montre notamment que les racines $-1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$ et 1 sont distinctes. Par ailleurs, $Q_n^{(k+1)}$ est de degré $2n - (k + 1)$ et on a

trouvé $k + 1 + 2(n - k - 1) = 2n - k - 1$ racines de $Q_n^{(k)}$ comptées avec multiplicité, on a donc trouvé toutes ses racines. On peut donc trouver $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$Q_n^{(k+1)} = \lambda (X + 1)^{n-(k+1)} (X - 1)^{n-(k+1)} \prod_{l=1}^{k+1} (X - \alpha_l)$$

ce qui montre H_{k+1} , et clôt la récurrence.

(c) *En déduire qu'il existe n réels $-1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < 1$ tels que*

$$L_n = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k) \quad \text{et} \quad \forall k \in [1, n], \alpha_k + \alpha_{n+1-k} = 0.$$

D'après $H(n)$, on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $-1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < 1$ tels que

$$Q_n^{(n)} = \lambda \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i).$$

donc il existe $\lambda' \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$L_n = \lambda' \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i). \quad *$$

L'expression montre que λ' est nécessairement le coefficient dominant de L_n , donc $\lambda' = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}$. Il reste simplement à montrer la propriété de symétrie des racines, qui est un reflet de la parité, ou l'imparité suivant les cas, de la fonction $x \mapsto L_n(x)$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$L_n(-\alpha_k) = (-1)^n L_n(\alpha_k) = 0,$$

donc les nombres $-\alpha_n < -\alpha_{n-1} < \dots < -\alpha_1$ sont des racines de L_n . Comme il y en a n , on peut même affirmer qu'il s'agit de toutes les racines de L_n . Mais l'expression $(*)$ montre que les racines de L_n sont $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$. On en déduit donc $\alpha_1 = -\alpha_n, \dots, \alpha_2 = -\alpha_{n-1}$ et ainsi de suite jusqu'à $\alpha_n = -\alpha_1$, ce qui équivaut à l'assertion de l'énoncé.

(d) À quelle condition le nombre 0 est-il racine de L_n ?

Si n est impair, l'imparité de $x \mapsto L_n(x)$ montre $L_n(0) = 0$, c'est-à-dire que 0 est racine de L_n .

Par ailleurs, la propriété de symétrie due à la question précédente montre que L_n a autant de racines strictement positives que de racines strictement négatives. Il possède en particulier un nombre pair de racines non nulles. Si 0 est racine de P , le nombre total de racines doit donc être impair. Mais ce nombre est précisément n . Ainsi, on a montré par double implication que 0 était racine de L_n si et seulement si n était impair.

Partie II. Spectre d'un opérateur différentiel. Dans cette partie, on considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \mapsto \\ P \mapsto ((X^2 - 1)P')' = (X^2 - 1)P'' + 2XP' \end{cases}$$

6. Justifier que φ est linéaire

L'application est linéaire par linéarité de la dérivation.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable sous φ , c'est-à-dire que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

- Si $n = 0$, on a, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X], P' = 0$ et donc $\varphi(P) = 0$. A fortiori, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
- Supposons désormais $n \geq 1$. On a alors $\deg P' \leq \deg P - 1 \leq n - 1$, donc $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On en déduit $(X^2 - 1)P' \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ puis $\varphi(P) = ((X^2 - 1)P')' \in \mathbb{R}_n[X]$.

8. Déterminer l'ensemble $\text{Ker}(\varphi)$.

On va montrer $\text{Ker}\varphi = \mathbb{R}$. L'inclusion réciproque a été montrée à la question précédente. Soit $P \in \{P \in \mathbb{R}(X) \mid \varphi(P) = 0\}$. On va montrer que P est constant. Comme $0 = \varphi(P) = ((X^2 - 1)P')'$, on a $(X^2 - 1)P'$ constant. Autrement dit,

$$2 + \deg P' = \deg((X^2 - 1)P') \leq 0.$$

Cela entraîne que $\deg P' \leq -2$, c'est-à-dire que $\deg P' = -\infty$, ou encore $P' = 0$. Ainsi, le polynôme P est constant, ce qui montre $\text{Ker}\varphi = \mathbb{R}$.

On peut aussi poser $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et traduire $\varphi(P) = 0$ avec les coefficients. On obtient alors $a_n = a_{n-1} = 0$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, k(k+1)a_k + (k+1)(k+2)a_{k+2} = 0.$$

Par récurrence descendante, on obtient bien que tous les coefficients jusqu'à a_1 sont nuls. L'égalité en $k = 0$ ne donne pas d'information sur a_0 , on a donc bien a_0 quelconque et P est un polynôme constant.

9. On veut montrer que pour tout entier naturel $n, \varphi(L_n) = n(n+1)L_n$.

(a) Montrer cette propriété pour $n \in \{0, 1, 2\}$.

Un calcul direct montre que $\varphi(L_0) = 0, \varphi(L_1) = 2L_1$ et $\varphi(L_2) = 6L_2$, ce qui montre la propriété demandée.

(b) On suppose maintenant $n \geq 2$.

i. Montrer $(X^2 - 1)Q'_n = 2nXQ_n$.

C'est un calcul immédiat à partir de $Q'_n = (X^2 - 1)'(X^2 - 1)^{n-1} = 2X(X^2 - 1)^{n-1}$.

ii. En dérivant $n+1$ fois la relation précédente, conclure.

On dérive $n+1$ fois, en appliquant la formule de Leibniz : comme $(X^2 - 1)^{(r)} = 0$ dès que $r > 2$ et que $X^{(r)} = 0$ dès que $r > 1$, les sommes se simplifient et l'on a :

$$\begin{aligned} & \binom{n+1}{0} (X^2 - 1)Q_n^{(n+2)} + \binom{n+1}{1} 2XQ_n^{(n+1)} + \binom{n+1}{2} 2Q_n^{(n)} \\ &= 2n \binom{n+1}{0} XQ_n^{(n+1)} + 2n \binom{n+1}{1} Q_n^{[n]} \end{aligned}$$

donc

$$(X^2 - 1)L_n'' + 2(n+1)XL_n' + n(n+1)L_n = 2nXL_n' + 2n(n+1)L_n$$

puis

$$(X^2 - 1)L_n'' + 2XL_n' = n(n+1)L_n,$$

c'est-à-dire $\varphi(L_n) = n(n+1)L_n$, Cela montre donc la propriété cherchée.

10. Montrer que pour tout entier $n, (L_0, \dots, L_n)$ est libre

On remarque que cette famille ne contient pas le polynôme nul puisque $\deg(L_k) = k$ pour tout k et les degrés sont distincts donc elle est libre.

11. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $(n+1)$ -uplet $(\mu_0, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que
- $$P = \sum_{k=0}^n \mu_k L_k.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $B(n)$ l'assertion

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \exists! (\mu_0, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : P = \sum_{k=0}^n \mu_k L_k.$$

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, B(n)$ par récurrence.

Initialisation : Soit $P \in \mathbb{R}_0[X]$, alors P est constant, il existe un réel $\mu_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P = \mu_0 L_0$ et μ_0 est unique puisque $L_0 \neq 0$.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $B(n)$. Montrons $B(n+1)$. Soit $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Posons $\mu_{n+1} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} a_{n+1}$ où a_{n+1} est le coefficient (éventuellement

nul) de P d'indice $n+1$. Les polynômes $\mu_{n+1} L_{n+1}$ et P sont alors deux éléments de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ possédant le même coefficient de degré $n+1$. On en déduit que $P - \mu_{n+1} L_{n+1}$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. D'après $B(n)$, on peut donc trouver $\mu_0, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que $P - \mu_{n+1} L_{n+1} = \sum_{k=0}^n \mu_k L_k$. On a donc $P = \sum_{k=0}^{n+1} \mu_k L_k$. L'unicité de $(\mu_0, \dots, \mu_{n+1})$ découle de la liberté de la famille $(L_0, \dots, L_{n+1})$, ce qui montre $H(n+1)$, et clôt la récurrence.

12. On souhaite finalement trouver tous les couples $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X]$ tels que $\varphi(P) = \lambda P$.

(a) Soit $P \neq 0$ tel que $\varphi(P) = \lambda P$. Montrer qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}^*$ tel que $P = \mu_i L_i$.

On peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $P \in \mathbb{R}_n[X]$, ce qui permet de trouver

des scalaires $\mu_0, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \sum_{k=0}^n \mu_k L_k$. On a alors

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= \varphi\left(\sum_{k=0}^n \mu_k L_k\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \mu_k \varphi(L_k) \text{ par linéarité de } \varphi \\ &= \sum_{k=0}^n \mu_k k(k+1) L_k \text{ car } \varphi(L_k) = k(k+1)L_k \end{aligned}$$

Par unicité de ce type de décompositions (démontrée à la question précédente), on en déduit

$$\forall k \in [0, n], \lambda \mu_k = k(k+1) \mu_k.$$

Ensuite, de deux choses l'une:

- Soit $\forall k \in [0, n], \mu_k = 0$, auquel cas on a $P = 0$.
- Soit il existe (au moins) un entier $j \in [0, n]$ tel que $\mu_j \neq 0$. Dans ce cas, l'égalité $\lambda \mu_j = j(j+1) \mu_j$ montre que $\lambda = j(j+1)$. Pour tout $k \in [0, n]$ différent de j , on a alors $\mu_k = 0$. Si ce n'était pas le cas, on pourrait en effet recommencer l'argument précédent et obtenir $\lambda = k(k+1)$, ce qui n'est pas compatible avec $\lambda = j(j+1)$ (car la suite $(\ell(\ell+1))_{\ell \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, donc elle ne reprend pas deux fois la même valeur).

Ainsi, on a montré $\lambda = j(j+1)$ et $P = \mu_j L_j$, pour un certain entier $j \in \mathbb{N}$.

- Clairement, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le couple $(\lambda, 0)$ convient.
- Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $\mu \in \mathbb{R}$, le couple $(j(j+1), \mu L_j)$ convient, parce que

$$\varphi(\mu L_j) = \mu \varphi(L_j) = \mu j(j+1) L_j.$$

In fine, l'ensemble des couples recherchés est

$$\{(\lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \cup \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} \{(j(j+1), \mu L_j) \mid \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 3 1. On sait que I et T commutent : $I \circ T = T \circ I = T$. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton à $(I + T)^n$, d'où

$$(I + T)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T^k = I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} T^k.$$

2. On suppose $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, u_k = \sum_{r=1}^p a_{rk} e_r$. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^p b_{sk} u_s &= \sum_{s=1}^p b_{sk} \sum_{r=1}^p a_{rs} e_s \\ &= \sum_{s=1}^p \sum_{r=1}^p b_{sk} a_{rs} e_s \\ &= \sum_{r=1}^p \underbrace{\left(\sum_{s=1}^p a_{rs} b_{sk} \right)}_{=\delta_{rk}} e_s \\ &= e_k \end{aligned}$$

On a bien le résultat souhaitée.

Partie I

3. (a) La suite nulle appartient à Ω_p , et une combinaison linéaire de suites p -périodiques est encore p -périodique ; Ω_p est donc bien un sous-espace de E .

(b) La linéarité de φ est immédiate

Soit $u \in \Omega_p$, et $r \in \mathbb{N}$. Une récurrence immédiate montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{r+kp} = u_r$; en particulier, si $n \in \mathbb{N}$ et si r est le reste dans la division euclidienne de n par p , alors $u_n = u_r$. On en déduit :

- si $u \in \Omega_p$ et $\varphi(u) = 0$, alors $u_r = 0$ pour tout r vérifiant $0 \leq r \leq p-1$, et donc $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la remarque précédente ; donc $\ker \varphi = \{0\}$ et φ est injective.
- si $a = (a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$, définissons la suite u par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_r$ où r est le reste dans la division euclidienne de n par p . Il est alors clair que $u \in \Omega_p$ et que $\varphi(u) = a$, d'où la surjectivité de φ .

(c) On remarque que la suite c^k est la suite dont tous les termes sont nuls sauf ceux d'indice n avec $n \equiv k[p]$. Soit $u \in \Omega_p$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ tel que $u_n = u_k$. On a alors

$$u = \sum_{k=0}^{p-1} u_k c^k. \text{ Ainsi, } u \text{ s'écrit comme combinaison linéaire de la}$$

famille. De plus, les coefficients intervenants dans cette CL sont uniques puisque ce sont les p premiers termes de la suite. On en déduit que $(c^0, \dots, c^{p-1})$ est une base de Ω_p . **Remarque:** On peut en déduire que Ω_p est de dimension finie égale à p .

Si on avait eu la dimension, on aurait pu aussi raisonner ainsi: Pour tout $k \in \{0, \dots, p-1\}$, $\varphi(c^k)$ est l'élément de $\mathbb{C}^p$ dont toutes les composantes sont nulles, sauf celle d'indice $k+1$ qui vaut 1, donc est le $k+1$ -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^p$. Par suite, B_c est l'image de la base canonique de $\mathbb{C}^p$ par l'isomorphisme φ^{-1} , c'est donc une base de E .

(d) D'après la question précédente, les coordonnées de u dans B_c sont $(u_0, \dots, u_{p-1})$.

4. Si $u \in \Omega_p$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $T(u)_{n+p} = u_{n+p+1} = u_{n+1} = T(u)_n$ et donc $T(u) \in \Omega_p$. Donc Ω_p est stable par T ; il l'est clairement par I , donc Ω_p est aussi stable par $L = I + T$.

5. Si $u \in \ker t$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t(u)_n = u_{n+1} = 0$ donc $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; et donc $u_0 = u_p = 0$ puisque $p \geq 2$. Par suite $\ker t = \{0\}$. On en déduit que t est injectif. **Remarque:** En utilisant les résultats de dimension finie, on aurait pu dire plus de choses: Puisque t est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, c'est donc un automorphisme de E .

6. (a) Par définition de l , on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $l(u)_n = u_n + u_{n+1}$. On obtient donc le système $(\mathcal{S})$ en écrivant l'égalité $l(u)_n = 0$ pour $n \in \{0, \dots, p-1\}$ et en remplaçant dans la dernière équation u_p par u_0 .

(b) Les $p-1$ premières équations expriment que la suite est géométrique de raison -1 jusqu'au rang $p-1$; le système $(\mathcal{S})$ équivaut donc à

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, \dots, p-1\} & u_k = (-1)^k u_0 \\ u_0 & = (-1)^p u_0 \end{cases}$$

Si p est impair, la dernière équation fournit $u_0 = 0$ et donc $u_k = 0$ pour tout k : la seule solution est le p -uplet nul.

Si p est pair, la dernière équation s'élimine ; les solutions de $(\mathcal{S})$ sont donc les p -uplets de la forme $u_0 \cdot (1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1)$ où $u_0 \in \mathbb{C}$, qui forment une droite vectorielle de $\mathbb{C}^p$.

(c) D'après la question ?? le système $(\mathcal{S})$ équivaut en fait à $\varphi(l(u)) = 0$, donc à $l(u) = 0$ puisque φ est un isomorphisme ; les éléments de $\ker l$ sont donc exactement les u de Ω_p tels que $\varphi(u)$ vérifie $(\mathcal{S})$.

D'après ??, $\ker l = \{0\}$ si p est impair ; et, si p est pair, $\ker l$ est la droite vectorielle engendrée par la suite $((-1)^n)$ (qui est bien dans Ω_p puisque p est pair).

7. (a) On pose $a_{kj} = \omega_{k-1}^{j-1} = e^{\frac{2i(k-1)(j-1)\pi}{p}}$ et $b_{kj} = \overline{\omega_{j-1}^{k-1}} = e^{\frac{-2i(j-1)(k-1)\pi}{p}}$ les coefficients d'indice (k, j) des matrices A et $\overline{A}^\top$, en notant m_{kj} le coefficient d'indice (k, j) du produit $\overline{A}^\top A$, on a, par la formule du produit matriciel :

$$\begin{aligned} c_{kj} &= \sum_{r=1}^p b_{kr} a_{rj} \\ &= \sum_{r=1}^p e^{\frac{-2i(k-1)(r-1)\pi}{p}} e^{\frac{2i(r-1)(j-1)\pi}{p}} \\ &= \sum_{r=1}^p e^{\frac{2i(r-1)(j-k)\pi}{p}} \\ &= \sum_{r=1}^p \left(e^{\frac{2i(j-k)\pi}{p}} \right)^{r-1} \end{aligned}$$

On a donc

$$c_{kj} = \begin{cases} p & \text{si } k = j \\ \frac{1 - e^{2i(j-k)\pi}}{1 - e^{\frac{2i(j-k)\pi}{p}}} & \text{sinon} \end{cases} = 0$$

On retrouve le coefficient d'indice (k, j) de la matrice pI_p , on a donc $\overline{A}^\top A = pI_p$.

(b) D'après la question précédente, A est inversible, d'inverse $\frac{1}{p}\overline{A}^\top$.

8. Pour tout $j \in \{0, \dots, p-1\}$, définissons ϵ^j par $\epsilon^j = \omega_{j-1}$ pour tout n . On a alors

- $\epsilon_0^j = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad \epsilon_{n+p}^j = \omega_{j(n+p)} = \omega_{jn} = \epsilon_n^j$ puisque $\omega_{jp} = 1$; donc $\epsilon^j \in \Omega_p$.
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad t(\epsilon^j)_n = \omega_{j(n+1)} = \omega_j \epsilon_n^j$ donc $t(\epsilon^j) = \omega_j \epsilon^j$.

9. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ des complexes tels que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \epsilon^k = (0)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors pour tout $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, on a

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \epsilon_j^k = 0 \text{ c'est-à-dire } \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k \omega_{kj} = 0.$$

Avec un changement d'indice, on obtient

$$\forall j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \sum_{k=1}^p \lambda_{k-1} \omega_{k-1}^j.$$

ce qui, après changement d'indice, s'écrit :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \sum_{k=1}^l \lambda_{k-1} \omega_{k-1}^{j-1}.$$

On reconnaît alors le produit matriciel de A avec $\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{p-1} \end{pmatrix}$. Ce pro-

duit matriciel est nul; la matrice A étant inversible, cela impose $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) = (0, \dots, 0)$ donc la famille est bien libre.

10. (a) On sait que pour tout $j \in \{0, \dots, p-1\}$, $t(\epsilon^j) = \omega_j \epsilon^j$ donc $l(\epsilon^j) = \epsilon^j + t(\epsilon^j) = \epsilon^j + \omega_j \epsilon^j = (1 + \omega_j) \epsilon^j$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$l^n(u) = \sum_{k=0}^{p-1} x_k (1 + \omega_k)^n \epsilon^k.$$

(b) Posons $\theta = 2k\pi/p$; on a donc $\omega_k = e^{i\theta}$. On a alors $1 + \omega_k = e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}) = 2 \cos(\theta/2) e^{i\theta/2}$. D'autre part, puisque $0 < k < p$, on a $0 < \theta/2 < \pi$ et donc $\left| \frac{1 + \omega_k}{2} \right| = |\cos(\theta/2)| < 1$. Par suite, $\left(\frac{1 + \omega_k}{2} \right)^n$ a bien pour limite 0.

(c) D'après la question ??, on a pour tout n $\frac{1}{2^n} l^n(u)_0 = \sum_{k=0}^{p-1} x_k \left(\frac{1+\omega_k}{2}\right)^n \epsilon_0^k$. Puisque $\omega_0 = 1$, le coefficient de ϵ_0^0 dans cette somme vaut x_0 pour tout n ; et, d'après la question précédente, les autres coefficients ont pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} l^n(u)_0 = x_0 \epsilon_0^0 = x_0$$

(d) On utilise comme suggéré la question des préliminaires que l'on applique à la matrice A et son inverse. En effet, on remarque que pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$,

$$\epsilon^k = \sum_{j=0}^{p-1} \omega_k^j c^j,$$

on en déduit que

$$c^k = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \omega_j^{-k} \epsilon^j,$$

On écrit maintenant

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=0}^{p-1} u_k c^k \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} u_k \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \omega_j^{-k} \epsilon^j \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} \left(\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u_k \omega_j^k \right) \epsilon^j. \end{aligned}$$

En identifiant le coefficient x_0 devant ϵ^0 (par unicité des coordonnées), on en déduit que

$$x_0 = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u_k \omega_0^k = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u_k.$$

On a bien l'égalité souhaitée.

(e) Soit $j \in \{0, \dots, p-1\}$. Si l'on applique la question ?? à la suite $u = c^j$, on obtient $1/p$ comme limite (puisque dans le cas de c^j , la somme des p premiers termes de la suite vaut 1).

D'autre part, pour tout n , $l^n(c^j)_0 = \sum_{q=0}^n \binom{n}{q} c_q^j$. Or c_q^j est nul,

sauf si q est congru à j modulo p , c'est à dire est de la forme $kp+j$ où $k \in \mathbb{Z}$ vérifie $0 \leq kp+j \leq n$ soit $0 \leq k \leq (n-j)/p$; puisque $c_q^j = 1$ dans ce dernier cas, on a pour tout n $l^n(c^j)_0 =$

$$\sum_{0 \leq k \leq (n-j)/p} \binom{n}{kp+j} \text{ et donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{0 \leq k \leq (n-j)/p} C_n^{kp+j} = \frac{1}{p}$$

Bonus:

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} L^n(u)_0 - a &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T^k(u)_0 - a \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (T^k(u)_0 - a) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (u_k - a) \end{aligned}$$

On a bien l'égalité souhaitée.

(b) i. Soit $n \geq N$. Posons $\alpha = \max\{|u_k - \ell|; k \in \{N+1, \dots, n\}\}$. Alors $|u_k - \ell| \leq \alpha$ pour tout $k \in \{N+1, \dots, n\}$, et donc

$$|R_N(n)| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=N+1}^n \binom{n}{k} |u_k - \ell| \leq \frac{\alpha}{2^n} \sum_{k=N+1}^n \binom{n}{k} \leq \frac{\alpha}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \frac{\alpha}{2^n} 2^n = \alpha$$

ce qui constitue le résultat demandé.

ii. Soit toujours $n \geq N$. Notons tout d'abord que, pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, on a

$$0 \leq \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{1}{k!} \prod_{q=0}^{k-1} (n-q) \leq \frac{1}{k!} \prod_{q=0}^{k-1} n = \frac{n^k}{k!}.$$

Posons $\beta = \max\{|u_k - \ell|; k \in \{0, \dots, N\}\}$. On a alors

$$|S_N(n)| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^N \binom{n}{k} |u_k - \ell| \leq \frac{\beta}{2^n} \sum_{k=0}^N \binom{n}{k} \leq \frac{\beta}{2^n} \sum_{k=0}^N \frac{n^k}{k!} = \frac{\beta}{2^n} P_N(n)$$

ce qui constitue le résultat demandé.

iii. Puisque N est fixé, la suite $(P_N(n))$ est polynomiale en n ; plus précisément, $P_N(n)$ est équivalent à $n^N/N!$ quand n tend vers $+\infty$. Donc cette suite est négligeable devant la suite géométrique (2^n) , ce qui fournit le résultat.

(c) Soit $\varepsilon > 0$. On peut choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon/2$ pour tout $n \geq N$. Avec les notations de ??, on a donc, pour tout $n \geq N$, $\alpha \leq \varepsilon/2$ donc $|T_N(n)| \leq \varepsilon/2$.

Ayant ainsi fixé N , on peut définir β comme en ?. La suite $(\beta P_N(n)/2^n)$ a pour limite 0 d'après ??, on peut donc choisir $n_0 \geq N$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $\beta P_N(n)/2^n < \varepsilon/2$. La question ?? montre alors que $|S_N(n)| < \varepsilon/2$ pour tout $n \geq n_0$.

Enfin, la question ?? montre que $\left| \frac{1}{2^n} L^n(u)_0 - \ell \right| = |S_n(n) + R_N(n)| \leq |S_N(n)| + |R_N(n)|$ pour tout $n \geq N$, donc en particulier pour tout $n \geq n_0$. On a donc trouvé un rang n_0 tel que $\left| \frac{1}{2^n} L^n(u)_0 - \ell \right| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$,

On a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} L^n(u)_0 = \ell$.

4. Soit $u \in E$. On définit une suite s par $s_0 = 0$ et $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$, pour tout

$n \geq 1$. On définit également une suite $S_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s_k$.

(a) Montrer les inégalités ci-dessous, pour tout entier naturel n .

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} s_k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s_k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s_{k+1}.$$

(b) En déduire que pour tout entier naturel n , $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2^{n+1}} L^n(u)_0$.

(c) On suppose que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k+1}} L^k(u)_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n.$$

5. On considère les suites u et J définies par $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $J_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$.

(a) Montrer que $J_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k$.

(b) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ (intégrale de Wallis)

et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = \frac{\pi}{4}$ (série de Fourier), montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{\pi}{4}.$$