

Devoir surveillé 7, sujet 1.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1.

Partie 1

On se place dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel usuel $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. On pose

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } 4x - 2y - z = 0\}$$

$$G = \text{Vect}(u_0) \quad \text{avec} \quad u_0 = (1, 1, 1)$$

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de F .
2. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Partie 2

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Soit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire. On suppose que l'application φ est non-nulle.

3. Justifier qu'il existe $u_1 \in E$ tel que $\varphi(u_1) \neq 0$. En déduire qu'il existe $u_0 \in E$ tel que $\varphi(u_0) = 1$.

On introduit l'application

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x - \varphi(x).u_0 \end{aligned}$$

4. Justifier que l'application f est bien à valeurs dans E puis vérifier que c'est un endomorphisme de E .
5. Démontrer que
 - (a) f est un projecteur
 - (b) $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u_0)$
 - (c) $\text{Im}(f) = \text{Ker}(\varphi)$

Partie 3

On reprend les notations de la partie 1 et on définit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto 4x - 2y - z \end{aligned}$$

6. Vérifier que l'application φ est linéaire.
7. En utilisant les résultats de la partie 2 et les résultats du cours, retrouver le résultat de la question 3) c'est-à-dire que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide des formules de Moivre, montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(\cos \theta) \sin \theta = \sin(n\theta)$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unique.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

4. Déterminer le terme dominant de P_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P_{2m+1}(0) = (-1)^m$.

6. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P'_{2m}(0) = (-1)^{m+1}2m$

7. Déterminer $n - 1$ racines de P_n appartenant à $] -1, 1[$.

8. En déduire l'ensemble des racines de P_n puis sa factorisation.

9. Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos \frac{\pi}{n+1} - \cos \frac{k\pi}{n} \right) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

10. On suppose $n = 2m + 1$.

(a) Montrer que $2^{2m} \prod_{k=1}^{2m} \cos \frac{k\pi}{2m+1} = (-1)^m$.

(b) En déduire que $\frac{1}{2^m} = \prod_{k=1}^m \cos \frac{k\pi}{2m+1}$.

11. On suppose $n = 2m$.

(a) Montrer que 0 est racine de P_{2m} .

(b) En déduire l'existence de $B_m \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_{2m} = XB_m$.

(c) Montrer que $B_m(0) = P'_{2m}(0)$.

(d) En déduire que $\prod_{k=1}^{m-1} \cos \frac{k\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$

Exercice 3.

Partie I

Notons E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ et $D : f \mapsto f'$.

1. Montrer que D est un endomorphisme de E .
2. Déterminer le noyau et l'image de D .

Soient $f_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^t$, $f_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ et $f_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$.

Nous noterons $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et G le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{B}$.

3. Soient a, b et c des réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3$ soit la fonction nulle.
 - (a) Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre en prenant des valeurs particulières ou bien en passant à la limite.
 - (b) Calculer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0 et montrer, d'une autre manière, que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de G .

4. Montrer que $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $D(f_i) \in G$. En déduire que G est stable par D , c'est-à-dire que $\forall g \in G, D(g) \in G$.

Nous noterons $\widehat{D}$ l'endomorphisme de G induit par D .

5. Calculer $\widehat{D}^3(f_i)$ pour i variant de 1 à 3.
6. En déduire que $\widehat{D}^3 = id_G$.
7. Montrer que $\widehat{D}$ est un automorphisme de G et exprimer $(\widehat{D})^{-1}$ en fonction de $\widehat{D}$.

Partie II

Nous nous intéressons dans cette partie à l'équation différentielle $y''' = y$, que nous noterons $(\mathcal{E})$. Une solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{E})$ est une fonction dérivable trois fois sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f'''(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que toute solution f de $(\mathcal{E})$ est C^∞ .
2. Montrer que la fonction nulle est la seule solution polynomiale de $(\mathcal{E})$.

Notons $T = D^3 - Id$, où Id est l'identité de E , et $D^3 = D \circ D \circ D$.

3. Montrer que le noyau de T est égal à l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.
4. Montrer que $G \subset \text{Ker}(T)$.

Soit f une solution de $(\mathcal{E})$; nous noterons $g = f'' + f' + f$.

5. Montrer que g est solution de l'équation différentielle $y' = y$.
6. Décrivez rapidement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - y = 0$.
7. Résolvez l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$; vous donnerez une base de l'ensemble des solutions.
8. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Décrivez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$.
9. En déduire que $\text{Ker}(T) \subset G$.
10. Conclure

sujet 1

Correction provisoire du DS n 7,

Exercice 1 1. Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} X \in F & \Leftrightarrow 4x - 2y - z = 0 \\ & \Leftrightarrow z = 4x - 2y \\ & \Leftrightarrow X = (x, y, 4x - 2y) \\ & \Leftrightarrow X = x(1, 0, 4) + y(0, 1, -2) \\ s \Leftrightarrow X \in \text{Vect}((1, 0, 4), (0, 1, -2)) \end{aligned}$$

Par équivalence, on a montré que $F = \text{Vect}((1, 0, 4), (0, 1, -2))$, F est donc un ssev de $\mathbb{R}^3$. La famille $\mathcal{B} = ((1, 0, 4), (0, 1, -2))$ est une famille génératrice de F . Elle est libre car les deux vecteurs sont non colinéaires (ou forment une famille échelonnée ou par unicité de l'écriture). D'après les deux points précédents, la famille $\mathcal{B}$ engendre F et est libre donc c'est une base de F .

2. Soit $Y = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, montrons qu'il existe un unique triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$(a, b, c) = \alpha(1, 0, 4) + \beta(0, 1, -2) + \gamma(1, 1, 1).$$

On étudie donc le système :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha + \gamma = a \\ \beta + \gamma = b \\ 4\alpha - 2\beta + \gamma = c \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = a \\ \beta + \gamma = b \\ 2\beta + 3\gamma = 4a - c \end{cases} & L_3 \leftarrow -L_3 + 4L_1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = a \\ \beta + \gamma = b \\ \gamma = 4a - c - 2b \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 & \text{Le système est triangulaire,} \end{aligned}$$

il admet donc une unique solution. On en déduit que tout élément de $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme CL unique de ces trois vecteurs ce qui montre que la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de $\mathbb{R}^3$, les deux espaces sont bien supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Partie II

3. Par hypothèse, l'application φ est non nulle c'est-à-dire qu'il existe $u_1 \in E$ tel que $\varphi(u_1) \neq 0$. Comme $\varphi(u_1) \in K^*$, on peut poser $u_0 = \frac{1}{\varphi(u_1)} \cdot u_1$. Comme φ est linéaire, on a $\varphi(u_0) = \varphi(\frac{1}{\varphi(u_1)} \cdot u_1) = \frac{1}{\varphi(u_1)} \cdot \varphi(u_1) = \frac{1}{\varphi(u_1)} \times \varphi(u_1) = 1$.

4. Pour tout $u \in E$, $f(u) = u - \varphi(u) \cdot u_0$ est une combinaison linéaire des vecteurs u et u_0 de E donc c'est un vecteur de E . Donc l'application f est bien définie sur E et à valeurs dans E .

Il faut ensuite vérifier qu'elle est linéaire. Soient $\lambda \in K$, $u_1, u_2 \in E$. Comme l'application φ est linéaire, on a $f(\lambda \cdot u_1 + u_2) = (\lambda \cdot u_1 + u_2) - \varphi(\lambda \cdot u_1 + u_2) \cdot u_0 = (\lambda \cdot u_1 + u_2) - (\lambda \cdot \varphi(u_1) + \varphi(u_2)) \cdot u_0 = \lambda \cdot u_1 + u_2 - (\lambda \varphi(u_1)) \cdot u_0 - \varphi(u_2) \cdot u_0 = \lambda \cdot (u_1 - \varphi(u_1) \cdot u_0) + (u_2 - \varphi(u_2) \cdot u_0) = \lambda \cdot f(u_1) + f(u_2)$.

Donc l'application f est bien un endomorphisme de E .

5. (a) Démontrons que f est un projecteur c'est-à-dire que $f \circ f = f$ c'est-à-dire que $\forall u \in E$, on a $f(f(u)) = f(u)$. Soit $u \in E$. Comme f est linéaire, on a $f(f(u)) = f(u - \varphi(u) \cdot u_0) = f(u) - \varphi(u) \cdot f(u_0) = u - \varphi(u) \cdot u_0 - \varphi(u) \cdot (u_0 - \varphi(u_0) \cdot u_0) = u - \varphi(u) \cdot u_0 - \varphi(u) \cdot (u_0 - 1 \cdot u_0) = u - \varphi(u) \cdot u_0 - \varphi(u) \cdot 0_E = u - \varphi(u) \cdot u_0 = f(u)$. Donc f est un projecteur.

(b) Démontrons que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u_0)$.

Soit $u \in \text{Ker}(f)$. Par définition, on a $f(u) = 0_E$ c'est-à-dire que $u - \varphi(u) \cdot u_0 = 0_E$ donc $u = \varphi(u) \cdot u_0$ donc $u \in \text{Vect}(u_0)$. Cela démontre l'inclusion $\text{Ker}(f) \subset \text{Vect}(u_0)$.

Soit $u \in \text{Vect}(u_0)$. Il existe donc $\lambda \in K$ tel que $u = \lambda \cdot u_0$. Comme φ est linéaire, on a $f(u) = f(\lambda \cdot u_0) = (\lambda \cdot u_0) - \varphi(\lambda \cdot u_0) \cdot u_0 = \lambda \cdot u_0 - \lambda \cdot \varphi(u_0) \cdot u_0 = \lambda \cdot u_0 - \lambda \cdot 1 \cdot u_0 = \lambda \cdot u_0 - \lambda \cdot u_0 = 0_E$. Donc $u \in \text{Ker}(f)$. Cela démontre l'inclusion $\text{Vect}(u_0) \subset \text{Ker}(f)$.

D'après les deux inclusions précédentes, on a $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u_0)$.

(c) Démontrons que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(\varphi)$.

Soit $y \in \text{Im}(f)$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors $\varphi(y) = \varphi(f(x)) = \varphi(x - \varphi(x) \cdot u_0) = \varphi(x) - \varphi(x) \cdot \varphi(u_0) = \varphi(x) - \varphi(x) \cdot 1 = 0_E$. Donc $y \in \text{Ker}(\varphi)$. Cela démontre l'inclusion $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(\varphi)$.

Soit $u \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors $\varphi(u) = 0$. Donc $f(u) = u - \varphi(u) \cdot u_0 = u - 0 \cdot u_0 = u$. Donc $u = f(u) \in \text{Im}(f)$. Cela démontre l'inclusion $\text{Ker}(\varphi) \subset \text{Im}(f)$.

D'après les deux inclusions précédentes, on a $\text{Im}(f) = \text{Ker}(\varphi)$.

Partie III

6. L'application est clairement linéaire.

7. Dans la partie II, on pose $E = \mathbb{R}^3$, $\varphi : (x, y, z) \mapsto 4x - 2y - z$ et $f : u \mapsto u - \varphi(u).u_0$. On a bien $\varphi(u_0) = 4 \times 1 - 2 \times 1 - 1 = 1$. D'après les questions 2)b) et 2)c), f est un projecteur. Donc, d'après le cours, les sous-espaces vectoriels $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^3$. Or, d'après la question 2)c), on a $\text{Im}(f) = \text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u_0)$. De plus, on remarque que $\text{Ker}(\varphi) = F$ et $\text{Vect}(u_0) = G$. On peut conclure que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide des formules de Moivre, montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(\cos \theta) \sin \theta = \sin(n\theta)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\sin(n\theta) = \text{Im}(\cos \theta + i \sin \theta)^n$ donc

$$\begin{aligned} \sin(n\theta) &= \text{Im} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos \theta^{n-k} (i \sin \theta)^k \right) \\ &= \text{Im} \left(\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} \cos \theta^{n-k} (i \sin \theta)^k \right) \\ &\quad \text{car les termes d'indices pairs sont réels} \\ &= \text{Im} \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} \cos \theta^{n-2j-1} i(-1)^j \sin \theta^{2j+1} \right) \\ &\quad \text{en posant } k = 2j+1 \\ &= \sin \theta \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} \cos \theta^{n-2j-1} (-1)^j (1 - \cos^2 \theta)^j \end{aligned}$$

On pose $P_n(X) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} X^{n-2j-1} (-1)^j (1 - X^2)^j$. D'après le calcul précédent, on a bien

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(\cos \theta) \sin \theta = \sin(n\theta)$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unique.

Soit Q_n un polynôme tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, Q_n(\cos \theta) \sin \theta = \sin(n\theta)$. Alors pour tout $\theta \in]0, \pi[$, on a $P_n(\cos \theta) = Q_n(\cos \theta)$ donc $P_n - Q_n$ admet tous les réels de $] -1, 1[$ pour racines, on en déduit qu'il est nul d'où l'unicité.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

On utilise les formules trigonométriques: Soit $\theta \in \mathbb{R}$, alors

$$\sin((n+2)\theta) = 2 \cos \theta \sin(n+1)\theta - \sin(n\theta).$$

On en déduit que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin \theta P_{n+2}(\cos \theta) = 2 \cos \theta \sin \theta P_{n+1}(\cos \theta) - \sin \theta P_n(\cos \theta),$$

puis, pour tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$P_{n+2}(\cos \theta) = 2 \cos \theta P_{n+1}(\cos \theta) - P_n(\cos \theta).$$

On en déduit que le polynôme $P_{n+2} - 2XP_{n+1} + P_n$ s'annule sur $] -1, 1[$, il est donc nul. On a bien l'égalité souhaitée.

4. Déterminer le terme dominant de P_n .

On raisonne par récurrence forte sur n . On note $HR(n)$: " le terme dominant de P_n est $2^{n-1}X^{n-1}$ ".

On a $P_1 = 1$ donc le résultat est vrai au rang 1. Soit n tel que $HR(n)$ est vraie et $HR(n+1)$ aussi. On sait, par hypothèses de récurrence, que $\deg(P_n) = n-1$ et $\deg(2XP_{n+1}) = n+1$ donc $\deg(P_{n+2}) = n+2$. Par ailleurs, le coefficient dominant de P_{n+2} est celui de $2XP_{n+1}$ donc $2 \cdots 2^n$ par hypothèse de récurrence. Ainsi, le terme dominant de P_{n+2} est $2^{n+1}X^{n+1}$, la propriété est bien héréditaire.

Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P_{2m+1}(0) = (-1)^m$.

Par définition du polynôme,

$$P_{2m+1}(0) = P_{2m+1}\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) \sin \frac{\pi}{2} = \sin \frac{(2m+1)\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + m\pi\right) = (-1)^m$$

On peut aussi raisonner par récurrence sur m . On a $P_1 = 1$ donc la propriété est initialisée.

Soit m tel que $P_{2m+1}(0) = (-1)^m$. Alors $P_{2m+3} = 2XP_{2m+2} - P_{2m+1}$ donc $P_{2m+3}(0) = -P_{2m+1}(0) = -(-1)^m$ par hypothèse de récurrence.

On a donc $P_{2m+3}(0) = (-1)^{m+1}$ donc la propriété est héréditaire ce qui achève la récurrence.

6. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P'_{2m}(0) = (-1)^{m+1}2m$

Là encore, on utilise la relation $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$ que l'on dérive, on a donc

$$P'_{n+2} = 2XP'_{n+1} + 2P_{n+1} - P'_n.$$

On sait que $P_0 = 0$ donc $P'_0(0) = 0$ et la propriété est initialisée.

Soit m tel que $P'_{2m}(0) = (-1)^{m+1}2m$, alors

$$P'_{2m+2}(0) = 2P_{2m+1}(0) - P'_{2m}(0) = 2(-1)^m - 2m(-1)^{m+1}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence et la question précédente.

On a donc

$$P'_{2m+2}(0) = (2m+2)(-1)^m = (2m+2)(-1)^{m+2},$$

ce qui achève de montrer l'hérédité.

7. Déterminer $n-1$ racines de P_n appartenant à $] -1, 1[$.

On a

$$\begin{aligned} \sin(n\theta) = 0 &\Leftrightarrow n\theta \equiv 0[\pi] \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

et

$$P_n(\cos \theta) = 0 \Leftrightarrow \sin(n\theta) = 0 \text{ et } \sin \theta \neq 0.$$

On remarque que $\{\cos \frac{k\pi}{n}\}$ est racine de P_n pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus n\mathbb{Z}$. Si on fait varier k dans $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, alors $\frac{k\pi}{n} \in]0, \pi[$, intervalle sur lequel $\cos$ est

injectif, on a donc $n-1$ racines distinctes de P_n appartenant à $] -1, 1[$.

Remarque: Si on cherche à expliciter $\{\cos \frac{k\pi}{n}\}$ pour k n'étant pas un multiple de n , on peut tout d'abord supposer que k varie de 1 à $2n-1$ (sans valoir n) par 2π -périodicité, ce qui nous donne $2n-2$ valeurs de k . Il faut alors remarquer que si $k \in \llbracket n+1, 2n-1 \rrbracket$, alors

$$\cos \frac{k\pi}{n} = \cos \left(\frac{\pi + (k-n)\pi}{n} \right) = \cos \left(\frac{\pi - (k-n)\pi}{n} \right) = \cos \frac{(2n-k)\pi}{n},$$

et comme $2k-n \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on en déduit que

$$\left\{ \cos \frac{k\pi}{n}, k \in \llbracket n+1, 2n-1 \rrbracket \right\} = \left\{ \cos \frac{k\pi}{n}, k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \right\}$$

ainsi, on peut montrer que les racines trouvées sont exactement toutes les racines de $] -1, 1[$ sans utiliser un argument sur le degré.

8. En déduire l'ensemble des racines de P_n puis sa factorisation.

On sait que P_n est de degré $n-1$, il a donc au plus $n-1$ racines comptées avec multiplicité. On a trouvé $n-1$ racines distinctes de P_n à la question précédente, ce sont donc toutes les racines de P_n . En utilisant son coefficient dominant déterminé plus tôt, on obtient :

$$P_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - \cos \frac{k\pi}{n} \right).$$

9. Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos \frac{\pi}{n+1} - \cos \frac{k\pi}{n} \right) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Il suffit d'évaluer P_n en $\cos \frac{\pi}{n+1}$:

$$P_n \left(\cos \frac{\pi}{n+1} \right) \sin \frac{\pi}{n+1} = \sin \frac{n\pi}{n+1},$$

et $\sin \frac{n\pi}{n+1} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{n+1} \right) = \sin \frac{\pi}{n+1}$. Comme $\sin \frac{\pi}{n+1} \neq 0$, on a donc

$$P_n \left(\cos \frac{\pi}{n+1} \right) = 1 \text{ donc } 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\cos \frac{\pi}{n+1} - \cos \frac{k\pi}{n} \right) = 1.$$

En divisant par 2^{n-1} , on obtient bien l'égalité souhaitée.

10. On suppose $n = 2m + 1$.

(a) Montrer que $2^{2m} \prod_{k=1}^{2m} \cos \frac{k\pi}{2m+1} = (-1)^m$.

On sait que

$$2^{2m} (-1)^{2m} \prod_{k=1}^{2m} \cos \frac{k\pi}{2m+1} = P_{2m+1}(0),$$

et $P_{2m+1}(0) = (-1)^m$ d'après la question 5. On a donc bien l'égalité souhaitée.

(b) En déduire que $\frac{1}{2^m} = \prod_{k=1}^m \cos \frac{k\pi}{2m+1}$.

On écrit $\prod_{k=1}^{2m} \cos \frac{k\pi}{2m+1} = \prod_{k=1}^m \cos \frac{k\pi}{2m+1} \prod_{k=m+1}^{2m} \cos \frac{k\pi}{2m+1}$ et on pose $j = 2m + 1 - k$ dans le second produit. j varie alors de 1 à m donc $\prod_{k=m+1}^{2m} \cos \frac{k\pi}{2m+1} = \prod_{j=1}^m \cos \frac{(2m+1-j)\pi}{2m+1} = \prod_{j=1}^m \cos \left(\pi - \frac{j\pi}{2m+1} \right) = (-1)^m \prod_{j=1}^m \cos \frac{j\pi}{2m+1}$. L'indice j étant muet, on obtient :

$$2^{2m} (-1)^m \left(\prod_{k=1}^m \cos \frac{k\pi}{2m+1} \right)^2 = (-1)^m,$$

donc

$$\left(\prod_{k=1}^m \cos \frac{k\pi}{2m+1} \right)^2 = \frac{1}{2^{2m}}.$$

On remarque que $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\frac{k}{2m+1} \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[$ donc $\cos \frac{k\pi}{2m+1} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$. Chaque facteur du produit est positif donc le produit l'est également. On a

$$\prod_{k=1}^m \cos \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{1}{2^m}.$$

11. On suppose $n = 2m$.

(a) Montrer que 0 est racine de P_{2m} .

On a remarqué que $P_{2m} \left(\cos \frac{\pi}{2} \right) \sin \frac{\pi}{2} = \sin \left(2m \frac{\pi}{2} \right) = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} \neq 0$ donc $P_{2m}(0) = 0$.

(b) En déduire l'existence de $B_m \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_{2m} = XB_m$.

0 étant racine de P_{2m} , X divise ce dernier d'où l'existence de B_m .

(c) Montrer que $B_m(0) = P'_{2m}(0)$.

On dérive l'égalité $P_{2m} = XB_m$ on obtient $P'_{2m} = B_m + XB'_m$ puis en évaluant en 0: $P'_{2m}(0) = B_m(0)$.

(d) En déduire que $\prod_{k=1}^{m-1} \cos \frac{k\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$

On sait que B_m et P_{2m} ont même coefficient dominant et les racines de B_m sont exactement les racines non nulles de P_{2m} . On a donc

$$2^{2m-1} (-1)^{2m-2} \prod_{\substack{1 \leq k \leq 2m-1 \\ k \neq m}} \cos \frac{k\pi}{2m} = B_m(0).$$

On a vu à la question 6 que $P'_{2m}(0) = (-1)^{m+1} 2m$, on a donc

$$2^{2m-1} \prod_{\substack{1 \leq k \leq 2m-1 \\ k \neq m}} \cos \frac{k\pi}{2m} = 2m (-1)^{m+1}.$$

On va maintenant scinder le produit en deux :

$$\prod_{\substack{1 \leq k \leq 2m-1 \\ k \neq m}} \cos \frac{k\pi}{2m} = \prod_{k=1}^{m-1} \cos \frac{k\pi}{2m} \prod_{k=m+1}^{2m-1} \cos \frac{k\pi}{2m}.$$

On fait un changement d'indice dans le deuxième produit: On pose $j = 2m - k$, j varie de 1 à $m - 1$ d'où

$$\prod_{j=m+1}^{2m} \cos \frac{k\pi}{2m} = \prod_{j=1}^{m-1} \cos \frac{(2m-j)\pi}{2m} = \prod_{j=m-1}^{\cos} \left(\pi - \frac{j\pi}{2m} \right) = (-1)^{m-1} \prod_{j=1}^{m-1} \cos \frac{j\pi}{2m}$$

On obtient donc, comme j est un indice muet :

$$2^{2m-1}(-1)^{m-1} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \cos \frac{k\pi}{2m} \right)^2 = 2m(-1)^{m+1},$$

d'où

$$\left(\prod_{k=1}^{m-1} \cos \frac{k\pi}{2m} \right)^2 = \frac{m}{2^{2m-2}}.$$

À nouveau, tous les facteurs du produit sont positifs, on a donc

$$\prod_{k=1}^{m-1} \cos \frac{k\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}.$$

On retrouve bien le résultat souhaité.

Exercice 3 pas encore tapée !