Développements limités

1 Formule de Taylor Young

Théorème 1. *Soit $p \in \mathbb{N}$.*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable n fois sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Pour tout $x_0, x \in I$ et pour tout:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)$$

Rappel: la notation $o\left((x - x_0)^n\right)$ signifie que ce terme tend vers 0 quand $x \to x_0$. Cette formule n'a donc d'intérêt qu'au voisinage de x_0.

Elle sera très souvent appliquée en zéro:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^p\right)$$

Remarque: à l'ordre 1, on obtient $f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x)$, on y reconnaît l'équation de la tangente en 0.

Exemples 1.
1. *Une fonction polynomiale*
2. *La fonction sinus*
3. *La fonction* cos.
4. *La fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$
5. *La fonction* $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2 Développements limités

2.1 définition et opérations

Définition 1. Soit f une fonction, on dit qu'elle admet un développement limité (DL) d'ordre n en x_0 s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right).$$

Autrement dit, au voisinage du point x_0, la fonction f peut être approximée par une fonction polynômiale et on sait majorer l'erreur de cette approximation (grâce au o).

Proposition 2.
Si une fonction admet un développement limité en x_0, alors ce développement limité est unique

Remarque: Autrement dit, les coefficients du polynôme qui approxime la fonction sont uniques.

Opérations sur les DLs

1. Si f et g admettent un DL d'ordre n en x_0, alors $f+g$ admet un DL d'ordre n en x_0 qui est la somme des DLs de f et g.

2. Si f admet un DL d'ordre n en x_0, alors λf, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ admet un DL d'ordre n en x_0 qui est le multiple de λ et du DL de f.

3. Si f et g admettent un DL d'ordre n en x_0, alors fg admet un DL d'ordre n qui est égal au produit des DLs de f et g.

4. si f admet un développement limité d'ordre n en x_0, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x-x_0)^i + o\left((x-x_0)^n\right)$, alors toute primitive F de f admet un DL d'ordre $n+1$ en x_0 tel que :

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i(x-x_0)^{i+1}}{i+1} + o\left((x-x_0)^{n+1}\right).$$

5. Si f admet un DL d'ordre n, f' n'admet pas nécessairement un DL d'ordre $n-1$. En revanche, si f' admet un DL, alors ce dernier est la dérivée du DL de f.

Exemples 2.

1. *DL en* 0 *à l'ordre* 4 *de* $x \mapsto ch(x)$.

2. *DL en* 0 *à l'ordre* 3 *de* $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1-x}$.

3. *DL en* 0 *à l'ordre 3 de* $\tan(x)$

4. $f : x \mapsto x^3 \sin \dfrac{1}{x}$ *admet-elle un DL2? f' admet-elle un DL1?*

2.2 DL et Taylor Young

Théorème 3. *Soit f une fonction n fois dérivable en x_0, alors f admet un DL d'ordre n en x_0.*

On sait désormais que toutes les fonctions usuelles qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ admettent des DLs à tout ordre !! De plus, toutes les fonctions qui sont des sommes/produits/composées/inverses de fonctions usuelles vont aussi admettre, de fait, un DL. Par la formule de Taylor Young, on sait, de plus, comment calculer les coefficients du DL à l'aide des dérivées successives. Toutefois, il sera plus simple de combiner l'utilisation des DLs usuels et les règles d'opérations.

Exemples 3.

1. *DL3 en* 0 *de* $f : x \mapsto \sqrt{1+x} \times \sin(x)$.

2. *Que vaut* $f^{(3)}(0)$*?*

En pratique, on applique Taylor Young pour déterminer les DLs des fonctions usuelles une bonne fois pour toutes. Ensuite, ces DLs sont supposés connus donc on les apprend par cœur et on les utilise sans les redémontrer pour déterminer le DL d'une fonction qui s'exprime à l'aide de fonctions usuelles.

2.3 Développements limites et dérivabilité

On a déjà vu (chapitre sur la dérivation) qu'une fonction est dérivable si et seulement si elle admet un DL1.

C'est faux pour un ordre strictement supérieur à 1. Autrement dit, on peut admettre un DL2 et n'être pas deux fois dérivables.

Exemple 4. *Montrer que la fonction* $f : x \mapsto x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *est prolongeable par continuité en* 0*, admet un DL2 en* 0 *mais sa dérivée n'admet pas de DL1 en* 0*. Conclure.*

2.4 Propriétés des DLs

Proposition 4.
Soit une fonction n fois dérivable,

- Si f est une fonction paire alors son DL n'a que des termes pairs,
- Si f est une fonction impaire alors son DL n'a que des termes impairs.

Proposition 5.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ alors un équivalent en f en 0 est le premier terme non nul de son DL.

Remarque: Si $f(0) \neq 0$, alors $f(x) \sim f(0)$.

3 Développements usuels

En appliquant la formule de Taylor-Young aux fonctions usuelles qui sont $\mathcal{C}^\infty$, on obtient facilement les formules suivantes :

- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n)$
- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$.

  On en déduit :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n) \text{première formule appliquée à } -x$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots + o(x^n) \text{ dernière formule avec } \alpha = \frac{1}{2}$$

et aussi $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ etc.

En les primitivant on obtient :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

4 Développements asymptotiques

Un exemple vaut tous les mots: Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$ admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position de celle-ci par rapport au graphe de f.