Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels

1.1 Définitions et exemples

Définition 1. Un ensemble E est appelé $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) si:

- Il est muni d'une loi additive $+$ qui vérifie :
  1. Pour tout $(x,y) \in E^2, x+y \in E$ (c'est une loi interne).
  2. Pour tout $(x,y) \in E^2, x+y = y+x$ (elle est commutative)
  3. Il existe $0_E \in E$ tel que $\forall x \in E, x+0_E = 0_E + x = x$ (elle possède un élément neutre et il est unique).
  4. Pour tout $x \in E$, il existe $y \in E$ tel que $x+y = y+x = 0_E$ (chaque élément possède un inverse pour $+$, on le note $-x$).

  On dit que E muni de la loi $+$ est un groupe commutatif.
- Il existe une multiplication scalaire $\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array} \right.$ qui vérifie :
  1. $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$.
  2. $\forall x \in E$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
  3. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\forall x \in E$, $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.
  4. $\forall x \in E$, $1x = x$.

Exemples 1.

1. *Les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.*
2. *Les ensembles suivants sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels: $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*

Remarque. *Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel mais la réciproque est fausse. Par exemple, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel mais $\mathbb{R}$ n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ puisque la multiplication d'un réel par un complexe n'est pas un élément de $\mathbb{R}$.*

Dans toute la suite du chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 1.
Pour tout $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\lambda x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E.$$

Proposition 2.
Pour tout $x \in E$, $-x = (-1).x$.

Proposition 3.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, alors $E \times F$ muni de l'addition coordonnée par coordonnée et de la multiplication externe est un $\mathbb{K}$-ev.

Définition 2. Soient E un $\mathbb{K}$-ev, on appelle combinaison linéaire un élément de la forme $\lambda u + \mu v$ où u et v sont deux éléments de E et λ, μ deux scalaires de $\mathbb{K}$.

Remarque. *Toute combinaison linéaire d'éléments de E est un élément de E.*

1.2 Sous-espace vectoriel

Définition 3. Un sous-ensemble non vide F de E est un sous-espace vectoriel de E s'il vérifie :

$$\forall (x, y) \in F^2, \forall\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda x + \mu y \in F.$$

Autrement dit, toute combinaison linéaire d'éléments de F est un élément de F.

Exemple 2. $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = 0\}$ *est-il un ssev?*

Proposition 4.
Un sous-ensemble non vide F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x + y \in F.$$

Exemples 3.

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 3x\}$ *est-il un ssev?*
2. *Soit a une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $F = \{f \in \mathcal{D}(I, R), f' + af = 0\}$ est un ssev de $\mathcal{D}(I, R)$.*
3. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un ssev.*

Remarques.
1. *Si F est un sous-ev, on a toujours $0_E \in F$.*
2. *Un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En pratique, pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on montrera souvent que c'est un ssev d'un ev classique. Par exemple, $\mathbb{R}[X]$ peut être identifié à un ssev des suites réelles c'est-à-dire à $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.*

Exemples 4.

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 3x + 2\}$ *est-il un ssev?*
2. *Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est un ev.*

1.3 Sous-espace engendré par une partie

Définition 4. Soit A une partie de E. On appelle espace engendré par A, noté $\text{Vect}(A)$, le plus petit sous-ev (au sens de l'inclusion) contenant A.

Pour montrer son existence, on considère l'ensemble $V = \{F \text{ ssev de } E, A \subset F\}$. Cet ensemble est non-vide car il contient E et on montre que l'ensemble $\bigcap_{F \in V} F$ est le minimum de cet ensemble.

Cette définition comme une intersection infinie sert juste à montrer l'existence de $\text{Vect}(A)$ et n'est pas utilisée en pratique.
Notation: On écrit $\text{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$ au lieu de $\text{Vect}(\{v_1, \ldots, v_n\})$

Proposition 5.
Si $A \subset F$ avec F un sous-espace vectoriel, alors $\text{Vect}(A) \subset F$.

Exemple 5. $\mathbb{R}_1[X] = \mathit{Vect}(1, X)$.

Définition 5. On dit que A est une partie génératrice de $\text{Vect}(A)$.

En pratique, on utilise souvent la caractérisation suivante :

Proposition 6.
On se donne une partie A de E, alors $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A.

Remarque : une combinaison linéaire est toujours une somme finie !

Exemple 6. $\mathit{Vect}(X + 1, 2X + 3) = \mathbb{R}_1[X]$.

2 Famille finie

2.1 Définitions

Définition 6. Une famille finie de E est la donnée d'une liste finie $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E.

Exemples 7.

1. $(1, X, X^2)$ *et* $(X^2, 1, X)$ *sont des familles de* $\mathbb{R}[X]$.
2. $(1, id)$ *est une famille de l'ensemble des fonctions.*
3. $((1, 0, -1), (3, 2, 1), (4, 3, -1), (1, 4, -3))$ *est une famille de* $\mathbb{R}^3$.

2.2 Famille libre

Définition 7. On dit qu'une famille est libre si une combinaison linéaire nulle de la famille ne peut être réalisée que lorsque tous les coefficients sont nuls.

Autrement dit, $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre si :

$$\left(\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \right) \Rightarrow \left(\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = 0 \right).$$

Le sens $\Leftarrow$ est toujours vrai, inutile de le montrer.

Exemples 8.

1. $(1, X, X^3)$.
2. $(X+1, X-1, 1)$.
3. (v_1, v_2, v_3) *avec* $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (0,0,1)$.
4. (cos, sin).

Définition 8. On dit qu'une famille est liée si elle n'est pas libre.

Proposition 7.
Une famille de DEUX vecteurs est libre si et seulement si les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

C'est faux dès que l'on considère une famille avec davantage d'éléments.

Proposition 8.

- Une famille libre ne contient jamais le vecteur nul.
- Une famille de polynômes non nuls de degré distincts est libre.
- Une famille de vecteurs échelonnés non nuls de $\mathbb{R}^n$ est libre.
- Une permutation d'une famille libre est une famille libre.

Exemples 9.

1. $(4, X^3 + 2X - 1, X^2 + 6X + 9)$.
2. $((1,2,-1),(3,0,0),(2,-1,0))$
3. $((1,0,1),(0,1,1),(1,1,0))$.

Proposition 9.
On ne modifie pas le caractère libre d'une famille en la modifiant par une opérations élémentaires :

- Permutation de deux éléments
- Ajouter à un élément un multiple d'un autre élément (ou une CL d'autres éléments)
- Multiplier un élément par un scalaire non nul.

Exemples 10.

1. *Que dire de la famille* $((1,0,0),(1,1,1),(1,1,0))$ *?*

2. *Que dire de la famille* $(X^2+X+1, X^2+3, 1)$ *?*

Proposition 10.
Soit $(x_1,\ldots,x_n)$ une famille de E. Toute combinaison linéaire de cette famille s'écrit de manière unique si et seulement si la famille est libre.

2.3 Famille génératrice

Définition 9. Soit F un sous-ev de E. On dit qu'une famille $(v_1,\ldots,v_n)$ est une famille génératrice de F si $F = \mathrm{Vect}(A)$ avec $A = \{v_1,\ldots,v_n\}$.

Autrement dit, d'après la caractérisation vu ci-dessus, $(v_1,\ldots,v_n)$ est une famille génératrice de F si tout élément de F s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs v_i de la famille.

L'écriture n'a pas de raison d'être unique! Il peut même y avoir des redondances dans la famille.

Remarque. *Si* $v_1 = (x_1,\ldots,x_n)$*, on écrit* $Vect(x_1,\ldots,x_n)$ *(et non pas* $Vect((x_1,\ldots,x_n))$*) pour* $Vect(v_1)$*.*

Proposition 11.

- On ne modifie pas le caractère générateur d'une famille en la modifiant par une opérations élémentaires.

- On ne modifie pas le caractère générateur d'une famille en enlevant les répétitions.

Exemples 11.

1. $(X+1, X+3, 1, X-1)$ *engendre* $\mathbb{R}_1[X]$.

2. *La famille* $((1,-1,0),(2,1,0),(1,2,0))$ *engendre-t-elle* $\mathbb{R}^3$ *?*

3. *Déterminer une famille génératrice de* $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(2) = 0\}$.

4. *Déterminer une famille génératrice de* $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+2y = 0\}$.

5. *Déterminer une famille génératrice de* $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y+z-t = 0 = x+2y+z+t\}$

2.4 Base

Définition 10. Soit F un ss-ev de E. On dit qu'une famille $(x_1,\ldots,x_n)$ est une base de F si elle est libre et génératrice de F.

Proposition 12.
Soit F un ss-ev de E et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de F. Cette famille est une base de F si et seulement si tout élément de F s'écrit, de manière unique, comme combinaison linéaire de la famille.

On applique les résultats montrés pour libre et génératrice.

Exemples 12.

1. *Base canonique de* $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$.
2. $((X-1)^2, (X+1)^2, X^2-1)$.
3. *Déterminer une base de* $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(2) = 0\}$.
4. *Déterminer une base de* $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y = 0\}$.
5. *Déterminer une base de* $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z - t = 0 = x + 2y + z + t\}$
6. *Déterminer une base de Vect* $(X+1, X+3, X^2-1, X^2+X+1)$.
7. *Déterminer une base de Vect* $(X^2+X, X^3+2X, X^2+4X, X^3-2X^2+3X)$.

Définition 11. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors, pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Les scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont appelés coordonnées de x dans la base E.

Exemples 13.

1. *Coordonnées d'un poly dans* $(1, X, X^2)$*?* $(X^2, X, 1)$*?*
2. *Poly dont les coordonnées dans* $(1+X, 2-X^2, 4)$ *sont* $(1, 2, 3)$*?*
3. *Que dire d'un vecteur dont les coordonnées dans une base quelconque sont nuls?*

3 Somme et supplémentaire

3.1 Somme

Définition 12. Soit E un espace vectoriel, F et G deux ssev de E. On appelle somme de F et G, noté $F + G$ l'ensemble :

$$F + G = \{x + y, (x, y) \in F \times G\}.$$

Remarque: On a $F + G \subset E$ car E est stable par somme.

Proposition 13.
Si F et G sont deux ssev d'un ev E, alors $F + G$ est également un ssev de E.

Tout élément de $F + G$ s'écrit comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G mais l'écriture n'est pas forcément unique

Exemples 14.

1. *Soit* $F = Vect(X^2 - 1, X - 1)$ *et* $G = \mathbb{R}_1[X]$*, alors* $X^2 + X + 3 = \underbrace{X^2 - 1}_{\in F} + \underbrace{X + 4}_{\in G} = \underbrace{X^2 - 1 + X - 1}_{\in F} + \underbrace{5}_{\in G}$.

2. *Soit* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y - z = 0\}$ *et* $G = Vect\left((1, 1, 0), (1, 0, 0)\right)$*. Alors* $(1, 1, 1) = \underbrace{(1, 0, 1)}_{\in F} + \underbrace{(1, 1, 0) - (1, 0, 0)}_{\in G} = \underbrace{(2, 1, 1}_{\in F} - \underbrace{(1, 0, 0)}_{\in G}$.

Proposition 14.
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E, alors si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases respectivement de F et G, la concaténation de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est une famille génératrice de $F + G$. Autrement dit $\mathrm{Vect}\left(\mathcal{B}, \mathcal{B}'\right) = F + G$.

La famille $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ n'est pas nécessairement une base de $F + G$!

Exemples 15.

1. $F = \mathbb{R}_1[X]$*,* $G = Vect(X^2 + X + 1)$*, alors* $F + G = \mathbb{R}_2[X]$ *et* $(1, X, X^2 + X + 1)$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}_2[X]$*, c'en est même une base vu que la famille est libre (degré distincts).*

2. $F = \mathbb{R}_1[X]$*,* $G = Vect\left(X^2 + X + 1, X + 3\right)$ *alors* $F + G = \mathbb{R}_2[X]$ *et* $(1, X, X^2 + X + 1, X + 3)$ *est une famille génératrice (mais ce n'est pas une famille libre puisque* $X + 3$ *est CL des deux premiers vecteurs).*

3.2 Somme directe

Définition 13. Soit F et G deux ssevs d'un ev E, on dit que F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0_E\}$. On note alors $F \oplus G$.

Pour montrer que deux ssev sont en somme directe, on prend un élément de l'intersection et on montre que c'est le vecteur nul.

Exemples 16.

1. $\mathbb{R}_1[X]$ *et* $Vect(X^3 + X)$ *sont en somme directe.*

2. $Vect\left((1, 1, 0)\right)$ *et* $Vect\left((2, -1, 1)\right)$ *aussi.*

Proposition 15.
Soit F et G deux ssevs d'un ev E alors

F et G sont en somme directe si et seulement si tout élément de $F + G$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Exemple 17. *Les ssev* $\mathbb{R}_1[X]$ *et* $Vect(X^2+X+1)$ *sont en somme directe.*

Définition 14. Soit F et G deux espaces vectoriels en somme directe. On dit qu'une base est adaptée à la somme directe $F \oplus G$ si elle est la concaténation d'une base de F et d'une base de G.

Exemple 18. *La famille* $(1, X, X^2+X+1)$ *est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$ *adaptée à la somme directe* $\mathbb{R}_1[X] \oplus Vect\,(X^2+X+1) = \mathbb{R}_2[X]$.

Définition 15. Soit $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils sont en somme directe et on note $\bigoplus_{i=1}^{r} F_i$ si tout élément de $F_1 + \ldots + F_r$ s'écrit, de manière unique, comme la somme d'éléments des F_i.

Proposition 16.
Soit $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on se donne une base $\mathcal{B}_i$ de F_i. Alors

$$(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r) \text{ est libre } \Leftrightarrow \text{ les } F_i \text{ sont en somme directe}$$

Comme on sait déjà que la concaténation des bases est une famille génératrice de la somme, on a :

Corollaire 17. Soit $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on se donne une base $\mathcal{B}_i$ de F_i. Alors

$$(\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r) \text{ est une base de } F_1 + \ldots + F_r \Leftrightarrow \text{ les } F_i \text{ sont en somme directe}$$

On le montrera dans le cas de la dimension finie.

Exemples 19.

1. *Montrer que* $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$ *et* $G = Vect(1, 1, 1)$ *sont en somme directe.*
2. *Montrer que* $\mathbb{R}_1[X]$ *et* $Vect(X^2+X+1)$ *sont en somme directe.*

3.3 Supplémentaire

Définition 16. Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. On dit qu'un sous-espace vectoriel G de E est un supplémentaire de F dans E (ou que F et G sont supplémentaires dans E si $F \oplus G = E$.
L'égalité signifie que F et G sont en somme directe ET que cette somme est égale à E.

⚠ Le complémentaire de F est $E \setminus F$ et ce n'est pas un ssev (sauf si $F = E$ ou $\{0_E\}$.

Remarques

- On parle de supplémentaire DANS E car on a besoin de savoir à quoi est égale la somme directe.
- On parle d'UN supplémentaire de F car il existe une infinité de supplémentaires dans E.

Exemples 20.

1. *On se place dans le plan* $\mathbb{R}^2$*, on note* F *une droite passant par* 0*. Alors toute droite passant par* 0*, distincte de* F *est un supplémentaire de* F *dans* $\mathbb{R}^2$*.*
   Le complémentaire de F*, c'est le plan privé de la droite et ce n'est PAS un sous-espace vectoriel puisqu'il ne contient pas* 0*.*

2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$ *et* $G = Vect(1, 1, 1)$ *sont supplémentaires dans* $\mathbb{R}^3$*.*

3. $\mathbb{R}_1[X]$ *et* $Vect(X^2 + X + 1)$ *sont supplémentaires dans* $\mathbb{R}_2[X]$*.*

Proposition 18.
Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E \Leftrightarrow \forall x \in E, \exists!(a, b) \in F \times G, x = a + b.$$

Exemples 21.

1. *Soit* F *l'ensemble des fonctions paires et* G *l'ensemble des fonctions impaires. Alors* F *et* G *sont supplémentaires dans l'ensemble des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

2. *Soit* F *l'ensemble des fonctions qui s'annule en 0 et* G *l'ensemble des fonctions linéaires. Alors* F *et* G *sont supplémentaires dans l'ensemble des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

3. *Soit* F *l'ensemble des fonctions qui s'annule en* 0 *et* 1 *et* G *l'ensemble des fonctions affines, alors* F *et* G *sont supplémentaires dans l'ensemble des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

4 Applications linéaires: généralités

On considère dans ce chapitre deux espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{K}$.

Définition 17. On appelle application linéaire de E dans F toute application $f : E \to F$ qui vérifie :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Définition 18. On appelle endomorphisme de E tout application linéaire $f : E \to E$ (donc avec $E = F$).

Définition 19. On appelle forme linéaire une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ (les images sont donc des scalaires).

Proposition 19.
Soit $f : E \to F$, f est linéaire si et seulement si pour tout $(x, y) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Autrement dit, comme pour la démonstration d'un ssev, pas besoin de faire une combinaison linéaire avec deux scalaires, un seul suffit !

Exemples 22.

1. *Soit* $\lambda \in \mathbb{K}$. *L'application* $f_\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array} \right.$ *est un endomorphisme de* E.

2. *Soit* $A \in M_{np}(\mathbb{K})$, *alors l'application* : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$ *est linéaire*

3. *L'application* $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & 2x - 3y + z \end{array} \right.$ *est linéaire ;*

4. *L'application* $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, y, -x) \end{array} \right.$ *est linéaire ;*

5. *En revanche, l'application* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 5x^2 + 3y \end{array} \right.$ *n'est pas linéaire.*

6. *L'application* $\mathrm{Tr} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ A = (a_{i,j}) & \to & \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \end{array} \right.$ *est linéaire .*

7. *La transposition* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \to & A^\top \end{array} \right.$ *est linéaire.*

8. *La dérivation et l'intégrale de fonctions sont linéaires, plus précisément les applications :*
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(I,\mathbb{K}) & \to & \mathcal{F}(I,\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right.$$
et
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_a^b f(t)dt \end{array} \right. ,$$
où I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$, *sont linéaires.*
On montre, de même que pour les applications, que :
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array} \right.$$
et
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K} \\ P(X) & \mapsto & \int_a^b P(t)dt \end{array} \right. ,$$
où $a, b \in \mathbb{R}$ *sont linéaires.*

9. *L'évaluation en* $a \in \mathbb{K}$ *des polynômes. Plus précisément, pour tout* $a \in \mathbb{K}$ *fixé, l'application* $\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K} \\ P & \to & P(a) \end{array} \right.$ *est linéaire.*

Proposition 20 (une condition nécessaire de linéarité)**.** *Toute application linéaire* $f : E \to F$ *vérifie :*
$$f(0_E) = 0_F.$$

Exemple 23. On peut donc affirmer rapidement que l'application
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x - y + 2z + 1 \end{array} \right.$$
n'est pas linéaire puisque $f(0,0,0) = 1 \neq 0$ *.*

4.1 Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
On note $\mathcal{L}(E)$, au lieu de $\mathcal{L}(E,E)$), l'ensemble des endomorphismes de E.

Proposition 21.
L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel pour la loi de composition interne $+$ et la loi de composition externe . définies par

$$\forall f,g \in \mathcal{L}(E,F), \quad f+g : \left\{ \begin{array}{ccl} E & \to & F \\ x & \mapsto & (f+g)(x) = f(x)+g(x) \end{array} \right.$$

$$\forall f \in \mathcal{L}(E,F), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda.f : \left\{ \begin{array}{ccl} E & \to & F \\ x & \mapsto & (\lambda.f)(x) = \lambda f(x) \end{array} \right.$$

Autrement dit, une combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

4.2 Composition d'applications linéaires.

On considère un troisième espace vectoriel G.

Proposition 22.
Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors :

$$g \circ f \in \mathcal{L}(E,G).$$

Autrement dit, la composée de deux applications linéaires est linéaire.

Remarque. *Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors pour tout n on définit $f^n = \underbrace{f \circ f \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$. On a bien $f^n \in \mathcal{L}(E)$.*

4.3 Applications linéaires bijectives.

Définition 20.

- On appelle <u>isomorphisme</u> de E dans F toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ bijective.
- On appelle <u>automorphisme</u> de E tout endomorphisme bijectif de E. Un automorphisme est donc à la fois un endomorphisme et un isomorphisme.
- On dit que E et F sont <u>isomorphes</u> s'il existe un isomorphisme entre E et F.

Exemples 24.

1. *Toute homothétie de rapport $\lambda \neq 0$ est un automorphisme de E.*
2. *L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.*
3. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ (a_0,\ldots,a_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \end{array} \right.$ *est un isomorphisme, $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ sont isomorphes.*

4. $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ sont isomorphes (en tant que $\mathbb{R}$-ev).

Proposition 23.
La réciproque d'un isomorphisme est linéaire:

$$f \in \mathcal{L}(E,F) \text{ bijective } \implies f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E).$$

Autrement dit, f^{-1} est aussi un isomorphisme.

4.4 Noyau et image d'une application linéaire

4.4.1 Noyau

Définition 21. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle noyau de f l'ensemble, noté $\mathrm{Ker}(f)$, des antécédents de 0_F par f :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E | f(x) = O_F\}.$$

Proposition 24.
Le noyau d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est un sous espace vectoriel de E .

Exemples 25.

1. *On considère l'application* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-y) \end{array} \right.$ *. On cherche à expliciter l'ensemble*
$$Ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z = 0 = x-y\}.$$
2. *Déterminer le noyau de l'application linéaire*
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P(X) & \mapsto & \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{array} \right.$$
3. *Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'ensemble*
$$F_a = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(a) = 0\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
4. *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixée, l'ensemble*
$$\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$$
appelé commutant de A, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 25.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, soit y un élément de F et $x \in E$ un antécédent de y par f. Alors,

$$\{a + x, a \in \mathrm{Ker}(f)\} = f^{-1}(\{y\})$$

où $f^{-1}(\{y\})$ désigne l'image réciproque du singleton $\{y\}$ c'est-à-dire l'ensemble des antécédents de y par f.

Proposition 26.
Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si et seulement si son noyau $\mathrm{Ker}(f)$ ne contient que 0_E.

Exemples 26.

1. *On considère l'application* $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, y - x) \end{array} \right.$.

2. *On considère l'application* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X) + P'(X) \end{array} \right.$.

3. *La dérivation des polynômes*

$$D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array} \right.$$

n'est pas injective.

Si $f : E \to F$ n'est pas linéaire, le fait que f admette 0_E comme unique antécédent de 0_F ne prouve pas l'injectivité.

4.4.2 Image

Proposition 27.
L'image $\mathrm{Im}(f)$ d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, c'est-à-dire l'ensemble:

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F, \exists x \in E | f(x) = y\}$$

est un sous-espace vectoriel de F.

Remarque: Plus généralement, si A est un s.e.v. de E alors $f(A)$ (image directe de l'ensemble A) est un s.e.v. de F

Proposition 28.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. L'application f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$

Remarque: Ce résultat est vrai pour toute application, qu'elle soit linéaire ou non.

Exemples 27.

1. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x+z) \end{array} \right.$ *, déterminer son image;*

2. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, y-z, z-x) \end{array} \right.$ *, déterminer son image.*

3. *Soit* $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$ *, déterminer son image.*

4. *Soit* $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$.

4.4.3 Noyau et image de $g \circ f$

Proposition 29.
Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$ et:

- $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f) \subset E$.
- et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g) \subset G$.

Ces résultats, bien que très classiques, doivent être redémontrés avant d'être utilisés.

Remarque. *Si* $f \in \mathcal{L}(E)$*, alors* $Im(f^{n+1}) \subset Im(f^n)$ *et* $Ker(f^n) \subset Ker(f^{n+1})$.

5 Projecteur et symétrie

Soient F et G deux s.e.v. supplémentaires de E: $\quad E = F \oplus G$.

5.1 Définition, exemples et linéarité

Définition 22. On appelle projecteur sur F parallèlement à G l'application qui, à tout vecteur $x \in E$, associe l'unique vecteur $y \in F$ de la décomposition en somme directe $E = F \oplus G$:

$$\exists!(y,z) \in F \times G, \quad x = y + z.$$

En pratique : Pour déterminer l'image de x par la projection sur F parallèlement à G, il faut décomposer x en somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Exemples 28.

1. *Notons* $(e_1,\ e_2)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *(donc* $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$*), on note* p *la projection sur* $vect(e_1)$ *parallèlement à* $vect(e_2)$*. C'est l'endomorphisme* $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ *défini par :*

$$p(x,y) = (x,0)$$

2. *On note toujours* (e_1, e_2) *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$*. On pose* $F = Vect(e_1)$ *et* $G = Vect(e_1 + e_2)$ *et on cherche la projection sur* F *parallèlement à* G*.*

3. *On veut maintenant déterminer l'expression de la projection f de $\mathbb{R}_2[X]$ sur Vect(X^2) parallèlement à $\mathbb{R}_1[X]$.*

4. *On souhaite déterminer l'expression de la projection g sur Vect(X^2) parallèlement à Vect(X^2+1, X).*

5. *Nous avons vu que les ensembles :*

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = {}^tA\} \quad \textit{et} \quad \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = -{}^tA\}$$

sont des s.e.v. supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'expression de la projection sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Proposition 30.
Tout projecteur de E est un endomorphisme de E.

5.2 Espaces caractéristiques et caractérisation

Définition 23. Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, on dit que F et G sont les espaces caractéristiques de p.

Proposition 31.
Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors :

$$F = \mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id}_E) \qquad \text{et} \qquad G = \ker(p).$$

Remarque: ce théorème permet de déterminer les espaces caractéristiques d'un projecteur quand on ne les connaît pas ! En effet, si je vous dis : f est un projecteur, déterminer ses espaces caractéristiques, il vous suffit de déterminer le noyau et l'image de f.

Corollaire 32. Soit p un projecteur de E, alors p projette sur son image, parallèlement à son noyau. De plus, Ker(p) et Im(p) sont supplémentaires dans E et pour tout $x \in E$, on a :

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}(p)} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{Ker}(p)}.$$

⚠ Il existe des endomorphismes f tel que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$ et qui ne sont pas des projecteurs !

Corollaire 33. Soit p un projecteur, alors $p \circ p = p$.

Il se trouve que la réciproque est vraie !!!

Théorème 34. Soit un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = f$, alors f est un projecteur.

5.3 Projecteurs associés.

Proposition 35.
Soit p le projecteur sur F parallèlement à G.
Soit q le projecteur sur G parallèlement à F.
On a :

$$p + q = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

On dit que p et q sont les projecteurs associés à la décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.

Remarque : Si p est un projecteur de E, alors $\mathrm{Id}_E - p$ est le projecteur associé

5.4 Symétrie

Définition 24. Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G supplémentaires dans E. On appelle symétrie d'axe F parallèlement à G l'application qui à $x \in E$ associe $a - b$ où $(a, b) \in F \times G$ est l'unique couple tel que $x = a + b$.

Exemple 29. *Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ d'axe Vect$(0,0,1)$, parallèlement à $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$. Donner l'expression de s.*

Proposition 36.
La symétrie est une application linéaire.

Proposition 37.
Soit s une symétrie d'axe F parallèlement à G, alors $F = \mathrm{Ker}(s - id_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + id_E)$.

Proposition 38.
Soit s une symétrie, alors $s^2 = id_E$, s est donc bijective d'inverse elle-même.

Exemple 30. *Soit s la symétrie d'axe Vect$(1,1,1)$ parallèlement à $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$, déterminer une expression de s.*

Proposition 39.
Soit maintenant f un endomorphisme de E tel que $f^2 = id_E$. alors $\mathrm{Ker}(f - id_E)$ et $\mathrm{Ker}(f + id_E)$ sont supplémentaires dans E. De plus, f est la symétrie d'axe $\mathrm{Ker}(f - id_E)$ parallèlement à $\ker(f + id_E)$.