Applications linéaires

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Applications linéaires: généralités

On considère dans ce chapitre deux espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{K}$.

Définition 1. On appelle application linéaire de E dans F toute application $f : E \to F$ qui vérifie :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Définition 2. On appelle endomorphisme de E tout application linéaire $f : E \to E$ (donc avec $E = F$).

Définition 3. On appelle forme linéaire une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ (les images sont donc des scalaires).

Proposition 1.
Soit $f : E \to F$, f est linéaire si et seulement si pour tout $(x, y) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Autrement dit, comme pour la démonstration d'un ssev, pas besoin de faire une combinaison linéaire avec deux scalaires, un seul suffit !

Exemples 1.

1. *Soit* $\lambda \in \mathbb{K}$*. L'application* $f_\lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array} \right.$ *est un endomorphisme de* E*.*

2. *Soit* $A \in M_{np}(\mathbb{K})$*, alors l'application :* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$ *est linéaire*

3. *L'application* $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & 2x - 3y + z \end{array} \right.$ *est linéaire ;*

4. *L'application* $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, y, -x) \end{array} \right.$ *est linéaire ;*

5. *En revanche, l'application* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 5x^2 + 3y \end{array} \right.$ *n'est pas linéaire.*

6. *L'application* $\mathrm{Tr} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ A = (a_{i,j}) & \to & \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \end{array} \right.$ *est linéaire .*

7. *La transposition* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \to & A^\top \end{array} \right.$ *est linéaire.*

8. *La dérivation et l'intégrale de fonctions sont linéaires, plus précisément les applications :*
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(I,\mathbb{K}) & \to & \mathcal{F}(I,\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right.$$
et
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_a^b f(t)dt \end{array} \right. ,$$
où I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*, sont linéaires.*
On montre, de même que pour les applications, que :
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array} \right.$$
et
$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K} \\ P(X) & \mapsto & \int_a^b P(t)dt \end{array} \right. ,$$
où $a, b \in \mathbb{R}$ *sont linéaires.*

9. *L'évaluation en* $a \in \mathbb{K}$ *des polynômes. Plus précisément, pour tout* $a \in \mathbb{K}$ *fixé, l'application* $\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K} \\ P & \to & P(a) \end{array} \right.$ *est linéaire.*

Proposition 2 (une condition nécessaire de linéarité)**.** *Toute application linéaire* $f : E \to F$ *vérifie :*
$$f(0_E) = 0_F.$$

Exemple 2. *On peut donc affirmer rapidement que l'application*
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x - y + 2z + 1 \end{array} \right.$$
n'est pas linéaire puisque $f(0,0,0) = 1 \neq 0$ *.*

1.1 Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
On note $\mathcal{L}(E)$, au lieu de $\mathcal{L}(E,E)$), l'ensemble des endomorphismes de E.

Proposition 3.
L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel pour la loi de composition interne $+$ et la loi de composition externe . définies par

$$\forall f,g \in \mathcal{L}(E,F), \quad f+g : \left\{ \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ x & \mapsto & (f+g)(x) = f(x)+g(x) \end{array} \right.$$

$$\forall f \in \mathcal{L}(E,F), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda.f : \left\{ \begin{array}{rcl} E & \to & F \\ x & \mapsto & (\lambda.f)(x) = \lambda f(x) \end{array} \right.$$

Autrement dit, une combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

1.2 Composition d'applications linéaires.

On considère un troisième espace vectoriel G.

Proposition 4.
Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors :

$$g \circ f \in \mathcal{L}(E,G).$$

Autrement dit, la composée de deux applications linéaires est linéaire.

Remarque. *Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors pour tout n on définit $f^n = \underbrace{f \circ f \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$. On a bien $f^n \in \mathcal{L}(E)$.*

1.3 Applications linéaires bijectives.

Définition 4.

- On appelle <u>isomorphisme</u> de E dans F toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ bijective.
- On appelle <u>automorphisme</u> de E tout endomorphisme bijectif de E. Un automorphisme est donc à la fois un endomorphisme et un isomorphisme.
- On dit que E et F sont <u>isomorphes</u> s'il existe un isomorphisme entre E et F.

Exemples 3.

1. *Toute homothétie de rapport $\lambda \neq 0$ est un automorphisme de E.*
2. *L'application $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.*
3. *$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ (a_0,\ldots,a_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \end{array} \right.$ est un isomorphisme, $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbb{R}_n[X]$ sont isomorphes.*

4. *$\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ sont isomorphes (en tant que $\mathbb{R}$-ev).*

Proposition 5.
La réciproque d'un isomorphisme est linéaire:

$$f \in \mathcal{L}(E,F) \text{ bijective } \implies f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E).$$

Autrement dit, f^{-1} est aussi un isomorphisme.

1.4 Noyau et image d'une application linéaire

1.4.1 Noyau

Définition 5. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle noyau de f l'ensemble, noté $\mathrm{Ker}(f)$, des antécédents de 0_F par f :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E | f(x) = O_F\}.$$

Proposition 6.
Le noyau d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est un sous espace vectoriel de E .

Exemples 4.

1. *On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-y) \end{array} \right.$. On cherche à expliciter l'ensemble*

$$Ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z = 0 = x-y\}.$$

2. *Déterminer le noyau de l'application linéaire*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P(X) & \mapsto & \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{array} \right.$$

3. *Pour tout réel $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'ensemble*

$$F_a = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(a) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

4. *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixée, l'ensemble*

$$\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\}$$

appelé commutant de A, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 7.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, soit y un élément de F et $x \in E$ un antécédent de y par f. Alors,

$$\{a + x, a \in \mathrm{Ker}(f)\} = f^{-1}(\{y\})$$

où $f^{-1}(\{y\})$ désigne l'image réciproque du singleton $\{y\}$ c'est-à-dire l'ensemble des antécédents de y par f.

Proposition 8.
Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si et seulement si son noyau $\operatorname{Ker}(f)$ ne contient que 0_E.

Exemples 5.

1. *On considère l'application* $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x-y, y-x) \end{array} \right.$.

2. *On considère l'application* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X) + P'(X) \end{array} \right.$.

3. *La dérivation des polynômes*

$$D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \mapsto & P'(X) \end{array} \right.$$

n'est pas injective.


Si $f : E \rightarrow F$ n'est pas linéaire, le fait que f admette 0_E comme unique antécédent de 0_F ne prouve pas l'injectivité.

1.4.2 Image

Proposition 9.
L'image $\operatorname{Im}(f)$ d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, c'est-à-dire l'ensemble:

$$\operatorname{Im}(f) = \{y \in F, \exists x \in E | f(x) = y\}$$

est un sous-espace vectoriel de F.

Remarque: Plus généralement, si A est un s.e.v. de E alors $f(A)$ (image directe de l'ensemble A) est un s.e.v. de F

Proposition 10.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. L'application f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im}(f) = F$

Remarque: Ce résultat est vrai pour toute application, qu'elle soit linéaire ou non.

Exemples 6.

1. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x+z) \end{array} \right.$ *, déterminer son image;*

2. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y, y-z, z-x) \end{array} \right.$ *, déterminer son image.*

3. *Soit* $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$ *, déterminer son image.*

4. *Soit* $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$.

1.4.3 Noyau et image de $g \circ f$

Proposition 11.
Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$ et:

- $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f) \subset E$.
- et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g) \subset G$.

Ces résultats, bien que très classiques, doivent être redémontrés avant d'être utilisés.

Remarque. *Si* $f \in \mathcal{L}(E)$, *alors* $Im(f^{n+1}) \subset Im(f^n)$ *et* $Ker(f^n) \subset Ker(f^{n+1})$.

2 Projecteur et symétrie

Soient F et G deux s.e.v. supplémentaires de E: $\quad E = F \oplus G$.

2.1 Définition, exemples et linéarité

Définition 6. On appelle projecteur sur F parallèlement à G l'application qui, à tout vecteur $x \in E$, associe l'unique vecteur $y \in F$ de la décomposition en somme directe $E = F \oplus G$:

$$\exists!(y,z) \in F \times G, \quad x = y + z.$$

En pratique : Pour déterminer l'image de x par la projection sur F parallèlement à G, il faut décomposer x en somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Exemples 7.

1. *Notons* $(e_1,\ e_2)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$ *(donc* $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$*), on note* p *la projection sur* $vect(e_1)$ *parallèlement à* $vect(e_2)$*. C'est l'endomorphisme* $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ *défini par :*

$$p(x,y) = (x,0)$$

2. *On note toujours* (e_1, e_2) *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$*. On pose* $F = Vect(e_1)$ *et* $G = Vect(e_1 + e_2)$ *et on cherche la projection sur* F *parallèlement à* G*.*

3. *On veut maintenant déterminer l'expression de la projection f de $\mathbb{R}_2[X]$ sur Vect(X^2) parallèlement à $\mathbb{R}_1[X]$.*

4. *On souhaite déterminer l'expression de la projection g sur Vect(X^2) parallèlement à Vect(X^2+1, X).*

5. *Nous avons vu que les ensembles :*

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = {}^tA\} \quad \textit{et} \quad \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A = -{}^tA\}$$

sont des s.e.v. supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer l'expression de la projection sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Proposition 12.
Tout projecteur de E est un endomorphisme de E.

2.2 Espaces caractéristiques et caractérisation

Définition 7. Si p est le projecteur sur F parallèlement à G, on dit que F et G sont les espaces caractéristiques de p.

Proposition 13.
Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors :

$$F = \mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id}_E) \qquad \text{et} \qquad G = \ker(p).$$

Remarque: ce théorème permet de déterminer les espaces caractéristiques d'un projecteur quand on ne les connaît pas ! En effet, si je vous dis : f est un projecteur, déterminer ses espaces caractéristiques, il vous suffit de déterminer le noyau et l'image de f.

Corollaire 14. Soit p un projecteur de E, alors p projette sur son image, parallèlement à son noyau. De plus, Ker(p) et Im(p) sont supplémentaires dans E et pour tout $x \in E$, on a :

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}(p)} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \mathrm{Ker}(p)}.$$

⚠ Il existe des endomorphismes f tel que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$ et qui ne sont pas des projecteurs !

Corollaire 15. Soit p un projecteur, alors $p \circ p = p$.

Il se trouve que la réciproque est vraie !!!

Théorème 16. Soit un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = f$, alors f est un projecteur.

2.3 Projecteurs associés.

Proposition 17.
Soit p le projecteur sur F parallèlement à G.
Soit q le projecteur sur G parallèlement à F.
On a :
$$p + q = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$
On dit que p et q sont les projecteurs associés à la décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.

Remarque : Si p est un projecteur de E, alors $\mathrm{Id}_E - p$ est le projecteur associé

2.4 Symétrie

Définition 8. Soit E un $\mathbb{K}$-ev, F et G supplémentaires dans E. On appelle symétrie d'axe F parallèlement à G l'application qui à $x \in E$ associe $a - b$ où $(a, b) \in F \times G$ est l'unique couple tel que $x = a + b$.

Exemple 8. *Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ d'axe Vect$(0, 0, 1)$, parallèlement à $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$. Donner l'expression de s.*

Proposition 18.
La symétrie est une application linéaire.

Proposition 19.
Soit s une symétrie d'axe F parallèlement à G, alors $F = \mathrm{Ker}(s - id_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + id_E)$.

Proposition 20.
Soit s une symétrie, alors $s^2 = id_E$, s est donc bijective d'inverse elle-même.

Exemple 9. *Soit s la symétrie d'axe Vect$(1, 1, 1)$ parallèlement à $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\}$, déterminer une expression de s.*

Proposition 21.
Soit maintenant f un endomorphisme de E tel que $f^2 = id_E$. alors $\mathrm{Ker}(f - id_E)$ et $\mathrm{Ker}(f + id_E)$ sont supplémentaires dans E. De plus, f est la symétrie d'axe $\mathrm{Ker}(f - id_E)$ parallèlement à $\ker(f + id_E)$.