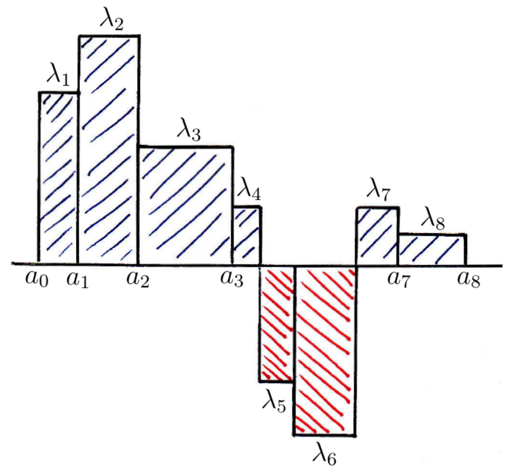
Intégration

1 Intégration de fonctions en escalier

Définition 1. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a<b$). Une **subdivision** de $[a,b]$ est une suite finie $\sigma=(a_0,a_1,\ldots,a_n)$ telle que

$$a=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_n=b.$$

Définition 2. Une **fonction en escalier** sur $[a,b]$ est une fonction $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ pour laquelle il existe une subdivision $\sigma=(a_0,\ldots,a_n)$ telle que ϕ est constante sur chaque intervalle $]a_{k-1},a_k[$.
Autrement dit, $\forall k\in [\![1,n]\!]$, $\exists\lambda_k\in\mathbb{R}$ tq $\forall x\in]a_{k-1},a_k[$, $\phi(x)=\lambda_k$.



Définition 3. Dans la situation précédente, on définit **l'intégrale sur $[a,b]$ de la fonction en escalier ϕ** par :

$$\int_a^b \phi(t)\,\mathrm{d}t \quad=\quad \sum_{k=1}^n \lambda_k(a_k-a_{k-1})$$

Dans cette formule, on remarque que la quantité $\lambda_k(a_k-a_{k-1})$ est l'aire d'un rectangle élémentaire de hauteur λ_k, aire comptée positivement si $\lambda_k\geqslant 0$, et négativement sinon. Donc $\displaystyle\int_a^b \phi(t)\,\mathrm{d}t$ est bien l'aire (comptée de cette manière) de la région délimitée par le graphe de ϕ et l'axe des abscisses.

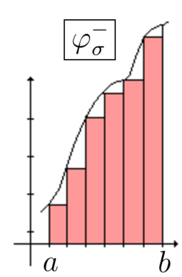
2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

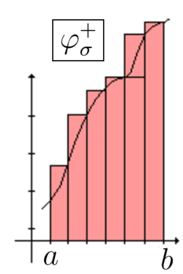
2.1 construction

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment $[a,b]$.

Notations: Pour toute subdivision $\sigma=(a_0,\ldots,a_n)$ de $[a,b]$, on note ϕ_σ^+ et ϕ_σ^- les deux fonctions en escalier définies par :
$\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\forall x\in[a_{k-1},a_k[$,

$$\phi_\sigma^+(x) \;=\; \max_{t\in[a_{k-1},a_k]} f(t) \qquad\qquad \phi_\sigma^-(x) \;=\; \min_{t\in[a_{k-1},a_k]} f(t)$$





Remarque : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, les nombres $\displaystyle\max_{t\in[a_{k-1},a_k]} f(t)$ et $\displaystyle\min_{t\in[a_{k-1},a_k]} f(t)$ sont bien définis car une fonction continue sur un segment est bornée, et atteint ses bornes.

Théorème 1.
Avec les notations précédentes, on a l'égalité suivante :

$$\inf\left(\int_a^b \phi_\sigma^+(t)\,\mathrm{d}t \quad , \quad \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\right) \quad = \quad \sup\left(\int_a^b \phi_\sigma^-(t)\,\mathrm{d}t \quad , \quad \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\right)$$

La valeur commune de ces bornes inférieure et supérieure (prises sur **toutes** les subdivisions possibles de $[a,b]$) est appelée intégrale de a à b de f, et est notée :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{ou} \quad \int\limits_a^b f \quad \text{ou} \quad \int_{[a,b]} f$$

Définition 4. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, on définit sa somme de Riemman:

$$S_n(f) = \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$$

en posant $a_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$.

On remarque que cette somme est égale à l'intégrale de la fonction en escalier :

$$\phi^- : \begin{cases} [a,b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f\left(a + \dfrac{k(b-a)}{n}\right) \text{ si } x \in \left[a + \dfrac{k(b-a)}{n}, a + \dfrac{(k+1)(b-a)}{n}\right[\end{cases}$$

et que cette fonction en escalier correspond à l'approximation de f sur la subdivision $a_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$

Proposition 2.

Soit f une fonction continue, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f$.

Exemples 1.

1. *Calculer* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$.

2. *Calculer* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+n}$.

Remarque. *Quitte à poser* $g : x \mapsto f(a + (b-a)x)$*, on peut toujours identifier une somme de Riemann à une intégrale entre* 0 *et* 1.

Exemple 2. *Calculer* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{2k}{n}\right)$.

Remarque. *On a aussi* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f$ *et même* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f$.

2.2 Propriétés

Interprétation géométrique: Si f est à valeur dans $\mathbb{R}^+$, l'intégrale de f sur $[a,b]$ est l'aire comprise entre le graphe de f, les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ et l'axe des abscisses.

Lorsque f est négative, on peut encore avoir une interprétation géométrique en parlant d'aire algébrique (qui est donc négative lorsque le graphe de f est en dessous de l'axe des abscisses).

Propriétés:

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$ avec $a<b$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

- linéarité: $\displaystyle\int_a^b (\lambda f+g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$
- positivité: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ si $f \geqslant 0$.
- croissance: si $f \geqslant g$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

Proposition 3 (inégalité triangulaire). *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, alors* $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$

Exemple 3. *Majorer* $\displaystyle\int_0^{2\pi} t\cos(t)\,\mathrm{d}t.$

Corollaire 4.
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, alors

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \max_{[a,b]}|f(t)|\int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t$$

En particulier $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a).\max_{[a,b]}|f(t)|$ (inégalité de la moyenne)

Exemple 4. *Soit* $\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{\cos(10t)t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$*, montrer que* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0.

Définition 5. On appelle valeur moyenne de f le réel $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f$. L'inégalité de la moyenne dit simplement que la moyenne de f est inférieure à sa valeur maximale.

Proposition 5 (relation de Chasles).
Soient $a \leqslant b \leqslant c$ trois réels et f continue sur $[a,c]$, alors

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$$

Définition 6. Si $b \leqslant a$ et f continue sur $[b, a]$, on définit $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$

La relation de Chasles est alors vraie pour des réels quelconques a, b et c.

Remarque. *la linéarité de l'intégrale reste, bien entendu, vraie pour $a \geqslant b$. En revanche la positivité, la croissance et l'inégalité triangulaire ne sont valables que pour des bornes croissantes.*

Théorème 6 (stricte positivité)**.**
Soit f une fonction positive ou nulle, continue sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow f = 0$$

f doit être de signe constant (pensez à cos) et continue !!

Corollaire 7.
L'intégrale d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle.

Exemple 5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$, montrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.*

2.3 Intégrale et primitive

Théorème 8 (thm fondamental de l'analyse)**.** *Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a \in I$.*
La fonction $F : \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f \end{array}\right.$ *est $\mathcal{C}^1$, et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.*

Remarque. *La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en a, on retrouve bien $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a)$.*

Exemples 6.

1. *Montrer que $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 et calculer sa dérivée.*
2. *Montrer que $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^1 t\sin(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et calculer sa dérivée.*

Corollaire 9.
Soit u et v deux fonctions dérivables et f continue. Alors

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est dérivable et $F'(x) = v'(x) f \circ v(x) - u'(x) f \circ u(x)$.

Exemple 7. *Montrer que* $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \ln(t)\,\mathrm{d}t$ *est dérivable sur* $[1, 2]$ *et calculer sa dérivée.*

3 Inégalité de Taylor-Lagrange.

3.1 Énoncé

Théorème 10.
Soit $p \in \mathbb{N}$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soient $a, b \in I$. On pose:

$$M = \max_{t \in [a,b]} \left(\left| f^{(p+1)}(t) \right| \right).$$

Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant M \frac{|b-a|^{p+1}}{(p+1)!}.$$

Remarque. *L'inégalité de Taylor-Lagrange est souvent utilisée en pratique avec* $a = 0$.
En posant alors $x = b$, *elle se réécrit :*

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant M \frac{|x|^{p+1}}{(p+1)!} \quad \textit{avec } M = \max_{t \in [0,x]} \left(\left| f^{(p+1)}(t) \right| \right)$$

En général, M dépend de p !

Exemple 8. *Montrer que pour tout* $x > 0$

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

3.2 Application à la série exponentielle.

Théorème 11.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ est convergente et sa somme vaut e^x.