

Devoir d'entraînement 8

Exercice 1 (pas dur, pour la culture).

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on considère $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$ -ev.
2. On considère $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ définies par

$$v_0 = 0, v_1 = 1, w_0 = 1 \text{ et } w_1 = 0.$$

- (a) Montrer que la famille $((v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est à la fois libre et génératrice de E .
- (b) En déduire la dimension de E .
- (c) On suppose $(a, b) = (0, 0)$, donner une base de E .
- (d) On suppose $b = 0$, donner une base de E .
- (e) On considère $\Phi : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{cases}$. Montrer que Φ est un isomorphisme et retrouver le résultat de la question précédente.

On souhaite trouver une base de E formée de suites dont le terme général est explicite.

3. On suppose que $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un élément de E . Pourquoi peut-on supposer que $r \neq 0$?
4. Que doit satisfaire le complexe r ?
5. Si r est solution de l'équation dite caractéristique $r^2 - ar - b = 0$, montrer que $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un élément de E .
6. On suppose $a^2 + 4b \neq 0$, donner une base de E à l'aide des solution de l'équation caractéristique.
7. On suppose $a^2 + 4b = 0$, on note alors $r_0 \in \mathbb{C}$ tel que $a = 2r_0$ et $b = -r_0^2$.

- (a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \Leftrightarrow \left(\frac{u_n}{r_0^n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in F$, avec $F = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n\}$.
- (b) Montrer que pour tout $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$, $(x_{n+1} - x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
- (c) En déduire un élément non constant de F .
- (d) Donner une base de E dans ce cas-là.

On suppose désormais $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et on note $\tilde{E} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$. L'ensemble $\tilde{E}$ est alors un sous- $\mathbb{R}$ -ev de E .

8. Justifier rapidement que $\tilde{E}$ est un $\mathbb{R}$ -ev de dimension 2.
9. Donner une base de E dans le cas où l'équation caractéristique admet des racines réelles.

On suppose désormais que l'équation caractéristique admet z_1 et z_2 pour racines complexes conjuguées avec $z_1 = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

10. (a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{E}$, justifier qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$.

- (b) Montrer que $\mu = \bar{\lambda}$
- (c) En déduire qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha \rho^n \cos(n\theta) + \beta \rho^n \sin(n\theta)$.
- (d) Justifier que $((\rho^n \cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}, (\rho^n \sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}})$ est une base de $\tilde{E}$.

Exercice 2 (sujet 1).

1. Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z, t) & \mapsto (x + y, 0, z, z) \end{cases}$$

- (a) Montrer que f est un projecteur.
- (b) Déterminer son noyau et son image.
- (c) Donner l'image de $(1, 2, 3, 4)$ par le projecteur sur $\text{Ker}(f)$ parallèlement à $\text{Im}(f)$.

2. Soit

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \mapsto (x + y - 2t, -x + 3z - t, 2x + y + z - 5t) \end{cases}$$

On pose $\varphi = g \circ f$.

- (a) Donner une expression de $\varphi(x, y, z, t)$ pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.
 - (b) Déterminer le noyau de φ .
 - (c) A-t-on $\text{ker}(f) \subset \text{ker}(\varphi)$?
 - (d) De manière générale, si u et v sont deux applications linéaires, a-t-on l'inclusion $\text{ker}(u) \subset \text{ker}(v \circ u)$?
(Montrez-le ou donnez un contre-exemple).
 - (e) Déterminer $\text{Im}(\varphi)$.
 - (f) Déterminer $\text{Im}(g)$.
 - (g) A-t-on une inclusion entre $\text{Im}(\varphi)$ et $\text{Im}(g)$? Si oui, laquelle.
 - (h) De manière générale, si u et v sont deux applications linéaires, a-t-on $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im}(v)$?
(Montrez-le ou donnez un contre-exemple).
3. (a) Donner une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.
- (b) Déterminer un supplémentaire de $\text{Im}(f)$ dans $\mathbb{R}^4$ différent de $\text{ker}(f)$.

Exercice 3 (sujet 1,5). On considère la fonction suivante :

$$F : x \mapsto \int_0^1 e^{-x \ln(1+t^2)} dt$$

- 1. Montrer que la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $F(x) = \int_0^1 e^{-x \ln(1+t^2)} dt$ est bien définie.
- 2. (a) Justifier que F est à valeurs dans $[0, +\infty[$ puis que F ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
- (b) Calculer $F(-1)$, $F(0)$ et $F(1)$.
- (c) Que peut-on dire de la parité de la fonction F ?

- (d) Résoudre l'équation $\sinh(u) = 1$ puis calculer $F(\frac{1}{2})$ grâce au changement de variable $t = \sinh(u)$.
3. (a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$ puis en déduire la valeur de $F(2)$.
 (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $F(n+1)$ en fonction de $F(n)$.
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule du binôme de Newton, exprimer $F(-n)$ à l'aide d'une somme.
 (b) En déduire $F(-2)$ que l'on écrira sous la forme d'une fraction irréductible.
5. Variations de F
 À ce stade, nous ne sommes pas capables d'étudier la dérivabilité de la fonction F . Démontrer néanmoins que la fonction F est décroissante sur $\mathbb{R}$.
6. Limite de F en $-\infty$
 (a) Soit $x < 0$ fixé. Décrire les variations de la fonction $g_x : t \mapsto e^{-x \ln(1+t^2)}$ sur $[0, 1]$. Calculer $g_x(\frac{1}{2})$. Démontrer à l'aide de la relation de Chasles que $F(x) \geq \frac{1}{2}g_x(\frac{1}{2})$.
 (b) En déduire la limite de F en $-\infty$.
7. Limite de F en $+\infty$
 (a) Démontrer que $\forall t \in [0; 1]$, on a $\frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t^2)$. En déduire que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) \leq \int_0^1 e^{-\frac{xt^2}{2}} dt$$

- (b) En comparant u^2 et u , montrer que :

$$\forall x \geq 1, \quad \int_1^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq 2$$

- (c) Démontrer que :

$$\forall x \geq 1, \quad F(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \left(2 + \int_0^1 e^{-\frac{u^2}{2}} du \right)$$

- (d) En déduire la limite de F en $+\infty$.

8. Un résultat intermédiaire

Pour cette section on fixe un réel x non-nul et on pose pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(t) = e^x - e^t(1+x-t) - \left(\frac{x-t}{x} \right)^2 (e^x - 1 - x)$$

- (a) Justifier que φ est dérivable, calculer sa dérivée.
 (b) Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(x)$, en déduire qu'il existe un réel c compris entre 0 et x tel que $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2}e^c$.
 (c) En déduire que: $0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2}e^{|x|}$.

9. Dérivabilité en 0

(a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_0^1 \ln(1+t^2) dt$.

(b) Utiliser la question 8 pour démontrer que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^* \quad \left| \frac{F(h) - F(0)}{h} + I \right| \leq \frac{|h|}{2} 2^{|h|} \ln^2(2)$$

(c) Que peut-on en conclure sur la fonction F ?

Exercice 4 (sujet 2). On pose pour tout réel x : $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives, et calculer $F(0)$.

2. Montrer que F est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $F(x) \geq F(0)e^x$, et déduisez-en que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

(b) Avec un raisonnement analogue, montrer que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

4. Pour cette question, nous admettons provisoirement le résultat de la question 5. :

$$F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_0^1 e^{x(1+t^2)} dt.$$

(a) Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto F(-x^2)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée sous forme intégrale.

(b) Justifier que la fonction $\Psi : x \in \mathbb{R} \mapsto \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Psi'(x) = 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 u^2} du$.

(c) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(-x^2) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

(d) Conclure que $\int_0^x e^{-t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ et on cherche donc à prouver que $\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - \int_0^1 e^{x_0(1+t^2)} dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

(a) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $y \in [-2, 2]$, $|e^y - 1 - y| \leq Cy^2$.

(b) En déduire que pour tout $h \in [-1, 1]$ et tout $t \in [0, 1]$, $|e^{h(1+t^2)} - 1 - h(1+t^2)| \leq 4Ch^2$.

(c) En déduire que pour tout h petit,

$$|F(x_0+h) - F(x_0) - h \int_0^1 e^{x_0(1+t^2)} dt| \leq 4Ch^2 e^{2|x_0|}.$$

(d) Conclure.

Exercice 5 (sujet 2). Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

On rappelle qu'un endomorphisme est dit nilpotent s'il existe un entier m tel que $f^m = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Partie I: étude générale.

1. Soit f un endomorphisme nilpotent. Justifier l'existence d'un plus petit entier n tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On l'appelle indice de nilpotence et on le note $\nu(f)$.
2. Soit f un endomorphisme nilpotent. L'objectif de cette question est de montrer que $\nu(f) \leq \dim E$. Pour cela, on pose $\forall p \in \mathbb{N}$, $N_p = \ker f^p$.
 - (a) Déterminer $N_{\nu(f)}$.
 - (b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $N_p \subset N_{p+1}$.
 - (c) Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N_p = N_{p+1}$, alors $N_q = N_p$, $\forall q \geq p$.
 - (d) Conclure.

Partie II: Cas où $\nu(f) = \dim(E)$.

Soit f un endomorphisme nilpotent tel que $\nu(f) = \dim E$. Pour alléger les notations, on note désormais $n = \nu(f)$.

On note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f .

1. Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Soit $g \in C(f)$.
 - (a) Justifier qu'il existe x_0 tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.
 - (b) Montrer que la famille $B = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E .
 - (c) On note $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ les coordonnées de $g(x_0)$ dans B . Pour tout entier k de $\{0, \dots, n-1\}$, exprimer $g(f^k(x_0))$ comme combinaison linéaire des vecteurs de B .
 - (d) En déduire que $g = a_0 Id + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$.
 - (e) Conclure que $C(f) = \text{Vect}(id, f, f^2, \dots, f^{n-1})$.
 - (f) Déterminer la dimension de $C(f)$.

Exercice 6 (sujet 2). Notation: $f^{(k)}$ est la dérivée k -ième de la fonction et par convention $f^{(0)} = f$. On suppose par l'absurde qu'il existe $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $\pi = \frac{a}{b}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}$ et $F_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k f_n^{(2k)}(x)$ et pour tout entier naturel $g_k : x \mapsto x^k$

1. Montrer que pour tout x de $[0, \pi]$, $f_n(\pi - x) = f_n(x)$
2. Exprimer $f_n^{(j)}(\pi - x)$ en fonction de $f_n^{(j)}(x)$.
3. Montrer que pour tout x de $[0, \pi]$, on a $0 \leq f_n(x) \leq \frac{\pi^n a^n}{n!}$
4. Montrer qu'il existe M tel que $n \geq M \implies \int_0^\pi f_n(t) \sin(t) dt \leq \frac{1}{2}$.

On suppose dorénavant que n est un entier vérifiant la propriété précédente.

5. Montrer qu'il existe $\alpha_n, \dots, \alpha_{2n}$ tels que $f_n = \sum_{k=n}^{2n} \alpha_k g_k$ et donner l'expression des α_k .
6. Montrer que, pour $j \leq k$, $g_k^{(j)} = \frac{k!}{(k-j)!} g_{k-j}$
7. Montrer que pour $0 \leq j < n$, on a $f_n^{(j)}(0) = 0$
8. Déterminer $f_n^{(j)}(\pi)$ pour $0 \leq j < n$.
9. Pour $n \leq j \leq 2n$, exprimer $f_n^{(j)}(0)$ et montrer que c'est un entier relatif.
10. Que pouvez-vous dire sur $f_n^{(j)}(\pi)$ pour $n \leq j \leq 2n$?
11. Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(\pi)$ sont des entiers relatifs.
12. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, $F_n(x) + F_n''(x) = f_n(x)$
13. Calculer la dérivée de $x \mapsto F_n'(x) \sin(x) - F_n(x) \cos(x)$
14. Montrer que $\int_0^\pi f_n(t) \sin(t) dt$ est un entier relatif.
15. Conclure

Exercice 7 (sujet 2). 1. Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent (c'est-à-dire tels que $u \circ v = v \circ u$). Démontrer que $\ker(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont stables par v .

Dans la suite de l'exercice, u désigne un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$.

2. Démontrer que $\operatorname{Im}(u)$ est inclus dans $\ker(u)$.
3. Montrer que $\operatorname{rg}(u) \leq \frac{n}{2}$.
4. On suppose ici que $n = 2$ et que u est non nul.
 - (a) Démontrer qu'il existe une droite D de E telle que $\ker(u) = \operatorname{Im}(u) = D$.
 - (b) Soit v un endomorphisme de E tel que $v^2 = 0$ et $u \circ v = v \circ u$.
 - i. Démontrer que $v(D) \subset D$.
 - ii. Démontrer que $u \circ v = 0$.
 - (c) Soit v et w deux endomorphismes de E tels que $v^2 = 0$, $w^2 = 0$, $u \circ v = v \circ u$ et $u \circ w = w \circ u$. Démontrer que $v \circ w = 0$.
5. On revient au cas général. Soit $m \geq 2$ un entier naturel. Soit $u_1, \dots, u_m$ des endomorphismes de E tels que :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, m \rrbracket, u_i^2 = 0 \quad \text{et} \quad u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$

On pose $F_1 = \operatorname{Im}(u_1)$ et, pour chaque entier $i \in \llbracket 2, m \rrbracket$,

$$F_i = \operatorname{Im}(u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_{i-1} \circ u_i).$$

- (a) Démontrer que, pour tout entier $i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$, F_i est un sous-espace vectoriel de E , stable par u_{i+1} .
- (b) A l'aide de la question précédente et de la question 3, montrer que, pour tout entier $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\dim(F_i) \leq \frac{n}{2^i}$.
- (c) Dans le cas où $n < 2^m$, démontrer que $u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_m = 0$.

Correction du devoir d'entraînement n 8

Exercice 1 1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel

La suite nulle appartient bien à E . Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de E et $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= \lambda u_{n+2} + v_{n+2} \\ &= \lambda(au_{n+1} + bu_n) + (av_{n+1} + bv_n) \\ &= a(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + b(\lambda u_n + v_n) \\ &= aw_{n+1} + bw_n \end{aligned}$$

On a bien $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ donc E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

2. On considère $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ définies par

$$v_0 = 0, v_1 = 1, w_0 = 1 \text{ et } w_1 = 0.$$

(a) Montrer que la famille $((v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est à la fois libre et génératrice de E .

On commence par montrer la liberté : soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\lambda(v_n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $\lambda v_0 + \mu w_0 = 0 = \mu$ et $\lambda v_1 + \mu w_1 = 0 = \lambda$ donc la famille est libre.

Soit maintenant $(x_n) \in E$, montrons qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \alpha(v_n)_{n \in \mathbb{N}} + \beta(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On considère la suite $x_1(v_n)_{n \in \mathbb{N}} + x_0(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Cette suite a les mêmes deux premiers termes que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (à savoir respectivement x_0 et x_1). Par récurrence double, on montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = x_1 v_n + x_0 w_n$.

On a montré que la famille $((v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est à la fois libre et génératrice de E

(b) En déduire la dimension de E .

D'après la question précédente, la dimension de E est égale à 2.

(c) On suppose $(a, b) = (0, 0)$, donner une base de E . On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice 1 qui vaut 1 et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice 0 qui vaut 1. D'après la question précédente, ces deux suites forment une base de E .

(d) On suppose $b = 0$, donner une base de E .

On suppose $a \neq 0$ sinon on est dans le cas précédent. On considère la suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice 0 qui vaut 1. On remarque que $(a^n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} - (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où (v_n) est la suite de E dont les deux premiers termes sont $(0, 1)$. On sait que $((v_n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une base de E . Par opérations élémentaires, $((a^n)_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est aussi une base de E .

(e) On considère $\Phi : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto (u_0, u_1) \end{cases}$. Montrer que Φ est un isomorphisme et retrouver le résultat de la question précédente.

L'application Φ est linéaire. Soit maintenant $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, alors la suite définie par

$$x_0 = \alpha, x_1 = \beta, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n,$$

est bien un élément de E qui a pour image (α, β) , l'application est bien surjective.

Par ailleurs, cette application est injective car deux suites de E ayant même deux premiers termes seront égales par une récurrence double sur n .

On souhaite trouver une base de E formée de suites dont le terme général est explicite.

3. *On suppose que $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un élément de E . Pourquoi peut-on supposer que $r \neq 0$?*

Si $r = 0$, alors la suite est nulle à partir du rang 1. Pour être un élément de E , il faut donc avoir $b = 0$ ce qui a déjà été traité.

4. *Que doit satisfaire le complexe r ?*

Si $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un élément de E , on a, $\forall n \in \mathbb{N}, r^{n+2} = ar^{n+1} + br^n$ donc, comme $r^n \neq 0$, $r^2 - ar - b = 0$.

5. *Si r est solution de l'équation dite caractéristique $r^2 - ar - b = 0$, montrer que $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un élément de E .*

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, r^{n+2} = r^n(ar + b) = ar^{n+1} + br^n,$$

on a donc bien $(r^n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$.

6. *On suppose $a^2 + 4b \neq 0$, donner une base de E à l'aide des solutions de l'équation caractéristique.*
On a donc deux racines distinctes de l'équation caractéristique, notons-les z_1 et z_2 . D'après la question précédente, on sait que les suites $(z_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des éléments de E , montrons qu'ils forment une famille libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\lambda(z_1^n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(z_2^n)_{n \in \mathbb{N}} = (0)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 = 0 \end{cases} \quad . \text{ On a donc}$$

$$\begin{cases} \lambda = -\mu \\ \lambda(z_1 - z_2) = 0 \end{cases}$$

On a $z_1 \neq z_2$ donc $\lambda = 0$ puis $\mu = 0$ et la famille est bien libre. La famille $((z_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (z_2^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est donc libre et comme elle est de cardinal 2, c'est une base de E .

7. *On suppose $a^2 + 4b = 0$, on note alors $r_0 \in \mathbb{C}$ tel que $a = 2r_0$ et $b = -r_0^2$.*

(a) *Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E \Leftrightarrow \left(\frac{u_n}{r_0^n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \in F$, avec*

$$F = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2r_0 u_{n+1} + r_0^2 u_n \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+2}}{r_0^{n+2}} = \frac{2r_0 u_{n+1}}{r_0^{n+2}} + \frac{r_0^2 u_n}{r_0^{n+2}} \\ &\quad \text{car } r_0 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+2}}{r_0^{n+2}} = 2 \frac{u_{n+1}}{r_0^{n+1}} + \frac{u_n}{r_0^n} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{u_n}{r_0^n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \in F \end{aligned}$$

On a bien montré l'équivalence.

(b) *Montrer que pour tout $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$, $(x_{n+1} - x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.*

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$ donc $x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n$, on a donc bien $(x_{n+1} - x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ constante.

(c) *En déduire un élément non constant de F .*

On considère la suite $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$ de F . On a alors $x_{n+1} - x_n = 1$ donc la suite est arithmétique de raison 1, on a donc $x_n = n$ pour tout n .

(d) *Donner une base de E dans ce cas-là.*

La question précédente nous donne la suite $(nr_0^n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ (puisque $(n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$) et on savait déjà que $(r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ était un élément de E . On a donc deux éléments de E . On vérifie avec les premiers termes qu'ils forment une famille libre, de cardinal 2, c'est donc une base de E .

On suppose désormais $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et on note $\tilde{E} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$. L'ensemble $\tilde{E}$ est alors un sous- $\mathbb{R}$ -ev de E .

8. *Justifier rapidement que $\tilde{E}$ est un $\mathbb{R}$ -ev de dimension 2.*

On peut, par exemple, dire que l'application $\varphi : \begin{cases} \tilde{E} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{cases}$ est un isomorphisme donc $\tilde{E}$ est un $\mathbb{R}$ -ev de dimension 2.

9. *Donner une base de E dans le cas où l'équation caractéristique admet des racines réelles.*

On note r_1 et r_2 les racines réelles de l'équation caractéristique. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{E}$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lambda(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$ donc $\bar{\lambda}r_1^n + \bar{\mu}r_2^n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$. On a donc

$$\begin{cases} \bar{\lambda} + \bar{\mu} = \lambda + \mu \\ \bar{\lambda}r_1 + \bar{\mu}r_2 = \lambda r_1 + \mu r_2 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \bar{\lambda} + \bar{\mu} = \lambda + \mu \\ \bar{\mu}(r_2 - r_1) = \mu(r_2 - r_1) \end{cases}$$

en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - r_1 L_1$. Comme $r_2 \neq r_1$, on obtient $\mu = \bar{\mu}$ puis $\bar{\lambda} = \lambda$. On a donc montré qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lambda(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$. De plus, la famille étant libre, cette combinaison linéaire est unique donc $((r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une base de $\tilde{E}$ (ou bien c'est une famille génératrice de $\tilde{E}$ et de cardinal 2 donc une base).

On suppose désormais que l'équation caractéristique admet z_1 et z_2 pour racines complexes conjuguées avec $z_1 = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

10. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{E}$*

(a) *Justifier qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$.*

Cela découle du fait que $\tilde{E} \subset E$.

(b) *Montrer que $\mu = \bar{\lambda}$*

On sait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle, on a donc $\overline{(u_n)_{n \in \mathbb{N}}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire

$$\bar{\lambda}(\bar{z}_1^n)_{n \in \mathbb{N}} + \bar{\mu}(\bar{z}_2^n)_{n \in \mathbb{N}} = \lambda(z_1^n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(z_2^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Or, $\bar{z}_1 = z_2$, on a donc

$$\bar{\mu}(z_1^n)_{n \in \mathbb{N}} + \bar{\lambda}(z_2^n)_{n \in \mathbb{N}} = \lambda(z_1^n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(z_2^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

La famille $((z_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (z_2^n)_{n \in \mathbb{N}})$ étant libre, on peut identifier les coefficients, on a donc $\bar{\lambda} = \mu$.

(c) En déduire qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha \rho^n \cos(n\theta) + \beta \rho^n \sin(n\theta)$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda \rho^n e^{in\theta} + \bar{\lambda} \rho^n e^{-in\theta} = \rho^n 2\operatorname{Re}(\lambda e^{in\theta}).$$

On pose $\lambda = \alpha' + i\beta'$, on a alors $\operatorname{Re}(\lambda e^{in\theta}) = \alpha' \cos(n\theta) - \beta' \sin(n\theta)$. Donc, en posant $\alpha = \frac{\alpha'}{2}$ et $\beta = -\frac{\beta'}{2}$, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha \rho^n \cos(n\theta) + \beta \rho^n \sin(n\theta)$.

(d) Justifier que $((\rho^n \cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}, (\rho^n \sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}})$ est une base de $\tilde{E}$.

D'après la question précédente, la famille $((\rho^n \cos(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}, (\rho^n \sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}})$ est une famille génératrice de $\tilde{E}$. Elle est de cardinal 2 donc c'est une base de $\tilde{E}$.

Exercice 2 1. (a) Il suffit de montrer que $f \circ f = f$. Soit donc $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, alors

$$f \circ f(x, y, z, t) = f(x + y, 0, z, z) = (x + y, 0, z, z) = f(x, y, z, t)$$

donc f est un projecteur.

Certain(e)s ont montré que f était linéaire, effectivement ça vaut le coup au moins de le mentionner.

(b) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, alors

$$(x, y, z, t) \in \ker(f) \Leftrightarrow f(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow x = -y \text{ et } z = 0$$

On a donc

$$\ker(f) = \{(x, -x, 0, t), (x, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Si vous commencez par " Soit $X \in \operatorname{Ker}(f)$ ", vous montrez seulement une inclusion ! Pour déterminer l'image, on se donne $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et on cherche à savoir si $f(x, y, z, t) = (a, b, c, d)$ possède des solutions, c'est-à-dire si le système suivant possède des solutions:

$$\begin{cases} x + y = a \\ 0 = b \\ z = c \\ z = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - y \\ z = c \\ b = 0 \\ c = d \end{cases}$$

On a donc deux conditions de compatibilité: $b = 0$ et $c = d$. Si elles sont vérifiées, le système admet des solutions donc on a:

$$\operatorname{Im}(f) = \{(a, 0, c, c), (a, c) \in \mathbb{R}^2\}$$

On peut aussi prendre l'image d'une base, par exemple la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a

- $f(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$
- $f(0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$
- $f(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 1, 1)$ et
- $f(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$

donc $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$, en enlevant la répétition et le vecteur nul.

Enfin, on peut dire, par le thm du rang, que $\operatorname{rg}(f) = 2$ donc il suffit de prendre deux vecteurs non colinéaires pour obtenir une base de $\operatorname{Im}(f)$. Certains posent le système, le triangularise mais conclut à côté. Attention dans le cadre de la détermination de l'image, ce ne sont pas les solutions du système qui nous intéressent mais seulement les conditions pour que des solutions existent toujours

- (c) On sait que f est le projecteur sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$ (montré en cours) donc le projecteur g sur $\ker(f)$ parallèlement à $\text{Im}(f)$ est $g = id - f$. On a donc

$$g(1, 2, 3, 4) = (1, 2, 3, 4) - f(1, 2, 3, 4) = (-2, 2, 0, 1)$$

On peut aussi écrire $(1, 2, 3, 4) = (3, 0, 3, 3) + (-2, 2, 0, 1)$ avec $((3, 0, 3, 3), (-2, 2, 0, 1)) \in \text{Im}(f) \times \ker(f)$. L'image de $(1, 2, 3, 4)$ par la projection sur $\ker(f)$ parallèlement à $\text{Im}(f)$ est donc $(-2, 2, 0, 1)$.

[beaucoup d'erreurs \(de lecture de l'énoncé?\) sur cette question](#)

2. (a) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, alors

$$\varphi(x, y, z, t) = g(x + y, 0, z, z) = (x + y - 2z, -x - y + 2z, 2x + 2y - 4z)$$

- (b) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$(x, y, z, t) \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(x, y, z, t) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x + y - 2z = 0$$

On a donc

$$\ker(\varphi) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - 2z = 0\}$$

- (c) On a vu que $\ker(f) = \{(x, -x, 0, t), (x, t) \in \mathbb{R}^2\}$. Il est clair que les éléments de $\ker(f)$ vérifient la condition trouvée à la question précédente donc $\ker(f) \subset \ker(\varphi)$
- (d) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

Soit $x \in \ker u$, alors $u(x) = 0_F$ d'où $v \circ u(x) = v(u(x)) = v(0_F) = 0_G$ puisque v est linéaire. On a donc $v \circ u(x) = 0_G$ ce qui montre que x appartient à $\ker(v \circ u)$. On a bien l'inclusion

$$\ker(u) \subset \ker(v \circ u)$$

[Pensez à bien définir \$u\$ et \$v\$!!](#)

- (e) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, existe-t-il $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\varphi(x, y, z, t) = (a, b, c)$? On résout le système:

$$\begin{cases} x + y - 2z = a \\ -x - y + 2z = b \\ 2x + 2y - 4z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = 2a \end{cases}$$

On a deux conditions de compatibilité: $a = -b$ et $c = 2a$. Si elles sont vérifiées, le système possède des solutions donc

$$\text{Im}(\varphi) = \{(a, -a, 2a), a \in \mathbb{R}\}$$

On peut aussi utiliser le thm du rang, on obtient $\text{rg}(\varphi) = 1$ donc on prend un vecteur de l'image ($f(1, 0, 0)$ par exemple).

- (f) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, existe-t-il $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $g(x, y, z, t) = (a, b, c)$? On résout le système:

$$\begin{cases} x + y - 2t = a \\ -x + 3y - t = b \\ 2x + y - z - t = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2t = a \\ y - 2z - 2t = a + b \\ y + 5z - 3t = c + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2t = a \\ y - 2z - 2t = a + b \\ -7z + t = a - c - b \end{cases}$$

Le système est triangulaire, il possède toujours une solution. On a donc $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^3$.

Certains ont raisonné en faisant des opérations élémentaires à l'intérieur de "Vect" pour montrer que l'on obtient $\mathbb{R}^3$.

- (g) Il est clair que $\text{Im}(\varphi) \subset \text{Im}(g)$ puisque $\text{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- (h) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Soit $y \in \ker(v \circ u)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = v \circ u(x) = v(u(x))$. On a $u(x) \in F$ donc $y \in \text{Im}(v)$. Ainsi, on a bien l'inclusion

$$\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im}(v)$$

3. (a) Si $u \in \text{Im}(f)$, il existe $(a, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = (a, 0, c, c) = a(1, 0, 0, 0) + c(0, 0, 1, 1)$ donc $\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ est une partie génératrice de $\text{Im}(f)$.
- (b) Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, alors

$$u = (x, 0, z, z) + (0, y, 0, t - z)$$

donc tout élément de $\mathbb{R}^4$ s'écrit comme un élément de $\text{Im}(f)$ et un élément de

$$F = \{(0, \alpha, 0, \beta), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

On a donc $\mathbb{R}^4 = \text{Im}(f) + F$.

Montrons que la somme est directe. Soit u un élément de l'intersection, alors il existe $(x, z) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = (x, 0, z, z)$ et il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = (0, \alpha, 0, \beta)$ ce qui impose $x = 0 = \alpha = z$ et $z = \beta$ d'où $u = (0, 0, 0, 0)$. La somme est directe, les deux espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$. F est différent de $\ker(f)$ car $(1, -1, 0, 0)$ appartient à $\ker(f)$ mais pas à F .

Exercice 3 1. Soit x un réel. Alors la fonction $f_x : t \mapsto e^{-x \ln(1+t^2)}$ est définie sur le segment $[0, 1]$, car pour tout $t \in [0, 1]$, $1 + t^2$ est strictement positif.

De plus cette fonction est continue par composition de fonctions continues, donc l'intégrale $\int_0^1 f_x(t) dt$ est définie.

Ceci démontre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x)$ est bien définie, donc que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$. Il est impératif de parler de continuité (en toute généralité la continuité par morceaux suffit mais vous ne verrez ça que l'an prochain). Si f est continue, elle admet une primitive et l'intégrale est alors bien définie

2. (a) Soit x un réel. Alors on peut écrire:

$$\forall t \in [0, 1] \quad e^{-x \ln(1+t^2)} \geq 0$$

Par positivité ou croissance de l'intégrale ceci donne :

$$\int_0^1 e^{-x \ln(1+t^2)} dt \geq \int_0^1 0 dt = 0$$

et donc $F(x) \geq 0$. Ainsi la fonction F est positive sur $\mathbb{R}$, donc à valeurs dans $[0, +\infty[$.

Démontrons par l'absurde que F ne s'annule pas. On utilise le théorème suivant :

Soit f est une fonction continue et positive sur un segment $[a, b]$.

Si $\int_a^b f(t) dt = 0$, alors f est la fonction nulle.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $f_x : t \mapsto e^{-x \ln(1+t^2)}$ est continue et positive sur le segment $[0, 1]$. Si $F(x) = 0$ alors $\int_0^1 f_x(t) dt = 0$ donc par théorème la fonction f_x est nulle sur le segment $[0, 1]$. Ceci est faux: par exemple pour $t = 0$ on obtient $f_x(0) = 1$.

Ainsi par l'absurde pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_0^1 e^{-x \ln(1+t^2)} dt$ est non-nulle, donc la fonction F ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Aucune excuse, j'ai bien dit que pour avoir stricte positivité de l'intégrale, la fonction doit être continue. Si le mot "continue" n'apparaît pas, vous n'avez pas la totalité des points.

(b) On obtient:

$$\begin{aligned} F(-1) &= \int_0^1 1 + t^2 dt = \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \\ F(0) &= \int_0^1 1 dt = [t]_0^1 = 1 \\ F(1) &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(c) Comme $F(-1)$ est différent de $-F(1)$ et de $F(1)$ alors la fonction F n'est ni paire ni impaire.

(d) Par équivalences:

$$\sinh u = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^u - e^{-u}}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2u} - 2e^u - 1 = 0$$

Ceci nous amène à l'équation $P(e^u) = 0$ où P est le polynôme $X^2 - 2X - 1$. Ses racines sont $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 - \sqrt{2}$, donc:

$$\sinh u = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(e^u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^u = x_1 \text{ ou } e^u = x_2$$

Or x_1 est positif et x_2 est négatif alors que e^u est positif, donc :

$$\sinh u = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^u = x_1 \quad \Leftrightarrow \quad u = \ln(1 + \sqrt{2})$$

L'équation $\sinh u = 1$ admet donc $u = \ln(1 + \sqrt{2})$ pour unique solution.

On calcule maintenant $F\left(\frac{1}{2}\right)$ grâce au changement de variable $t = \sinh u$.

La fonction $u \mapsto \sinh u$ est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $u \mapsto \cosh u$, donc $\frac{dt}{du} = \cosh u$ puis $dt = \cosh u du$.

si $t = 0$ alors $u = 0$ car la fonction $\sinh$ ne s'annule qu'en 0. Si $t = 1$ alors $u = \ln(1 + \sqrt{2})$ d'après ce qui précède.

Par changement de variable:

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh u}{\sqrt{1+\sinh^2 u}} du$$

On sait que pour tout $u \in \mathbb{R}$: $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$

Ceci donne $\sqrt{1 + \sinh^2 u} = |\cosh u|$, puis comme la fonction $\cosh$ est strictement positive alors $\sqrt{1 + \sinh^2 u} = \cosh u$. Ainsi:

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} 1 du = [u]_0^{\ln(1+\sqrt{2})} = \ln(1 + \sqrt{2})$$

deux choses vous ont posé problème:

- Déterminer les nouvelles bornes de l'intégrale (peut-être que c'est pour cela qu'on vous a fait étudier $\sinh(u) = 1$...)

- Simplifier $\sqrt{1 + \sinh^2(u)}$. Là vous devez reconnaître la "formule fondamentale de la géométrie hyperbolique" (rien que ça), à savoir $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$. Le plus gênant n'est pas que vous l'ayez oublié mais que vous ayez voulu reconnaître une dérivée de arccos (alors que rien à voir)

3. (a) On pose pour tout $t \in [0, 1]$:

$$u(t) = t \text{ et } v'(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2}$$

Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t \in [0, 1]$:

$$u'(t) = 1 \text{ et } v(t) = -\frac{1}{2(1+t^2)}$$

Par intégration par parties:

$$\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \left[\frac{-t}{2(1+t^2)} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2(1+t^2)} dt = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

Grâce à la linéarité de l'intégrale on calcule $F(2)$:

$$F(2) = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \int_0^1 \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$$

D'après le calcul de $F(1)$ et celui de l'intégrale ci-dessus:

$$F(2) = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

Étonnamment, c'est la deuxième partie qui a posé problème, vous avez visiblement oublié la technique du $+1-1$

(b) Comme dans la question précédente on utilise la linéarité de l'intégrale:

$$\begin{aligned} F(n+1) &= \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \int_0^1 \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt - \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt \end{aligned}$$

On simplifie la seconde intégrale en intégrant par parties.

On pose pour tout $t \in [0, 1]$:

$$v'(t) = \frac{t}{(1+t^2)^{n+1}} \text{ et } u(t) = t$$

On a :

$$u'(t) = 1 \text{ et } v(t) = -\frac{1}{2n(1+t^2)^n}$$

Par intégration par parties:

$$\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \left[\frac{-t}{2n(1+t^2)^n} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2n(1+t^2)^n} dt$$

Ceci donne:

$$\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = -\frac{1}{n2^{n+1}} + \frac{1}{2n} F(n)$$

On en déduit:

$$F(n+1) = F(n) - \left(-\frac{1}{n2^{n+1}} + \frac{1}{2n}F(n) \right) = \frac{2n-1}{2n}F(n) + \frac{1}{n2^{n+1}}$$

Cette formule permet de calculer $F(n+1)$ en fonction de $F(n)$.

Comme nous connaissons la valeur de $F(1)$ nous pouvons de proche en proche obtenir la valeur de $F(n)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $F(-n) = \int_0^1 (1+t^2)^n dt$.

On applique la formule du binôme de Newton :

$$F(-n) = \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^{2k} dt$$

Par linéarité de l'intégrale:

$$F(-n) = \sum_{k=0}^n \left[\binom{n}{k} \int_0^1 t^{2k} dt \right]$$

On en déduit que:

$$F(-n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1}$$

On en parle de ceux qui s'arrêtent après avoir fait Newton et ne prennent pas la peine de calculer l'intégrale (de $t \mapsto t^{2k}$ donc !!!!!)

- (b) Pour $n = 2$ on obtient: $F(-2) = 1 + 2\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{28}{15}$

5. Soit x et x' deux réels tels que $x \leq x'$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, comme $t^2 \geq 0$ alors $1+t^2 \geq 1$ et donc par croissance de la fonction $\ln$: $\ln(1+t^2) \geq \ln 1 = 0$

Comme $x \leq x'$ alors:

$$\forall t \in [0, 1] \quad -x \ln(1+t^2) \geq -x' \ln(1+t^2)$$

La fonction exponentielle est croissante également, donc:

$$\forall t \in [0, 1] \quad e^{-x \ln(1+t^2)} \geq e^{-x' \ln(1+t^2)}$$

Par croissance de l'intégrale:

$$\int_0^1 e^{-x \ln(1+t^2)} dt \geq \int_0^1 e^{-x' \ln(1+t^2)} dt$$

On a démontré que:

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2 \quad x \leq x' \quad \Leftrightarrow \quad F(x) \geq F(x')$$

Ceci signifie exactement que la fonction F est décroissante.

6. (a) Par composition la fonction g_x est dérivable sur $[0, 1]$. Sa dérivée est:

$$\forall t \in [0, 1] \quad g'_x(t) = -\frac{2tx}{1+t^2} e^{-x \ln(1+t^2)}$$

Comme x est négatif alors:

$$\forall t \in [0, 1] \quad g'_x(t) \geq 0$$

Ceci montre que la fonction g_x est croissante sur $[0, 1]$.

On calcule ensuite que: $g_x(\frac{1}{2}) = e^{-x \ln \frac{5}{4}} = (\frac{5}{4})^{-x}$

La fonction g_x est croissante sur le segment $[0, 1]$ donc:

$$\forall t \in [0, \frac{1}{2}] \quad g_x(t) \geq 0 \text{ et } \forall t \in [\frac{1}{2}, 1] \quad g_x(t) \geq g_x(\frac{1}{2})$$

Par croissance de l'intégrale:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g_x(t) dt \geq \int_0^1 0 dt = 0 \text{ et } \int_{\frac{1}{2}}^1 g_x(t) dt \geq \int_{\frac{1}{2}}^1 g_x(\frac{1}{2}) dt = \frac{1}{2} g_x(\frac{1}{2})$$

On additionne ces deux inégalités et on utilise la relation de Chasles:

$$\int_0^1 g_x(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} g_x(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 g_x(t) dt \geq \frac{1}{2} g_x(\frac{1}{2})$$

Nous avons démontré que: $F(x) \geq \frac{1}{2} g_x(\frac{1}{2})$

- (b) D'après la question précédente:

$$\forall x < 0 \quad F(x) \geq \frac{1}{2} e^{-x \ln \frac{5}{4}}$$

Comme $\frac{5}{4} > 1$ alors: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x \ln \frac{5}{4}) = +\infty$

Par composition: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} e^{-x \ln \frac{5}{4}} = +\infty$

Par théorème de divergence par minoration F admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = +\infty$$

7. (a) On définit la fonction h sur $[0, 1]$ par:

$$\forall t \in [0, 1] \quad h(t) = \ln(1+t^2) - \frac{t^2}{2}$$

Par composition et combinaison linéaire cette fonction est dérivable. On calcule sa dérivée:

$$\forall t \in [0, 1] \quad h'(t) = \frac{2t}{1+t^2} - t = \frac{2t - t - t^3}{1+t^2} = -\frac{t(1-t)(1+t)}{1+t^2}$$

On constate que cette dérivée est positive sur le segment $[0, 1]$, donc la fonction h est croissante sur ce segment. Elle est donc minorée par $h(0) = 0$.

Ainsi h est positive sur $[0, 1]$, ce qui montre que:

$$\forall t \in [0, 1] \quad \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t^2)$$

On pouvait aussi gagner du temps en faisant un taux d'accroissement :

$$\forall u \in [0, 1], \exists c \in]0, u[, \frac{\ln(1+u)}{u} = \frac{1}{1+c},$$

donc pour tout $t \in [0, 1], \exists d \in]0, t^2[\subset [0, 1], \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} = \frac{1}{1+d^2}$ et $\frac{1}{1+d^2} \geq \frac{1}{2}$ puisque $d^2 \leq 1$. On a donc bien l'inégalité souhaitée.

Soit $x > 0$. Par multiplication par (-1) puis croissance de la fonction exponentielle on obtient :

$$\forall t \in [0, 1] \quad \frac{-xt^2}{2} \geq -x \ln(1+t^2) \quad \text{puis} \quad e^{\frac{-xt^2}{2}} \geq e^{-x \ln(1+t^2)}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 e^{\frac{-xt^2}{2}} dt \geq \int_0^1 e^{-x \ln(1+t^2)} dt$$

On a donc démontré que :

$$\forall x > 0 \quad F(x) \leq \int_0^1 e^{\frac{-xt^2}{2}} dt \quad (1)$$

(b) Soit $x \geq 1$. Si $u \in [1, \sqrt{x}]$ alors $u \geq 1$, donc $u^2 \geq u$. En conséquence :

$$\forall u \in [1, \sqrt{x}] \quad -\frac{u^2}{2} \leq -\frac{u}{2} \quad \text{puis} \quad e^{-\frac{u^2}{2}} \leq e^{-\frac{u}{2}}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_1^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq \int_1^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u}{2}} du$$

On calcule :

$$\int_1^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u}{2}} du = [-2e^{-\frac{u}{2}}]_1^{\sqrt{x}} = -2e^{-\frac{\sqrt{x}}{2}} + 2e^{-\frac{1}{2}}$$

Comme $2e^{-\frac{\sqrt{x}}{2}} \geq 0$ alors $-2e^{-\frac{\sqrt{x}}{2}} \leq 0$, de plus $e^{-\frac{1}{2}} \leq 1$ donc on obtient bien :

$$\forall x \geq 1 \quad \int_1^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq 2e^{-\frac{1}{2}} \quad (2)$$

(c) Soit $x \geq 1$ fixé.

On applique le changement de variable $u = \sqrt{x}t$ à l'intégrale $\int_0^1 e^{-\frac{xt^2}{2}} dt$.

La fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{x}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, donc : $\frac{du}{dt} = \sqrt{x}$

Si $t = 0$ alors $u = 0$ et si $t = 1$ alors $u = \sqrt{x}$.

Par changement de variable :

$$\int_0^1 e^{-\frac{xt^2}{2}} dt = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}} du}{\sqrt{x}} \quad (3)$$

Par linéarité de l'intégrale et relation de Chasles :

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}} du}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\int_0^1 e^{-\frac{u^2}{2}} du + \int_1^{\sqrt{x}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right) \quad (4)$$

Par transitivité, les inégalités et égalités (1), (3), (4) et (2) donnent :

$$\forall x \geq 1 \quad F(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \left(2 + \int_0^1 e^{-\frac{u^2}{2}} du \right)$$

(d) On sait que la fonction F est positive, donc :

$$\forall x \geq 1 \quad 0 \leq F(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \left(2 + \int_0^1 e^{-\frac{u^2}{2}} du \right)$$

Le membre de droite tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, donc par théorème de convergence par encadrement la fonction F tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

Dans la mesure où la majoration vous est donnée, on attend de vous la positivité de F pour vous assurer que vous pouvez conclure avec le thm des gendarmes

8. (a) Les fonction polynomiales et la fonction exponentielle sont dérivables, donc par produit et combinaison linéaire la fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi'(t) = -(x-t)e^t + 2\frac{x-t}{x^2}(e^x - 1 - x) = (x-t) \left(\frac{2}{x^2}(e^x - 1 - x) - e^t \right)$$

- (b) On obtient : $\phi(0) = e^x - (1+x) - (e^x - 1 - x) = 0$
 $\phi(x) = e^x - e^x(1+x-x) + 0 = 0$

On applique le théorème de Rolle.

- La fonction ϕ est continue sur l'intervalle $[0, x]$ (ou $[x, 0]$).
- La fonction ϕ est dérivable sur l'intervalle $]0, x[$ (ou $]x, 0[$).
- $\phi(0) = \phi(x)$

D'après le théorème de Rolle il existe $c \in]0, x[$ (ou $c \in]0, x[$) tel que $\phi'(c) = 0$. Ceci donne :

$$(x-c) \left(\frac{2}{x^2}(e^x - 1 - x) - e^c \right) = 0$$

Comme c est strictement compris entre 0 et x alors $c \neq x$, donc $x-c \neq 0$ puis :

$$e^c = \frac{2}{x^2}(e^x - 1 - x)$$

Il existe bien un réel c compris entre 0 et x tel que : $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2}e^c$

On n'applique JAMAIS un thm sans citer précisément ses hypothèses !!!!

Par ailleurs, j'attire votre attention sur le fait que tous les réels ne sont pas positifs et qu'un intervalle s'écrit avec des bornes croissantes!

Enfin, certains affirment que c appartient à $[0, x]$. Ici, ça ne porte pas à conséquence mais vous pourriez avoir des soucis alors souvenez-vous que Rolle donne l'existence d'un réel dans l'intervalle OUVERT

- (c) Supposons que x est positif. Alors $0 < c < x = |x|$ donc $e^c \leq e^{|x|}$.

Supposons que x est négatif. Alors $x < c < 0 < |x|$ donc $e^c \leq e^{|x|}$.

Dans les deux cas on obtient $0 \leq \frac{x^2}{2}e^c \leq \frac{x^2}{2}e^{|x|}$ et donc d'après la question précédente :

$$0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2}e^{|x|}$$

9. (a) On pose pour tout $t \in [0, 1]$: $u(t) = \ln(1 + t^2)$ et $v(t) = t$

Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour tout $t \in [0, 1]$: $u'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$ et $v'(t) = 1$.

Par intégration par parties:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \ln(1 + t^2) dt = \int_0^1 u(t)v'(t) dt \\ &= [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t) dt = [t \ln(1 + t^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1 + t^2} dt \end{aligned}$$

On en déduit:

$$I = \ln 2 - 2 \int_0^1 1 - \frac{1}{1 + t^2} dt = \ln 2 - 2 [t - \arctan t]_0^1 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

[Là encore, les techniques d'intégration classiques ont été oubliées](#)

- (b) Soit $h \in \mathbb{R}^*$ fixé pour l'instant. On utilise la linéarité de l'intégrale.

$$\begin{aligned} \frac{F(h) - F(0)}{h} + I &= \frac{1}{h} \left(\int_0^1 e^{-h \ln(1+t^2)} - 1 dt \right) + \int_0^1 \ln(1 + t^2) dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-h \ln(1+t^2)} - 1}{h} + \ln(1 + t^2) dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-h \ln(1+t^2)} - 1 + h \ln(1 + t^2)}{h} dt \end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire:

$$\left| \frac{F(h) - F(0)}{h} + I \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{e^{-h \ln(1+t^2)} - 1 + h \ln(1 + t^2)}{h} \right| dt \quad (5)$$

On applique le résultat de la question 8, avec $x = -h \ln(1 + t^2)$. On remarque que ce résultat reste correct si $x = 0$. On obtient:

$$\forall t \in [0, 1] \quad \left| e^{-h \ln(1+t^2)} - 1 + h \ln(1 + t^2) \right| \leq \frac{h^2 \ln^2(1 + t^2)}{2} e^{|h| \ln(1+t^2)}$$

En divisant par $|h|$:

$$\forall t \in [0, 1] \quad \left| \frac{e^{-h \ln(1+t^2)} - 1 + h \ln(1 + t^2)}{h} \right| \leq \frac{|h| \ln^2(1 + t^2)}{2} e^{|h| \ln(1+t^2)}$$

De plus, si $t \in [0, 1]$ alors $\ln(1 + t^2) \leq \ln 2$ donc

$$\forall t \in [0, 1] \quad \left| \frac{e^{-h \ln(1+t^2)} - 1 + h \ln(1 + t^2)}{h} \right| \leq \frac{|h| \ln^2 2}{2} e^{|h| \ln 2} = \frac{|h|}{2} 2^{|h|} \ln^2 2$$

Par croissance de l'intégrale:

$$\int_0^1 \left| \frac{e^{-h \ln(1+t^2)} - 1 + h \ln(1 + t^2)}{h} \right| dt \leq \int_0^1 \frac{|h|}{2} 2^{|h|} \ln^2 2 dt = \frac{|h|}{2} 2^{|h|} \ln^2 2$$

Ceci est valable pour tout $h \in \mathbb{R}^*$. En combinant avec l'inégalité (5) on aboutit à:

$$\forall h \in \mathbb{R}^* \quad \left| \frac{F(h) - F(0)}{h} + I \right| \leq \frac{|h|}{2} 2^{|h|} \ln^2 2$$

- (c) Comme pour tout $h \in \mathbb{R}^*$: $\frac{|h|}{2}2^{|h|} = \frac{|h|}{2}e^{-|h|\ln 2}$ alors $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{2}2^{|h|} \ln^2 2 = 0$. Par théorème de convergence par encadrement:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(h) - F(0)}{h} + I \right| = 0$$

Ceci donne:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = -I$$

Ainsi la fonction F est dérivable en 0, et sa dérivée est $F'(0) = 2 - \ln 2 - \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 On pose pour tout réel x :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{x(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs positives, et calculer $F(0)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \frac{e^{x(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, 1]$, l'intégrale est donc bien définie pour tout x . De plus, on a $\frac{e^{x(1+t^2)}}{1+t^2} > 0$ pour tout x et t donc F est à valeurs positives. Enfin,

$$F(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_0^1 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

On demande F positive, inutile donc d'invoquer la stricte positivité. Pour que l'intégrale soit définie, dire que l'intégrande est définie ne suffit. Il faut parler de continuité de la fonction $t \mapsto \frac{e^{x(t^2+1)}}{t^2+1}$. Attention à ne pas parler de la continuité de $\frac{e^{x(t^2+1)}}{t^2+1}$ sans préciser par rapport à quelle variable !

2. Montrer que F est croissante sur $\mathbb{R}$.

Soient $x > y$, alors, pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\frac{e^{x(1+t^2)}}{1+t^2} > \frac{e^{y(1+t^2)}}{1+t^2}$$

par croissance de l'exponentielle d'où, en intégrant entre 0 et 1, $F(x) \geq F(y)$ et F est bien croissante.

3. (a) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $F(x) \geq F(0)e^x$, et déduisez-en que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

On a

$$F(x) - F(0)e^x = \int_0^1 \frac{e^{x(1+t^2)}}{1+t^2} dt - e^x \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{e^{x(1+t^2)} - e^x}{1+t^2} dt$$

or $1+t^2 \geq 1$ pour tout $t \in [0, 1]$ donc pour $x \geq 0$, on a $x(1+t^2) \geq x$ d'où l'inégalité souhaitée en utilisant la croissance de l'exponentielle puis en intégrant.

On passe ensuite à la limite quand x tend vers $+\infty$. Comme $F(0) > 0$, on a $F(0)e^x \rightarrow +\infty$ donc par comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

(b) Avec un raisonnement analogue, montrer que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

On suppose désormais $x < 0$, on a alors $x(1+t^2) \leq x$ donc par croissance de l'exponentielle,

$$e^{x(1+t^2)} \leq e^x \text{ d'où } \frac{e^{x(1+t^2)}}{1+t^2} \leq \frac{e^x}{1+t^2}$$

et finalement $F(x) \leq F(0)e^x$ en intégrant entre 0 et 1.

Pour passer à la limite, il faut utiliser la question 1 dans laquelle nous avons montré que F est à valeurs positives. On a donc

$$F(0)e^x \geq F(x) \geq 0, \forall x < 0$$

donc en passant à la limite quand $x \rightarrow -\infty$, par le théorème d'encadrement, on peut conclure que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

Plusieurs personnes ont majoré par $F(0)e^{2x}$, oubliant que x était négatif étant donné que l'on va le faire tendre vers $-\infty$.

Attention à ne pas oublier de dire que F est positive pour bien avoir le thm des gendarmes

4. Pour cette question, nous admettrons provisoirement le résultat de la question 5. :

$$F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_0^1 e^{x(1+t^2)} dt.$$

(a) Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto F(-x^2)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée sous forme intégrale.

La fonction g est la composée de F , supposée dérivable et $x \mapsto -x^2$ qui est dérivable, elle est donc dérivable et sa dérivée est

$$g'(x) = -2xF'(-x^2) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt$$

(b) Justifier que la fonction $\Psi : x \in \mathbb{R} \mapsto \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Psi'(x) = 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 u^2} du$.

La fonction $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est l'unique primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ qui s'annule en 0, elle est donc dérivable ce qui montre que la fonction Ψ est dérivable en tant que carré d'une fonction dérivable.

Sa dérivée vaut

$$\Psi'(x) = 2 \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right) \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)' = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

On pose $t = xu$, $dt = xdu$ d'où

$$\Psi'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 u^2} xdu = 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 u^2} du$$

Certains me démontrent en détail que $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est dérivable ou bien le justifie en parlant de la dérivabilité de ses bornes. On s'intéresse à la dérivabilité des bornes quand elles ne sont pas de la forme cste et x , c'est-à-dire en s'appuyant sur ce cas-là puis en raisonnant par composition. Il suffit donc de parler de l'unique primitive ou bien de citer le thm fondamental de l'analyse pour justifier la dérivabilité de $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$

(c) En déduire que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto g(x) + \Psi(x)$ est constante, puis que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(-x^2) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Cette fonction est dérivable et d'après les deux questions précédentes, sa dérivée vaut :

$$-2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt + 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 u^2} du = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt + 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt$$

en posant $t = u$, d'où

$$g'(x) + \Psi'(x) = 2x \int_0^1 \left(-e^{-x^2(1+t^2)} + e^{-x^2} e^{-x^2 t^2} \right) dt = 0$$

la fonction est donc constante; on a par exemple $g(x) + \Psi(x) = g(0) + \Psi(0) = F(0) + 0 = \frac{\pi}{4}$.

(d) Conclure que $\int_0^x e^{-t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On passe à la limite quand $x \rightarrow +\infty$ dans l'égalité que l'on vient de montrer. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(-x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\pi}{4}$. La racine carrée étant continue, et l'intégrale positive on a $\sqrt{g(x)} = \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Attention, $\sqrt{y^2} = |y|$ donc pour avoir la limite de l'intégrale sans valeur absolue, il faut justifier de son signe

5. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ et on cherche donc à prouver que

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - \int_0^1 e^{x_0(1+t^2)} dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

(a) Montre qu'il existe $C > 0$ tel pour tout $x \in y \in [-2, 2]$,

$$|e^y - 1 - y| \leq Cy^2$$

Soit $y \in [-2, 2]$. On applique l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre 2 à la fonction exp entre 0 et y :

$$|e^y - 1 - y| \leq \frac{y^2}{2} \sup_{[\min(0,y), \max(0,y)]} |e^y|,$$

on a donc, pour tout $y \in [-2, 2]$,

$$|e^y - 1 - y| \leq \frac{y^2 e^2}{2}.$$

On a donc bien le résultat voulu en posant $C = \frac{e^2}{2}$.

Je crois qu'il y a une seule personne qui m'a cité correctement Taylor Lagrange, en faisant le sup sur le bon intervalle (et en prenant en compte le signe de y . Vous allez trop vite en citant Taylor et en majorant par le sup sur $[-2, 2]$.

(b) Montrer que pour tout $h \in [-1, 1]$ et tout $t \in [0, 1]$

$$|e^{h(1+t^2)} - 1 - h(1+t^2)| \leq 4Ch^2.$$

Pour tout $h \in [-1, 1]$ et tout $t \in [0, 1]$, on a bien $h(1+t^2) \in [-2, 2]$ donc on peut appliquer l'inégalité donnée à $y = h(1+t^2)$:

$$|e^{h(1+t^2)} - 1 - h(1+t^2)| \leq C(h(1+t^2))^2$$

et comme $(1+t^2) \leq 2$, on a $(1+t^2)^2 \leq 4$ d'où le résultat souhaité.

(c) En déduire que pour h petit, on a

$$\left| \int_0^1 \left(\frac{e^{(x_0+h)(1+t^2)}}{1+t^2} - \frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2} - he^{x_0(1+t^2)} \right) dt \right| = \left| F(x_0+h) - F(x_0) - h \int_0^1 e^{x_0(1+t^2)} dt \right|$$

Soit $h \in [-1, 1]$. On multiplie l'inégalité trouvée à la question précédente par $\frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2}$ qui est positif, cela ne change donc pas l'inégalité:

$$\frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2} |e^{h(1+t^2)} - 1 - h(1+t^2)| \leq \frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2} 4Ch^2,$$

donc, en faisant rentrer $\frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2}$ dans la valeur absolue ce qui est légitime puisque c'est positif, on obtient:

$$\left| \frac{e^{(x_0+h)(1+t^2)}}{1+t^2} - \frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2} - he^{x_0(1+t^2)} \right| \leq \frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2} 4Ch^2.$$

On a

$$\frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2} \leq e^{x_0(1+t^2)}$$

et comme $x_0 \leq |x_0|$, on a $x_0(1+t^2) \leq |x_0|(1+t^2) \leq 2|x_0|$ d'où, par croissance de l'exponentielle, $e^{x_0(1+t^2)} \leq e^{2|x_0|}$.

On intègre enfin l'inégalité entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 \left| \frac{e^{(x_0+h)(1+t^2)}}{1+t^2} - \frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2} - he^{x_0(1+t^2)} \right| dt \leq \int_0^1 4Ch^2 e^{2|x_0|} dt = 4Ch^2 e^{2|x_0|}$$

On sait, par ailleurs, que la valeur absolue de l'intégrale est plus petite que l'intégrale de la valeur absolue, on a donc

$$\left| \int_0^1 \left(\frac{e^{(x_0+h)(1+t^2)}}{1+t^2} - \frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2} - he^{x_0(1+t^2)} \right) dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{e^{(x_0+h)(1+t^2)}}{1+t^2} - \frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2} - he^{x_0(1+t^2)} \right| dt$$

et par linéarité de l'intégrale,

$$\left| \int_0^1 \left(\frac{e^{(x_0+h)(1+t^2)}}{1+t^2} - \frac{e^{x_0(1+t^2)}}{1+t^2} - he^{x_0(1+t^2)} \right) dt \right| = \left| F(x_0+h) - F(x_0) - h \int_0^1 e^{x_0(1+t^2)} dt \right|$$

d'où l'inégalité souhaitée.

(d) *Conclure*.

On divise par h l'inégalité précédente:

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - \int_0^1 e^{x_0(1+t^2)} dt \right| \leq 4Ch e^{2|x_0|}$$

et on fait tendre h vers 0. On a alors $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \int_0^1 e^{x_0(1+t^2)} dt$ donc F est dérivable en tout point x_0 , de dérivée $F'(x_0) = \int_0^1 e^{x_0(1+t^2)} dt$.

Vous étiez sans doute contents d'être arrivés au bout du problème mais la conclusion attendue est dans l'intro de la question: on cherche à montrer la dérivabilité de F

Exercice 5 Partie I: étude générale.

1. On pose $A = \{n \in \mathbb{N}, f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$. Cet ensemble est non-vidé puisque f est nilpotente et minoré par 0, il admet donc un plus petit élément.

On vous demande de justifier l'existence d'un minimum, ne cherchez pas plus loin: ensemble non vide et minoré

2. (a) Par définition, $f^{\nu(f)} = 0$ donc $N_{\nu(f)} = E$.
(b) Soit $x \in N_p$, alors $f^p(x) = 0$ et comme f est linéaire, $f^{p+1}(x) = f(0) = 0$ donc $x \in N_{p+1}$.
(c) On suppose qu'il existe p tel que $N_p = N_{p+1}$. Montrons que $N_{p+1} = N_{p+2}$, ce qui permettra de conclure par récurrence. On sait déjà que $N_{p+1} \subset N_{p+2}$. Soit donc $x \in N_{p+2}$, alors $f^{p+2}(x) = 0$ donc $f(x) \in N_{p+1}$ or $N_p = N_{p+1}$ donc $f(x) \in N_p$ et on a donc $f^p(f(x)) = 0 = f^{p+1}(x)$ ce qui montre que $x \in N_{p+1}$. Question très peu traitée.
(d)

La question précédente montre que la suite $\dim N_k$, $k = 1 \dots \nu(f)$ est strictement croissante à valeurs dans $[1, \dim E]$ donc $\nu(f) \leq \dim(E)$.

Partie II: Cas où $\nu(f) = \dim E$.

1. L'ensemble est non vide car il contient le vecteur nul. Soient $h, g \in C(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda g + h \in C(f)$. On a $(\lambda g + h) \circ f = \lambda g \circ f + h \circ f = \lambda f \circ g + f \circ h = f \circ (\lambda g + h)$ donc $\lambda g + h \in C(f)$ et $C(f)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Beaucoup oublient non vide!

2. Soit $g \in C(f)$.
(a) Par définition de n , on sait que $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc il existe bien x_0 tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.
(b) Comme cette famille est de cardinal n , il suffit de montrer qu'elle est libre. Soient donc $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que

$$\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0_E$$

On applique f^{n-1} et on obtient $\lambda_0 f^{n-1}(x_0) = 0_E$ et comme $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$, on a $\lambda_0 = 0$. On applique ensuite f^{n-2} à l'égalité originale pour obtenir $\lambda_1 = 0$ et ainsi de suite.

- (c) On a $g(x_0) = a_0 x_0 + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0)$ donc

$$f^k \circ g(x_0) = a_0 f^k(x_0) + \dots + a_{n-1} f^{k+n-1}(x_0) = a_0 f^k(x_0) + \dots + a_{n-k-1} f^{n-1}(x_0).$$

Comme $g \in C(f)$, on a $f^k \circ g(x_0) = g(f^k(x_0))$ dont les coordonnées sont donc $(0, \dots, a_0, \dots, a_{n-1-k})$

- (d) D'après la question précédente, on sait que cette relation est vérifiée pour $f^k(x_0)$, $k = 0, \dots, n-1$. Elle est donc vraie sur une base de E donc sur E tout entier.
- (e) On a montré que pour $g \in C(f)$ quelconque, g était combinaison linéaire de $Id, f, f^2, \dots, f^{n-1}$ ce qui montre que $C(f) \subset \text{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1})$ et comme $f^k \in C(f), \forall k$, on a égalité par double inclusion.
- (f)

On a une famille génératrice, il suffit donc de montrer qu'elle est libre. Soient donc $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que

$$\lambda_0 Id + \lambda_1 f + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Alors pour x_0 choisi tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$, on a

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0_{(E)}$$

ce qui implique $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ d'après la question b. La famille est donc une base de $C(f)$ et comme elle est de cardinal n , on a $\dim C(f) = n$. **Attention, il est impératif d'avoir la liberté de la famille pour affirmer que la dimension vaut n**

Exercice 6 On suppose $\pi = \frac{a}{b}$. $f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$ et $F(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(2k)}(x)$.

1. Soit $x \in [0, \pi]$,

$$f(\pi - x) = f\left(\frac{a}{b} - x\right) = \frac{\left(\frac{a}{b} - x\right)^n \left(a - b\frac{a}{b} + bx\right)^n}{n!} = \frac{\frac{(a-bx)^n}{b^n} (bx)^n}{n!} = f(x)$$

On a bien le résultat souhaité. Certains ont écrit une page de calcul, je n'ai pas encore compris pourquoi

2. Par récurrence sur j , on montre que l'égalité $f(\pi - x) = f(x)$ implique $f^{(j)}(\pi - x) = (-1)^j f^{(j)}(x)$, pour tout $x \in [0, \pi]$.

Massacre !!!! et le -1 devant le x?!?!?!?

3. Pour tout x de $[0, \pi]$, $x^n \leq \pi^n$ d'une part et d'autre part $0 \leq (a - bx) \leq a$ d'où le résultat.

4. Sur $[0, \pi]$, $\sin(x) \geq 0$ donc $0 \leq f(x) \sin(x) \leq \frac{\pi^n a^n}{n!}$. Par croissance de l'intégrale, $\int_0^\pi f(t) \sin(t) dt \leq \frac{\pi^{n+1} a^n}{n!}$. Or $\frac{\pi^{n+1} a^n}{n!}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il est donc inférieur à $\frac{1}{2}$ à partir d'un certain rang.

Pour avoir une inégalité correcte, il ne faut pas oublier de mentionner le fait que le sinus est positif (sinon, pour sortir le sup d'une des deux fonctions, il faudrait une valeur absolue dans l'intégrale).

5. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$f(x) = \frac{x^n}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} (-bx)^j.$$

Ainsi,

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(-1)^j b^j a^{n-j}}{n!} x^{n+j} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(-1)^j b^j a^{n-j}}{n!} g_{n+j}(x).$$

donc

$$f = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(-1)^j b^j a^{n-j}}{n!} g_{n+j}.$$

On pose $k = n + j$ et on obtient

$$f = \sum_{k=n}^{2n} \binom{n}{k-n} \frac{(-1)^{k-n} b^{k-n} a^k}{n!} g_k.$$

6. Le résultat $g_k^{(j)} = \frac{k!}{(k-j)!} g_{k-j}$ pour $j \leq k$ se montre par récurrence sur j :

pour $j = 0$, le résultat est clair. On suppose que le résultat est vrai pour un certain entier j .

On écrit

$$\begin{aligned} g_k^{(j+1)} &= (g_k^{(j)})' \\ &= \left(\frac{k!}{(k-j)!} g_{k-j} \right)' \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{k!(k-j)}{(k-j)!} g_{k-j-1} \text{ car } g'_{k-j} = (k-j)g_{k-j-1}. \end{aligned}$$

Or $\frac{k-j}{(k-j)!} = \frac{1}{(k-j-1)!}$ après simplification, d'où le résultat.

Par le principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout entier j .

Comme c'était classique, j'ai accepté le "par récurrence descendante" ou "par récurrence immédiate".

7. Si $0 \leq j < n$, l'expression $f^{(j)}(x)$ est un polynôme dont le terme de plus petit degré est x^{n-j} d'après la question 5. Donc tous les termes s'annulent en 0 et ainsi $f^{(j)}(0) = 0$

Il est impératif de mentionner le fait qu'il n'y a pas de terme constant dans le polynôme (donc de préciser $n - j > 0$)

8. Avec la question 2, $f^{(j)}(\pi) = 0$ pour $0 \leq j < n$.

9. Pour $n \leq j \leq 2n$, on se sert encore de l'expression de la question 5 les termes en $(x^k)^{(j)}$ sont nuls si $j > k$ car on finit par dériver une constante. De plus, en $x = 0$, si $j < k$, il reste du x^{k-j} qui va s'annuler. Ainsi, $f^{(j)}(0)$ est le coefficient de x^j dérivé j fois, c'est-à-dire $j! \alpha_j = \binom{n}{j-n} (-1)^{j-n} b^{j-n} a^j$ qui est entier car chacun des termes l'est.

Les termes d'indice différents de j sont nuls pour des raisons différentes, il faut donc préciser pourquoi ils sont nuls.

10. C'est aussi un entier d'après la question 2.

11. $F(0)$ est une somme de $f^{(k)}(0)$ qui sont tous des entiers, donc $F(0)$ est un entier. Il en est de même pour $F(\pi)$.

12. Soit $x \in [0, \pi]$.

$$F(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(2k)}(x),$$

donc $F''(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(2k+2)}(x)$. Or $f^{(2n+1)}$ et $f^{(2n+2)}$ sont nuls car f est un polynôme de de-

gré $2n$. Ainsi, $F''(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(2k+2)}(x)$. On pose $j = k+1$ et $F''(x) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} f^{(2j)}(x)$.

En regroupant les deux sommes, on a bien $F(x) + F''(x) = f(x)$

On peut aussi remarquer que c'est une somme télescopique en la faisant apparaître explicitement :

$$F(x) + F'''(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(2k)}(x) + \sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(2k+2)}(x) = \sum_{k=0}^n ((-1)^k f^{(2k)}(x) - (-1)^{k+1} f^{(2(k+1))}(x))$$

On a donc

$$F(x) + F'''(x) = f(x) - (-1)^{n+1} f^{(2n+2)} = f(x),$$

car $f^{(2n+2)}$ est nulle puisque f est un polynôme de degré $2n$.

13. Soit $x \in [0, \pi]$, On a

$$\begin{aligned} F'''(x) \sin(x) + F'(x) \cos(x) - F'(x) \cos(x) + F(x) \sin(x) &= (F(x) + f''(x)) \sin(x) \\ &= f(x) \sin(x). \end{aligned}$$

La dérivée de $x \mapsto (F'(x) \sin(x) - F(x) \cos(x))$ est donc $x \mapsto f(x) \sin(x)$

14. D'après la question précédente, on connaît une primitive de $t \mapsto f(t) \sin(t)$, on a donc

$$\int_0^\pi f(t) \sin(t) dt = [F'(x) \sin(x) - F(x) \cos(x)]_0^\pi = F(0) + F(\pi)$$

qui est un entier.

15. $\int_0^\pi f(t) \sin(t) dt$ est un nombre entier d'après la question précédente. Il n'est pas nul car on intègre une fonction continue strictement positive et il est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$ d'après la question 4. C'est absurde et donc $\pi = \frac{a}{b}$ est absurde, donc π est irrationnel.

Exercice 7 1. Montrons que $\ker(u)$ est stable par v . Soit $x \in \ker(u)$. Alors, comme $u \circ v = v \circ u$, on a

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(0_E) = 0_E.$$

Ainsi, $v(x) \in \ker u$.

Ce travail montre que $\boxed{v(\ker u) \subset \ker(u)}$, ou autrement dit que $\ker(u)$ est stable par v .

Montrons que $\text{Im}(u)$ est stable par v . Soit $y \in \text{Im}(u)$ et $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On a alors, comme $u \circ v = v \circ u$,

$$v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \text{Im}(u).$$

Ainsi, $\boxed{v(\text{Im } u) \subset \text{Im } u}$, ou autrement dit, $\text{Im}(u)$ est stable par v .

2. Soit $y \in \text{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Donc $u(y) = u^2(x) = 0_E$, donc $y \in \ker u$.

On a bien montré que $\boxed{\text{Im } u \subset \ker u}$.

3. Comme E est de dimension finie égale à n , d'après le théorème du rang, on a $n = \text{rg}(u) + \dim(\ker u)$.

Or, comme $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$, on a $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im } u) \leq \dim(\ker u)$, donc $\boxed{\text{rg}(u) \leq \frac{n}{2}}$.

4. (a) Comme u n'est pas nul, on a $\text{rg}(u) \geq 1$. L'inégalité précédente donne directement que $\text{rg}(u) = 1$, donc $\text{Im}(u)$ est une droite vectorielle, que nous noterons D .

Le théorème du rang (cf. question précédente) donne directement que $\dim(\ker u) = \dim(E) - \text{rg}(u) = 1$.

D'après 2, on a $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$ et ces deux sous-espaces vectoriels sont de même dimension, donc sont égaux.

Il existe donc bien une droite vectorielle D telle que $\text{Im}(u) = \ker(u) = D$.

- (b) i. Comme $D = \ker(u)$ et comme u et v commutent, d'après la question 1, $v(D) \subset D$.
 ii. On a $u \circ v = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(v) \subset \ker(u)$. Si $\text{Im}(v) = \{0_E\}$ (cad $v = 0_{\mathcal{L}(E)}$), alors $u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 Sinon, Les arguments précédents s'appliquent à v : il existe une droite D' telle que $\text{Im}v = \ker v = D'$. Montrer l'inclusion $\text{Im}(v) \subset \ker(u)$ (ou $D' \subset D$) revient à montrer l'égalité puisque ce sont des droites vectorielles.
 Supposons par l'absurde $D \neq D'$, alors $D \cap D' = \{0_E\}$ et comme $2 = \dim(E) = \dim(D) + \dim(D')$, on a $E = D \oplus D'$. Soit $x \in E$. Il existe $d \in D$ et $d' \in D'$ tels que $x = d + d'$.
 Comme $d' \in \ker(v)$, on a $v(x) = v(d) + v(d') = v(d)$.
 Donc $v(x) = v(d) \in v(D) \subset D$. D'autre part, $v(d) \in \text{Im}(v) = D'$. On a donc $v(x) \in D \cap D'$, donc $v(x) = 0_E$.
 Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on a donc $v = 0$, ce qui est exclu. **Contradiction.**

On a donc $\text{Im}(v) = \ker(v) = D$.

De là, pour tout $x \in E$, $v(x) \in \text{Im}(v) = \ker(u)$, donc $u \circ v(x) = 0$.

Ainsi, $u \circ v = 0$.

Elle n'était pas évidente cette question et vous allez me dire que la réponse sort du chapeau. En fait, pas vraiment. En effet, comme on travaille en dimension 2, deux droites vectorielles sont soit confondues, soit supplémentaires dans E .

- (c) On peut appliquer le raisonnement précédent : $D = \text{Im}(v) = \ker(v) = \text{Im}(w) = \ker(w)$.
 Donc pour tout $x \in E$, $w(x) \in \text{Im}(w) = \ker(v)$, donc $v \circ w(x) = 0$.
 Ainsi, $v \circ w = 0$.

5. (a) Posons $v = u_1 \circ \dots \circ u_i$: c'est un endomorphisme de E , comme composée d'endomorphismes, notamment $F_i = \text{Im}(v)$ est bien un sev de E . Ensuite, u_{i+1} commute avec chaque u_k pour $1 \leq k \leq i$, donc avec v . D'après la question 1, F_i est un sev de E stable par u_{i+1} .
 (b) Montrons par récurrence finie sur $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ la proposition :

$$\mathcal{H}(i) : \text{ " } \dim(F_i) \leq \frac{n}{2^i} \text{ "}$$

• Initialisation : la question 3 montre $\mathcal{H}(1)$.

• Hérédité : soit $i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$. Supposons $\mathcal{H}(i)$.

Posons v la restriction de u_{i+1} à F_i . D'après la question précédente, on peut voir v comme un endomorphisme de F_i et, comme $u_{i+1}^2 = 0$, alors $v^2 = 0$. D'après la question 3, on a

$$\text{rg}(v) \leq \frac{\dim F_i}{2} \leq \frac{n}{2^{i+1}}$$

Or

$$\text{Im}(v) = v(F_i) = u_{i+1}(F_i) = u_{i+1}((u_i \circ \dots \circ u_1)(E)) = F_{i+1}$$

$$\text{Donc } \dim(F_{i+1}) \leq \frac{n}{2^{i+1}}.$$

- Conclusion : pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\dim(F_i) \leq \frac{n}{2^i}$.
- (c) Si $n < 2^m$ alors, d'après la question précédente, $\dim F_m < 1$, donc $\text{Im}(u_1 \circ \cdots \circ u_m) = F_m = \{0_E\}$. Directement, $\boxed{u_1 \circ \cdots \circ u_m = 0.}$