Devoir surveillé 8, sujet 1 .

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \ln(2)$ (≈ 0.7)

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que f est paire.

2. On considère g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t) - t}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

(a) Vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}$ et justifier qu'elle est bornée sur $[-1, 1]$

(b) En déduire que f est continue en 0

3. (a) Montrer avec soin que f est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$

(b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

(c) Étudier le signe de f' sur $]0, +\infty[$

4. Montrer que $\forall x > 0, |f(x)| \leq \frac{1}{2x}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

5. (a) Déterminer le signe de $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f(\pi)$.

(b) Montrer que $f(2\pi) = \int_{2\pi}^{3\pi} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t+\pi)^2} \right) \sin(t) dt$.

(On pourra faire un changement de variable adéquat).

(c) En déduire que $f(2\pi) > 0$.

Exercice 2.

Les quatre sous-parties peuvent être traitées de façon indépendantes. Néanmoins, la partie C est utile pour la fin de la partie D.

Partie A

On travaille dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel usuel $\mathbb{R}^2$ et on considère l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (6x - 4y, 9x - 6y)$$

1. Démontrer que l'application f est linéaire.
2. (a) Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f .
(b) Démontrer que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.
3. Démontrer que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$.

On pose maintenant

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{1}{22} \cdot (2y, -x) \end{cases}$$

C'est une application linéaire, on ne demande pas de le vérifier.

4. (a) Démontrer que g est un automorphisme.

On pose $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

- (b) Calculer $(f \circ g + g \circ f)(e_1)$ et $(f \circ g + g \circ f)(e_2)$.
- (c) En déduire que $f \circ g + g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$.

Partie B

On pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie notée n . Soit $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tels que

$$(1) \quad f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \\ (2) \quad f \circ g + g \circ f = id_E$$

5. (a) Démontrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.
(b) Démontrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Im}(f)$.
(c) Conclure. Puis démontrer que n est pair.
6. Démontrer que $f \circ g \circ f = f$ puis que $f \circ g$ est un projecteur.

On pose $F = \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ puis $G = g(F)$.

7. Démontrer que $F = \text{Im}(f \circ g)$ et que $G = \text{Ker}(f \circ g)$.
8. En déduire que F et G sont supplémentaires dans E .

Partie C

On pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un K -espace vectoriel non nul de dimension finie paire notée n . On pose $m = \frac{n}{2}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang m tel que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

9. (a) Quelles sont les dimensions du noyau et de l'image de f ?
(b) Démontrer que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

On pose $F = \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ et soit G un supplémentaire de F dans E . On introduit l'application linéaire

$$h : \begin{cases} G & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$$

Cette application h est bien définie car $\forall x \in G \subset E, f(x) \in \text{Im}(f) = F$ et elle est linéaire car f est linéaire.

10. (a) Quelle est la dimension de G ?
(b) Démontrer que $\text{Ker}(h) = \{0_E\}$.
(c) Démontrer que h est un isomorphisme.

Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_m)$ une base de F et $\mathcal{B}_2 = (e'_1, \dots, e'_m)$ une base de G . Soit g l'endomorphisme de E défini par

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, g(e_i) = h^{-1}(e_i) \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, g(e'_j) = 0_E$$

11. Démontrer que $f \circ g + g \circ f = id_E$.

Partie D

On travaille dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel usuel $\mathbb{R}_5[X]$. On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_5[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_5[X] \\ P(X) & \longmapsto & P'''(X) \end{cases}$$

12. (a) Sans justifier, donner une base de $\mathbb{R}_5[X]$ et sa dimension.
(b) Justifier que f est linéaire et simplifier $f \circ f$.
(c) Soit $P(X) = \sum_{k=0}^5 a_k X^k \in \mathbb{R}_5[X]$. Calculer $f(P(X))$.
(d) On pose $F = \text{Ker}(f)$. Démontrer que $F = \mathbb{R}_2[X]$ puis calculer le rang de f .
On pose $G = \text{Vect}(X^3, X^4, X^5)$.
13. Justifier que G est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_5[X]$.

Comme dans la sous-partie précédente, on pose

$$h : \begin{cases} G & \longrightarrow & F \\ P(X) & \longmapsto & f(P(X)) \end{cases}$$

14. Justifier que h est un isomorphisme puis déterminer $h^{-1}(1)$, $h^{-1}(X)$ et $h^{-1}(X^2)$.
15. Justifier qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}_5[X]$ tel que $f \circ g + g \circ f = id_{\mathbb{R}_5[X]}$.

Correction du DS n 8

Exercice 1

La plupart d'entre vous n'ont même pas abordé le problème et ceux qui y ont touché sont passés à côté, travaillez donc le bien, les fonctions définies par des intégrales occupent une grande partie du programme de deuxième année !!!

1. Pour $x \neq 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur le segment $[x, 2x]$ si $x > 0$ et le segment $[2, x]$ si $x < 0$, donc l'intégrale est définie et ainsi f est définie pour $x \neq 0$. De plus, l'énoncé donne $f(0)$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

100 % d'échec sur cette question. Retenez qu'une intégrale est définie si on intègre une fonction continue (ou continue par morceaux) sur un intervalle, il faut donc s'assurer que l'intégrande est continue sur l'intervalle d'intégration (donc, ici, que 0 n'appartient jamais à l'intervalle d'intégration).

Je me permets de rappeler que $\frac{\sin(t)}{t^2}$ n'est pas une fonction et que ça devient lassant de le répéter à chaque devoir. Et tant qu'on y est, une fonction est un nom féminin, elle est donc continuE. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, alors $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$. On effectue le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale. On a $du = -dt$, et u varie de x à $2x$. On a donc

$$f(-x) = \int_x^{2x} \frac{(-\sin u)(-du)}{u^2} = \int_x^{2x} \frac{\sin(u) du}{u^2} = f(x).$$

donc f est paire.

Pas mal d'arnaques dans ce changement de variable. Ne démarrez pas votre calcul sans préciser ce qu'est x .

2. On considère g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t) - t}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

- (a) $\sin(t) - t = -\frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ avec les DL usuels. Donc, $g(t) = \frac{t}{6} + o(t) \rightarrow 0$ et g est continue en 0. Puisque pour $t \neq 0$, g est un quotient de fonctions usuelles, g est continue sur $\mathbb{R}$.

Ici g est définie en 0, la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t) - t}{t^2}$ a été prolongée, à vous de vérifier que ce prolongement est continu. Je rappelle qu'un prolongement n'est pas nécessairement continu et que cela n'a aucun sens de conclure par " la fonction est prolongeable par continuité " puisqu'elle est déjà définie sur $\mathbb{R}$

Une fonction continue sur un segment étant bornée, g est bornée sur $[-1, 1]$.

Le mot segment doit apparaître (ainsi que la continuité de la fonction)

- (b) Puisque g est bornée, il existe M tel que $\forall t \in [-1, 1], |g(t)| \leq M$. Ainsi, pour $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,
- $$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} + g(t) \right) dt = \underbrace{\int_x^{2x} \frac{dt}{t}}_{=\ln(2)} + \underbrace{\int_x^{2x} g(t) dt}_{=I_2}.$$
- Or le second membre

vérifie $I_2 = \left| \int_x^{2x} g(t) dt \right| \leq |x|M$. Ainsi, lorsque $x \rightarrow 0$, on a $I_2 \rightarrow 0$ par comparaison et donc $f(x) \rightarrow \ln(2) = f(0)$. On a bien f est continue en 0.

Beaucoup de bêtises là aussi avec des confusions avec f définie en 0 ou avec la continuité de l'intégrande

3. (a) Soit $x \neq 0$, alors $f(x) = G(2x) - G(x)$ où G est une primitive de $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ (cette fonction admet des primitives car elle est continue sur $[x, 2x]$ puisque cet intervalle ne contient pas 0). Ainsi, f est dérivable comme différence de deux fonctions dérivables et
- $$f'(x) = 2 \frac{\sin(2x)}{(2x)^2} - \frac{\sin(x)}{x^2} = \frac{\sin(x)(\cos(x) - 1)}{x^2}$$

Il était aussi possible de ne pas introduire G mais de préciser que les fonctions qui définissent les bornes de f sont dérivables (et toujours que l'intégrande est continue sur l'intervalle d'intégration).

- (b) Calculons $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} \left(\int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt - \ln(2) \right)$. Or $\ln(2) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$. Ainsi,
- $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} \int_x^{2x} g(t) dt.$$

Or, on a déjà vu qu'au voisinage de 0, $g(t) = O(t)$. Ainsi, pour x assez petit, $\left| \int_x^{2x} g(t) dt \right| \leq \left| \int_x^{2x} Mt dt \right| \leq \tilde{M}x^2$. Du coup, $\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \leq \tilde{M}x$ et par comparaison, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$.

- (c) f' est du signe de $-\sin(x)$ et donc $f'(x) \leq 0$ pour $x \in [2k\pi, \pi + 2k\pi]$ et est positive sinon.

4. $|f(x)| = \left| \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \right| \leq \int_x^{2x} \frac{|\sin(t)|}{t^2} dt$. (Les bornes sont dans le bon sens car $x > 0$). Or, $|\sin(t)| \leq 1$ donne $|f(x)| \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = \frac{1}{2x}$. Par comparaison, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

5. (a) $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est toujours positive et sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\sin(t) \geq 0$. L'intégrale d'une fonction positive avec les bornes dans le bon sens donne $f(\frac{\pi}{2}) \geq 0$. Le même type d'argument ($\sin \leq 0$ sur $[\pi, 2\pi]$) donne $f(\pi) \leq 0$.

- (b) $f(2\pi) = \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin(t)}{t^2} dt + \int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$. Dans la seconde intégrale, on pose $u = t - \pi$ et on a $\int_{3\pi}^{4\pi} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin(u + \pi)}{(u + \pi)^2} du$. Enfin, $\sin(u + \pi) = -\sin(u)$ donne l'égalité souhaitée.

- (c) Entre 2π et 3π , le sinus est positif et la différence $\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t + \pi)^2}$ est positive. Les bornes étant dans le bon sens, on en déduit que

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t + \pi)^2} \right) \sin(t) dt \geq 0.$$

De plus, l'intégrale d'une fonction positive et continue est nulle ssi la fonction est nulle, donc $f(2\pi) = \int_{2\pi}^{3\pi} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t + \pi)^2} \right) \sin(t) dt > 0$.

Exercice 2 Partie A

On travaille dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel usuel $\mathbb{R}^2$ et on considère l'application

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (6x - 4y, 9x - 6y)$$

1. Démontrer que l'application f est linéaire.

Soit $(U, V) \in (\mathbb{R}^2)^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $U = (x, y)$, $V = (x', y')$, on a alors

$$\begin{aligned} f(\lambda U + V) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= (6(\lambda x + x') - 4(\lambda y + y'), 9(\lambda x + x') - 6(\lambda y + y')) \\ &= (\lambda 6x + 6x' - 4\lambda y - 4y', \lambda 9x + 9x' - \lambda 6y - 6y') \\ &= \lambda(6x - 4y, 9x - 6y) + (6x' - 4y', 9x' - 6y') \\ &= \lambda f(U) + f(V) \end{aligned}$$

f est donc bien linéaire.

sautez l'avant dernière ligne va juste mettre le doute: on vous demande de montrer qu'elle est linéaire, montrez-le sans sauter d'étapes.

2. (a) Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f .

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$(x, y) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow 6x - 4y = 0 = 9x - 6y \Leftrightarrow 3x = 2y$$

On a donc

$$\text{Ker}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 3x = 2y\} = \text{Vect}((2, 3)).$$

Une base de $\text{Ker}(f)$ est la famille ne contenant que le vecteur $(2, 3)$.

?

Si vous commencez la démonstration avec " Soit $X \in \text{Ker}(f)$ ", vous n'obtiendrez qu'une inclusion. Vous devez raisonner par équivalence ET raisonner par équivalence jusqu'au bout. Attention toutefois à ne pas écrire une dernière ligne " $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Vect}(2, 3)$ " qui n'est pas du tout équivalente aux précédentes. C'est juste la conclusion de votre successions d'équivalences (et je pense que vous le savez, vous aviez juste la flemme d'écrire " donc on a montré $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(2, 3)$ ".)

J'ai été très étonnée du nb d'erreurs sur la conclusion de cette question. Une base de $\text{ker}(f)$ ne contient qu'un vecteur (de $\mathbb{R}^2$ puisque $\text{Ker}(f) \subset \mathbb{R}^2$!) Par le théorème du rang, on sait que $\text{Im}(f)$ est de dimension 1, il suffit donc d'en donner un élément non nul. On a $f(1, 0) = (6, 9)$, on a donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}((6, 9)) = \text{Vect}((2, 3))$. Une base de $\text{Im}(f)$ est la famille ne contenant que le vecteur $(2, 3)$.

- (b) Démontrer que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

D'après la question précédente, on a $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) = \text{Vect}((2, 3))$.

3. Démontrer que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $f(x, y) \in \text{Im}(f)$. Or, $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$, on a donc $f(x, y) \in \text{Ker}(f)$ c'est-à-dire $f \circ f(x, y) = (0, 0)$. Ceci étant valable pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a donc $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$.

Là j'ai commencé à voir des applications linéaires $(f, f \circ f, id_E, 0_{\mathcal{L}(E)})$ égales à des vecteurs de E $(x, 0_E, f(x))$ ce qui n'a, bien entendu, aucun sens!

On pose maintenant

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \frac{1}{22} \cdot (2y, -x)$$

C'est une application linéaire, on ne demande pas de le vérifier.

4. (a) Démontrer que g est un automorphisme.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $f\left(-b, \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{22}(a, b)$ donc $(-22b, 11a)$ est un antécédent de (a, b) par g qui est donc surjective. Comme c'est un endomorphisme d'un espace-vectoriel de dimension finie, g est bijective.

endomorphisme ne suffit pas à justifier que "injective $\Rightarrow$ bijective", il faut préciser que l'on travaille en dimension finie

On pose $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

(b) Calculer $(f \circ g + g \circ f)(e_1)$ et $(f \circ g + g \circ f)(e_2)$.

On a

- $f \circ g(e_1) = f\left(\frac{1}{22}(0, -1)\right) = \left(\frac{2}{11}, \frac{3}{11}\right)$ et
- $g \circ f(e_1) = g(6, 9) = \frac{1}{22}(18, -6) = \left(\frac{9}{11}, -\frac{3}{11}\right)$.
- $f \circ g(e_2) = f\left(\frac{1}{22}(2, 0)\right) = \left(\frac{6}{11}, \frac{9}{11}\right)$ et
- $g \circ f(e_2) = g(-4, -6) = \frac{1}{22}(-12, 4) = \left(-\frac{6}{11}, \frac{2}{11}\right)$.

On a donc

$$(f \circ g + g \circ f)(e_1) = e_1 \text{ et } (f \circ g + g \circ f)(e_2) = e_2.$$

(c) En déduire que $f \circ g + g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(f \circ g + g \circ f)(x, y) = x(f \circ g + g \circ f)(e_1) + y(f \circ g + g \circ f)(e_2) = (x, y)$$

on a donc bien $f \circ g + g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$.

On pouvait aussi dire simplement, "par linéarité de f ". **Partie B**

On pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie notée n . Soit $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tels que

- (1) $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$
- (2) $f \circ g + g \circ f = id_E$

Attention !!! On a changé de partie, f n'est plus l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ explicité en partie A, c'est un endomorphisme d'un ev E que l'on ne connaît pas !

5. (a) Démontrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

Soit $y \in \text{Im}(f)$, montrons que $f(y) = 0_E$. On sait qu'il existe $x \in E$, $f(x) = y$, on a alors $f(y) = f \circ f(x) = 0_E$ puisque $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On a bien l'inclusion souhaitée.

(b) Démontrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Im}(f)$.

Soit $x \in \text{Ker}(f)$, montrons que $x \in \text{Im}(f)$. On sait que

$$x = f \circ g(x) + g \circ f(x) = f \circ g(x),$$

puisque $f(x) = 0_E$. Or $g(x) \in E$, on a donc trouvé un antécédent $(g(x))$ de x par f , x est donc bien un élément de $\text{Im}(f)$ ce qui montre l'autre inclusion.

Attention, quand vous écrivez " on veut montrer que $x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0_E$ ", vous écrivez que vous allez montrer une équivalence qui est évidente. On comprend que vous avez juste eu la flemme d'écrire " on veut montrer que $x \in \text{Ker}(f)$, c'est-à-dire que $f(x) = 0_E$ (mais ça énerve).

(c) *Conclure. Puis démontrer que n est pair.*

D'après les deux questions précédentes, on a montré l'égalité $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f)$ par double inclusion. De plus, d'après le théorème du rang, $\text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) = n$, on a donc $2\dim(\text{ker}(f)) = n$ donc n est pair.

6. *Démontrer que $f \circ g \circ f = f$ puis que $f \circ g$ est un projecteur.*

On applique f à l'égalité $f \circ g + g \circ f = \text{id}_E$, on obtient $f \circ f \circ g + f \circ g \circ f = f$ et, comme $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on a bien $f \circ g \circ f = f$.

Là encore, attention à ne pas écrire des $f(g)$, des $f = 0_E$ ou des $x = 0_{\mathcal{L}(E)}$ qui montrent que vous confondez les vecteurs et les applications.

On veut montrer que $f \circ g$ est un projecteur, on calcule donc $(f \circ g)^2$. On a

$$(f \circ g)^2 = \underbrace{f \circ g \circ f}_{=f} \circ g = f \circ g.$$

L'application $f \circ g$ est bien un projecteur.

On pose $F = \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ puis $G = g(F)$.

7. *Démontrer que $F = \text{Im}(f \circ g)$ et que $G = \text{Ker}(f \circ g)$.*

On sait déjà que $\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im}(f)$ donc $\text{Im}(f \circ g) \subset F$. Pour montrer l'inclusion réciproque, on va simplement montrer que pour tout $y \in F$, $f \circ g(y) = y$. Par propriété des projecteurs, on aura alors $y \in \text{Im}(f \circ g)$.

Soit donc $y \in F$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a alors

$$f \circ g(y) = f \circ g \circ f(x) = f(x),$$

d'après la question précédente. On a donc bien $f \circ g(y) = y$ et $y \in \text{Im}(f \circ g)$. Par double inclusion, on a l'égalité.

On raisonne, à nouveau, par double inclusion pour montrer l'égalité $G = \text{Ker}(f \circ g)$. Soit $x \in \text{Ker}(f \circ g)$, alors $f \circ g(x) = 0_E$ donc $x = g \circ f(x)$ puisque $f \circ g + g \circ f = \text{id}_E$. Or $f(x) \in F$, on a donc bien $x \in g(F)$ ce qui montre l'inclusion $\text{Ker}(f \circ g) \subset g(F)$.

Soit maintenant $y \in g(F)$, alors il existe $x \in F$ tel que $y = g(x)$. On sait qu'il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$ donc $y = g \circ f(a) = a - f \circ g(a)$. On a alors

$$f \circ g(y) = f \circ g(a) - (f \circ g)^2(a) = 0_E,$$

puisque $f \circ g$ est un projecteur. Ainsi, $y \in \text{Ker}(f \circ g)$ et on a bien l'égalité par double inclusion.

8. *En déduire que F et G sont supplémentaires dans E .*

On sait que le noyau et l'image d'un projecteur de E sont supplémentaires dans E , on a donc bien F et G supplémentaires dans E .

Certains ont redémontré que les espaces étaient supplémentaires. La somme des dimensions égales à E ne suffit absolument pas à affirmer que $F + G = E$. Il faut d'abord montrer que la somme est directe pour avoir $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$ puis dire que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ montre que $F \oplus G$ et E ont même dimension et sont donc égaux.

On ne dit pas que " F et G recouvrent E ", on dit $F + G = E$.

Partie C

On pose $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un K -espace vectoriel non nul de dimension finie paire notée n . On pose $m = \frac{n}{2}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang m tel que $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

9. (a) Quelles sont les dimensions du noyau et de l'image de f ?

Par hypothèse, $\dim(\text{Im}(f)) = m$ et, par le théorème du rang : $m + \dim(\text{Ker}(f)) = n = 2m$.

On en déduit que le noyau et l'image de f sont de dimensions m .

(b) Démontrer que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

On a $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\text{Im}(f) \subset \text{ker}(f)$. Comme les deux espaces ont même dimension, on en déduit qu'ils sont égaux.

On pose $F = \text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ et soit G un supplémentaire de F dans E . On introduit l'application linéaire

$$h : \begin{cases} G & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$$

Cette application h est bien définie car $\forall x \in G \subset E, f(x) \in \text{Im}(f) = F$ et elle est linéaire car f est linéaire.

10. (a) Quelle est la dimension de G ?

Par définition, G est un supplémentaire de F dans E donc $\dim(G) = \dim(E) - \dim(F) = n - m = m$.

(b) Démontrer que $\text{Ker}(h) = \{0_E\}$.

Soit $x \in \text{Ker}(h)$, alors $x \in G$ et $h(x) = f(x) = 0$. On a donc $x \in \text{Ker}(f)$ d'où $x \in F \cap G$.

Or, F et G sont en somme directe, on en déduit que $x = 0_E$ et comme on a clairement $\{0_E\} \subset \text{Ker}(h)$, on a l'égalité.

(c) Démontrer que h est un isomorphisme.

On sait que h est injective d'après la question précédente et c'est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie. C'est donc un isomorphisme.

Attention, tout élément de F admet un antécédent dans E par f mais l'enjeu est de montrer qu'il admet un antécédent dans G . On a $\text{rg}(h) = \dim f(G)$ et $\text{rg}(f) = \dim f(E)$ donc, en général, $\text{rg}(h) \neq \text{rg}(f)$ si h est une restriction de f .

Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_m)$ une base de F et $\mathcal{B}_2 = (e'_1, \dots, e'_m)$ une base de G . Soit g l'endomorphisme de E défini par

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, g(e_i) = h^{-1}(e_i) \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, g(e'_j) = 0_E$$

11. Démontrer que $f \circ g + g \circ f = \text{id}_E$.

On sait que pour montrer que $f \circ g + g \circ f(x) = x$ pour tout $x \in E$, il suffit de montrer que l'égalité est vraie pour tous les vecteurs d'une base de E . Or F et G sont supplémentaires dans E , la concaténation d'une base de F et d'une base de G est donc une base de E .

Soit $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, alors

- $e_i \in F$ donc $f(e_i) = 0_E$, on a donc

$$f \circ g(e_i) + g \circ f(e_i) = f \circ h^{-1}(e_i) = h \circ h^{-1}(e_i) = e_i,$$

car $h^{-1}(e_i) \in G$.

- On a $f \circ g(e'_i) + g \circ f(e'_i) = g \circ f(e'_i)$. Or $f(e'_i) \in F$, donc $f(e'_i) = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} e_j$. On a alors

$$g \circ f(e'_i) = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} g(e_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} h^{-1}(e_j) = h^{-1} \left(\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} e_j \right) = h^{-1}(f(e'_i)).$$

Or, $e'_i \in G$ donc $f(e'_i) = h(e'_i)$ et, par suite, $h^{-1}(f(e'_i)) = e'_i$, on a donc bien $f \circ g(e'_i) + g \circ f(e'_i) = e_i$.

L'égalité étant vraie pour les éléments d'une base de E , elle est vraie pour tout x de E . On a donc $f \circ g + g \circ f(x) = x$ pour tout $x \in E$, c'est-à-dire $f \circ g + g \circ f = id_E$.

Partie D

On travaille dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel usuel $\mathbb{R}_5[X]$. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_5[X] &\rightarrow \mathbb{R}_5[X] \\ P(X) &\mapsto P'''(X) \end{aligned}$$

12. (a) Sans justifier, donner une base de $\mathbb{R}_5[X]$ et sa dimension.

Une base de $\mathbb{R}_5[X]$ est $(1, X, X^2, X^3, X^4, X^5)$, il est de dimension 6.

Quand vous écrivez " elle est de dimension ", soit vous parlez de la base et ça n'a pas de sens, soit vous pensez qu'un espace vectoriel est un nom féminin.

- (b) Justifier que f est linéaire et simplifier $f \circ f$.

L'application f est linéaire par linéarité de la dérivation et $\forall P \in \mathbb{R}_5[X], f \circ f(P) = P^{(6)} = 0$ donc $f \circ f = 0_{\mathbb{R}_5[X]}$.

Beaucoup n'ont pas remarqué que la dérivée était nulle.

- (c) Soit $P(X) = \sum_{k=0}^5 a_k X^k \in \mathbb{R}_5[X]$. Calculer $f(P(X))$.

On a

$$f(P(X)) = \sum_{k=0}^5 a_k k(k-1)(k-2) X^{k-3} = \sum_{k=3}^5 a_k k(k-1)(k-2) X^{k-3}.$$

- (d) On pose $F = \text{Ker}(f)$. Démontrer que $F = \mathbb{R}_2[X]$ puis calculer le rang de f .

On a $f(P) = 0 \Leftrightarrow P^{(3)} = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 3, 5 \rrbracket, a_k = 0 \Leftrightarrow P \in \mathbb{R}_2[X]$. Par équivalence, on a montré $F = \mathbb{R}_2[X]$.

Le résultat est DONNÉ dans l'énoncé, toute démonstration un peu rapide ou ne donnant pas les arguments sera donc sanctionnée!

Par le thm du rang, on a $\text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}_5[X])$ donc $\text{rg}(f) = 6 - 3 = 3$. On pose $G = \text{Vect}(X^3, X^4, X^5)$.

13. Justifier que G est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_5[X]$.

La famille (X^3, X^4, X^5) est libre car composée de polynômes non nuls de degrés distincts donc c'est une base de G (ou bien On sait que F est de dimension 3 donc G est de dimension $6-3=3$ et (X^3, X^4, X^5) est une base de G car elle est génératrice de G de cardinal sa dimension). La concaténation d'une base $(1, X, X^2)$ de F et de cette base de G forme la base canonique de $\mathbb{R}_5[X]$ donc F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_5[X]$.

Comme dans la sous-partie précédente, on pose

$$h : \begin{cases} G &\longrightarrow F \\ P(X) &\longmapsto f(P(X)) \end{cases}$$

14. Justifier que h est un isomorphisme puis déterminer $h^{-1}(1)$, $h^{-1}(X)$ et $h^{-1}(X^2)$.

Un élément du noyau de h appartient à $G \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$ donc h est une application linéaire injective entre deux espaces de dimension 3, on en déduit qu'elle est bijective.

On a

- $h^{-1}(1) = \frac{X^3}{6}$.
- $h^{-1}(X) = \frac{X^4}{4!}$
- $h^{-1}(X^2) = \frac{X^5}{60}$.

15. Justifier qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}_5[X]$ tel que $f \circ g + g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}_5[X]}$.

On définit une application linéaire sur $\mathbb{R}_5[X]$ en posant

$$g(1) = \frac{X^3}{6}, g(X) = \frac{X^4}{4!}, g(X^2) = \frac{X^5}{60} \text{ et } g(X^3) = g(X^4) = g(X^5) = 0.$$

On a alors

- $f \circ g(1) + g \circ f(1) = f\left(\frac{X^3}{3!}\right) + 0 = 1$.
- $f \circ g(X) + g \circ f(X) = f\left(\frac{X^4}{4!}\right) + 0 = X$.
- $f \circ g(X^2) + g \circ f(X^2) = f\left(\frac{X^5}{60}\right) + 0 = X^2$.
- $f \circ g(X^3) + g \circ f(X^3) = 0 + g(3!) = 3!g(1) = X^3$.
- $f \circ g(X^4) + g \circ f(X^4) = 0 + g(4!X) = 4!g(X) = X^4$.
- et $f \circ g(X^5) + g \circ f(X^5) = 0 + g(5 \times 4 \times 3X^2) = 60g(X^2) = X^5$.

On en déduit que pour tout $i \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$, $f \circ g(X^i) + g \circ f(X^i) = X^i$ donc, par linéarité de f et g , et comme $(1, X, X^2, X^3, X^4, X^5)$ est une base de $\mathbb{R}_5[X]$,

$$\forall P \in \mathbb{R}_5[X], f \circ g(P) + g \circ f(P) = P.$$

On a bien

$$f \circ g + g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}_5[X]}.$$