

Correction du TD n 20

Correction 1 1. $u_n = \frac{1}{n^2+n}$

On a $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ donc $\sum u_n$ converge.

2. $u_n = \frac{e^n}{n^5 + e^{-n}}$

On remarque que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ par le théorème de croissances comparées donc la série diverge grossièrement.

3. $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$

On a $n\sqrt{n}u_n = \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\sqrt{n}u_n = 0$ car $\cos$ est bornée. On en déduit, par comparaison à une série de Riemann, que $\sum u_n$ converge.

4. $u_n = \frac{1}{n+\ln(n)}$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ par le théorème de croissances comparées donc $u_n \sim \frac{1}{n}$. Par comparaison à la série harmonique, la série diverge.

5. $u_n = (-1)^n \cos \frac{n}{n+1}$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

6. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{\pi}{2n}$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2n} = 0$ donc $\sin \frac{\pi}{2n} \sim \frac{\pi}{2n}$. On en déduit que $u_n \sim \frac{\pi}{2n\sqrt{n}}$. Par comparaison à une série de Riemann, la série converge.

7. $u_n = \ln \left(1 - \frac{1}{n+2} \right)$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = 0$ donc $u_n \sim -\frac{1}{n+2} \sim -\frac{1}{n}$. Par comparaison à la série harmonique, la série diverge.

8. $u_n = \ln(\cos(1/2n))$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{2n} = 1$ donc $u_n \sim \cos \frac{1}{2n} - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$. Par comparaison à une série de Riemann, la série converge.

9. $u_n = \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$

On a $\sqrt[n]{n} = \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$. Par le théorème de croissances comparées, on a

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. On en déduit que $u_n \sim \frac{1}{n}$. Par comparaison à la série harmonique, la série diverge.

10. $u_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha$.

On écrit

$$\begin{aligned} u_n &= (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right)^\alpha \end{aligned}$$

On a $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ donc $u_n \sim \frac{1}{2^\alpha \sqrt{n}^\alpha}$. On sait que $\sqrt{n}^\alpha = n^{\alpha/2}$ donc, par comparaison à une série de Riemann :

- Si $\alpha > 2$, la série converge.
- Si $\alpha \leq 2$, la série diverge.

11. $u_n = n \ln n e^{-\sqrt{n}}$

Par le théorème de croissances comparées, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 0$. Par comparaison à une série de Riemann, la série converge.

12. $u_n = \left(\frac{1}{\ln 3n} \right)^n$

On écrit $u_n = \exp\left(n \ln \frac{1}{\ln(3n)}\right) = \exp(-n \ln \ln(3n))$. On va montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = 0$. On écrit :

$$\begin{aligned} n^2 u_n &= n^2 \exp(-n \ln \ln(3n)) \\ &= \underbrace{\frac{n^2}{(-n \ln \ln(3n))^2}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{(-n \ln \ln(3n))^2 \exp(-n \ln \ln(3n))}_{\rightarrow 0} \end{aligned}$$

la deuxième limite étant 0 grâce au théorème de croissances comparées. On en déduit que $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison à une série de Riemann, la série converge.

13. $u_n = \frac{e^{-2n} + n}{n^3 + 1}$

On a $u_n \sim \frac{1}{n^2}$. On en déduit, par comparaison à une série de Riemann, que

la série de terme général $\frac{e^{-2n}}{n^3}$ converge. Par le théorème de comparaison entre séries à termes positifs, on en déduit que $\sum u_n$ converge.

$$14. u_n = \frac{\cos(n^2) + n \sin(n)}{n^2 \sqrt{n}}$$

On a $|u_n| \leq \frac{1+n}{n^2 \sqrt{n}}$ et $\frac{n+1}{n \sqrt{n}} \sim \frac{1}{n \sqrt{n}}$. Par comparaison à une série de Riemann, la série de terme général $\frac{n+1}{n \sqrt{n}}$ est convergente. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum |u_n|$ converge. La série de terme général u_n est donc absolument convergente donc convergente.

$$15. u_n = \frac{1 + n \cos(n\pi)}{n^2}$$

On écrit $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}$. Ainsi, on a écrit u_n comme la somme de deux termes généraux de séries convergentes. On en déduit que $\sum u_n$ converge.

16. On va chercher un équivalent du terme général. On écrit :

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} &= \exp\left(\frac{1}{n} \ln(n+1)\right) - \exp\left(\frac{1}{n} \ln(n)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{n} \left(\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)\right) - \exp\left(\frac{1}{n} \ln(n)\right) \\ &= \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right) \left(\exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) - 1\right) \\ &= \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right) \left(\exp\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1\right) \\ &= \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right) \left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Par le théorème de croissances comparées, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{\ln n}{n}\right) = 1$ donc

$$\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Le terme général de la série est positif, par croissance de $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ et équivalent à $\frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. On peut donc affirmer que la série $\sum (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})$ converge.

17. On cherche un équivalent du terme général. On écrit :

$$\begin{aligned} \ln((n+1)(n+2)) &= \ln(n^2) + \ln\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right) \\ &= \ln(n^2) \left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{\ln(n^2)}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{\ln(n^2)} = 0 \text{ donc } \ln((n+1)(n+2)) \sim \ln(n^2).$$

On en déduit que :

$$\frac{\ln((n+1)(n+2))}{n(n+3)} \sim \frac{\ln(n^2)}{n^2}.$$

En multipliant cet équivalent par $n\sqrt{n}$, on trouve une limite nulle par croissances comparées. On en déduit que :

$$\frac{\ln((n+1)(n+2))}{n(n+3)} = o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum \frac{\ln((n+1)(n+2))}{n(n+3)}$ est donc convergente.

18. On a $\sqrt[n]{n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(n)\right) \rightarrow 1$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ par le théorème de croissances comparées. La série diverge donc grossièrement.

Correction 2 On écrit $\frac{u_n}{1+n^2 u_n} \leq \frac{u_n}{n^2 u_n}$ ainsi, la série à termes positifs $\sum \frac{u_n}{1+n^2 u_n}$ a son terme général majoré par $\frac{1}{n^2}$ donc, par comparaison à une série de Riemann, elle converge.

Correction 3 Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{u_n u_n} \leq \sqrt{u_n} \sqrt{u_{n-1}}$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{u_n u_{n-1}} \geq u_n.$$

Le terme général est positif et majoré par le terme général d'une série convergente donc la série $\sum u_n$ converge.

Correction 4 1. A partir d'un certain rang, $u_n \leq 1$ car $u_n \rightarrow 0$, on a donc $u_n^2 \leq u_n$. Par le thm de majoration des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum u_n^2$ converge.

2. On peut dire que $u_n \geq 0$ donc $\frac{u_n}{1+u_n} \leq u_n$ et par le thm de majoration des séries à termes positifs, $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge. On peut aussi dire que $u_n \rightarrow 0$ donc $\frac{1}{1+u_n} \sim u_n$ et par le thm de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge.
3. On sait que $u_n \rightarrow 0$ donc il existe un rang à partir duquel $u_n \leq \frac{1}{2}$, on a alors $1 - u_n \geq \frac{1}{2}$ donc $\frac{u_n}{1-u_n} \leq 2u_n$. Par le thm de majoration des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum \frac{1}{1-u_n}$ converge. On peut aussi dire que $u_n \rightarrow 0$ donc $\frac{1}{1-u_n} \sim u_n$ et par le thm de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \frac{u_n}{1-u_n}$ converge.
4. On sait que pour tout a, b , $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, on a donc $\frac{\sqrt{u_n}}{n} \leq \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2n^2}$. Les deux séries $\sum \frac{u_n}{2}$ et $\sum \frac{1}{2n^2}$ convergent donc par le thm de majoration des séries à termes positifs, $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

Correction 5 Pas grand chose, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et $\sum \frac{1}{n}$ diverge mais $\sum \frac{1}{n^4}$ converge et $\sum \frac{1}{n^2}$ aussi.

De même, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge. En revanche, $\sum \frac{(1+(-1)^n)^2}{n^2}$ converge mais $\sum (-1)^n \frac{1+(-1)^n}{n}$ diverge car c'est la somme d'une série convergente et d'une série divergente.

Correction 6 1. Pour tout $n \geq 2$, $u_n \geq 0$ donc $e^{-u_n} \leq 1$. Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2. On a $u_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-u_n} \sim \frac{1}{n}$ donc pour tout $n \geq 2$, $u_n \sim \frac{1}{n-1}$ puis $u_n \sim \frac{1}{n}$.

3. Par le thm de comparaison des séries à termes positifs, on a $\sum u_n$ divergente.

4. On pose $v_n = -u_n + \frac{1}{n-1}$. On écrit

$$\begin{aligned} v_n &= -\frac{1}{n-1} e^{-u_{n-1}} + \frac{1}{n-1} \\ &= \frac{1}{n-1} (1 - e^{-u_{n-1}}) \\ &\sim \frac{\frac{1}{n-1}}{\frac{n-1}{n-1}} \\ &\sim \frac{1}{(n-1)^2} \\ &\sim \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

On a bien l'équivalent souhaité.

5. D'après la question précédente, on a $\frac{1}{n-1} - u_n = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc

$$u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On a donc

$$u_{2n} - u_{2n-1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{(2n-1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc

$$u_{2n} - u_{2n-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n-2)} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{(2n-1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2(u_{2n} - u_{2n-1})$ existe et est finie. Ainsi, $u_{2n} - u_{2n-1} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

6. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k u_k$. Soit $N \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} S_{2N} &= \sum_{k=1}^{2N} (-1)^k u_k \\ &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2N \\ k \text{ pair}}} (-1)^k u_k + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2N \\ k \text{ impair}}} (-1)^k u_k \\ &= \sum_{j=1}^N u_{2j} - \sum_{j=1}^N u_{2j-1} \\ &= \sum_{j=1}^N (u_{2j} - u_{2j-1}) \end{aligned}$$

D'après la question précédente, et par le thm de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $u_{2j} - u_{2j-1}$ est convergente donc $(S_{2N})_{N \geq 1}$ converge vers une limite S . On sait que $S_{2N+1} = S_{2N} + u_{2N+1}$ donc la suite $(S_{2N+1})_{N \geq 0}$ est également convergente, de même limite que $(S_{2N})_{N \geq 1}$. On en déduit que la suite des sommes partielles de $\sum (-1)^n u_n$ converge donc la série est convergente.

Correction 7 Soit $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N v_n &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k u_k \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{n=k}^N \frac{k u_k}{n^2} \\ &= \sum_{k=1}^N k u_k \sum_{n=k}^N \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Soit $k \geq 1$, alors

$$k \sum_{n=k}^N \frac{1}{n^2} = \frac{1}{k} + k \sum_{n=k+1}^N \frac{1}{n^2}.$$

Or, pour tout $n \in [k+1, N]$, $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ donc

$$\sum_{n=k+1}^N \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=k+1}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{k}.$$

On a donc

$$k \sum_{n=k}^N \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{k} + 1 \leq 2.$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^N v_n \leq 2 \sum_{k=1}^N u_k.$$

On sait que la suite $\left(\sum_{k=1}^N u_k \right)_{N \geq 1}$ converge donc elle est majorée. La suite des sommes partielles de $\sum v_n$ est donc majorée et comme la série est de terme général positif, on en déduit qu'elle est convergente.

Correction 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n v_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=1}^k i u_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n \frac{i u_i}{k(k+1)} \\ &= \sum_{i=1}^n i u_i \sum_{k=i}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n i u_i \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n u_i - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i u_i \\ &= \sum_{i=1}^n u_i - n v_n \end{aligned}$$

Supposons tout d'abord que $\sum u_n$ converge, alors pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n v_k \leq \sum_{k=1}^n u_k$

donc la suite des sommes partielles de $\sum v_k$ est majorée. Comme c'est une série à termes positifs, elle converge.

Par ailleurs, on a l'égalité $\sum_{k=1}^n v_k + n v_n = \sum_{k=1}^n u_k$. Comme les deux séries convergent,

$(n v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite finie. Si elle vaut $l \neq 0$, on a $v_n \sim \frac{l}{n}$ ce qui est absurde puisque $\sum v_n$ converge. Ainsi $l = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n v_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k$ et les deux séries ont la même somme.

On suppose maintenant que $\sum u_n$ diverge et, par l'absurde, que $\sum v_n$ converge.

D'après l'égalité $\sum_{k=1}^n v_k + n v_n = \sum_{k=1}^n u_k$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} n v_n = +\infty$ donc, à partir d'un certain rang n_0 , on a $n v_n \geq 1$ ce qui implique $\sum v_n$ diverge. On a une contradiction donc $\sum v_n$ diverge et les séries ont bien même nature.

Correction 9 1. (a) On doit montrer que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont de monotonies opposées et que leur différence tend vers 0. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors On

a $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ donc

$$W_n = S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \text{ et } V_n = S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$$

Commençons par la monotonie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \\ &= \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout entier n , on en déduit que $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

On a aussi :

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= S_{2n+1} - S_{2n-1} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \\ &= \sum_{k=2n}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tout entier n , on en déduit que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} W_n - V_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n}} \end{aligned}$$

On a donc bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} (W_n - V_n) = 0$.

Ainsi, les suites $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

- (b) D'après la question précédente, les suites $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes donc elles convergent vers la même limite. On sait que $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge également vers cette limite.

Ainsi, la série de terme général $\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge.

2. (a) On a $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$ donc, comme $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$:

$$\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

- (b) D'après la question précédente, on sait que $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est le terme général d'une série convergente. On sait aussi, par divergence de la série harmonique, que $-\frac{1}{8n}$ est le terme général d'une série divergente. Enfin, par comparaison à une série de Riemann, $o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ est le terme général d'une série convergente et la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ est absolument convergente donc convergente.

On en déduit que la série de terme général $\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$ est divergente (comme somme de trois séries convergentes et d'une série divergente).

Il est très intéressant de remarquer que le terme général de la série est équivalent à $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série convergente !! Le théorème de comparaison des séries à termes positifs ne peut s'appliquer car l'équivalent n'est pas de signe constant.

Correction 10

Correction 11 On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} = 0$ donc on peut faire un DL :

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right) &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} - \frac{1}{2n(n+1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{2n(n+1)} \end{aligned}$$

Correction 12 On suppose que $\sum u_n$ converge et, par l'absurde, que $\sum v_n$ converge. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ donc $n^2 u_n \rightarrow +\infty$. On en déduit que $u_n v_n \sim \frac{1}{n^2}$ donc $\sqrt{u_n v_n} \sim \frac{1}{n}$. Or $\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2}$ donc c'est le terme général d'une série convergente alors que $\sum \frac{1}{n}$ diverge. On a une contradiction donc $\sum v_n$ diverge.

Si $\sum u_n$ diverge, on ne peut rien dire. Pour $u_n = 1$, $\sum v_n$ converge, pour $u_n = \frac{1}{n}$, $\sum u_n$ diverge.

Correction 13 On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$ On fait un DL, on obtient

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} \frac{1}{\sqrt{1 + (-1)^n/n^\alpha}} = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{2n^{3\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)$$

Le premier terme du DL est le terme général d'une série convergente (série alternée). On pose $v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}$. On a alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de même nature. Or $v_n \sim \frac{1}{n^{3\alpha/2}}$. Ainsi, $\sum u_n$ converge si et seulement si $3\alpha/2 > 1$ soit $\alpha > \frac{2}{3}$.

Correction 14 On écrit :

$$2^{n+1}3^{2-n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n-2}} = 18 \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

On reconnaît, à un facteur près, une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ avec $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$. La série converge et sa somme est :

$$18 \times \frac{1}{1 - 2/3} = 54.$$

Correction 15 On écrit :

$$\frac{3^{n-1}}{5^{n+1}} = \frac{1}{15} \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

La série est donc convergente car c'est un multiple d'une série géométrique de raison $\frac{3}{5}$. Sa somme vaut :

$$\frac{1}{15} \times \frac{1}{1 - 3/5} = \frac{1}{6}.$$

Correction 16 Son terme général est de signe constant négatif et il est équivalent à $-\frac{1}{n^2}$, elle est donc convergente par comparaison à une série de Riemann.

On écrit :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

On reconnaît une somme télescopique. Comme on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = 0,$$

la somme de la série est égale à son premier terme, c'est-à-dire $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$.

Correction 17 On multiplie le terme général par k^2 afin de savoir si c'est un $o\left(\frac{1}{k^2}\right)$. On a :

$$\frac{k^3}{(k+1)!} = \frac{1}{(k-2)!} \frac{k}{k-1} \frac{k}{k+1}$$

ce qui tend vers 0. On a donc :

$$\frac{k}{(k+1)!} = o\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

donc la série converge. Pour faire apparaître une somme télescopique, on écrit :

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k!} = 0$, la somme de la série est alors égale à $\frac{1}{0!} = 1$.

Correction 18 On peut réécrire cette série $\sum_{k \geq 1} k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$. On reconnaît alors la

série dérivée. On peut donc affirmer qu'elle converge d'après le cours puisque $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$.

De plus, on sait que sa somme est

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{4}.$$

Correction 19 On pose $a_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$. La série est alors de la forme $\sum a_k - a_{k+1}$. Elle converge donc si et seulement si la suite (a_k) converge ce qui est le cas (vers 0) et on a :

$$\sum_{k \geq 2} (a_k - a_{k+1}) = a_2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Correction 20 Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $1 = (k+1-k)^2 = (k+1)^2 -$

$2k(k+1) + k^2$ donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2(k+1)^2} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 1 - 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)\end{aligned}$$

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2 \frac{\pi^2}{6} - 3 = \frac{\pi^2}{3} - 3$.

Correction 21 On commence par remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \in]0, 1]$ donc

$$\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \in \{0, 1\}.$$

On aura $\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 1$ s'il existe un entier m tel que $\sqrt{n} < m \leq \sqrt{n+1}$. En élevant au carré, on obtient $0 < m^2 - n \leq 1$ donc $m^2 = n+1$.

Autrement dit, le terme général de la série est nul sauf lorsque $n+1$ est un carré.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{k} \rfloor}{k} = \sum_{1 \leq j^2 - 1 \leq n} \frac{1}{j^2 - 1} = \sum_{j=2}^{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor} \frac{1}{j^2 - 1}$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{j=2}^N \frac{1}{j^2 - 1} = \sum_{j=2}^N \frac{1}{(j-1)(j+1)} = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^N \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j+1} \right)$$

puis, après un changement d'indice dans les deux sommes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=2}^{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor} \frac{1}{j^2 - 1} = \frac{3}{4}$.

Correction 22 1. Pour $n \neq 0$, $\frac{nx^n}{n!} = \frac{x^n}{(n-1)!}$. Ainsi, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^N \frac{nx^n}{n!} &= \sum_{n=1}^N \frac{x^n}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^{n+1}}{n!} \\ &= x \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

La série est donc convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$, par convergence de la série exponentielle et sa somme vaut xe^x .

2. On procède de même, pour $n \geq 2$, on a $\frac{n(n-1)x^n}{n!} = \frac{x^n}{(n-2)!}$ donc pour tout $N \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^N \frac{n(n-1)x^n}{n!} &= \sum_{n=2}^N \frac{x^n}{(n-2)!} \\ &= \sum_{n=0}^{N-2} \frac{x^{n+2}}{n!} \\ &= x^2 \sum_{n=0}^{N-2} \frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

La série est donc convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$, par convergence de la série exponentielle et sa somme vaut $x^2 e^x$.

3. Soit $P = aX^2 + bX + c$, alors $P = aX(X-1) + (b+a)X + c$ donc la série de terme général $P(n) \frac{x^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $(ax^2 + (b+a)x + c)e^x$.

4. Dans le cas général d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il faut déterminer ses coordonnées dans la base $(1, X, X(X-1), \dots, X(X-1) \dots (X-n+1))$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Si on les note $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$, on a alors que la série de terme général $P(n) \frac{x^n}{n!}$ est convergente et a pour somme $\left(\sum_{k=0}^n \lambda_k x^k \right) e^x$.