Lycée du Parc
PCSI 842
DS 8

Année 2023-2024

Devoir surveillé 8, sujet 2 .

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1.

Si g est une fonction continue sur $]a, b]$, prolongeable par continuité en a, on note $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ l'intégrale de son prolongement continu. Autrement dit, l'intégrale $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ existe si g est prolongeable par continuité en a.

Nous admettons le résultat suivant:

Si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_a^b f(t)\cos(xt)dt = \lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_a^b f(t)\sin(xt)dt = 0.$

Pour tout entier naturel n, on pose $J_n = \int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\sin(nt)}{\sin t} dt.$

1. (a) Justifier l'existence de J_n.
   (b) Calculer J_0, J_1, J_2, J_3.
2. (a) Si a et b sont deux réels, factoriser $\sin a - \sin b$.
   (b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, exprimer $J_n - J_{n-2}$ en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} J_{2N+1} = \dfrac{\pi}{2}, \\ J_{2N} = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}. \end{cases}$
3. (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} (J_n - J_{n-1}) = 0$.
   (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = \dfrac{\pi}{2}$.
4. Déduire des résultats précédents l'égalité: $\boxed{\pi = \lim\limits_{N\to\infty} 4\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}.}$
5. On définit l'application $g : t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$

   Montrer que g est C^1.

6. (a) Déterminer $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(nt)}{\sin t}dt-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(nt)}{t}dt\right)$.

   (b) En déduire $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(nt)}{t}dt$.

   (c) A l'aide d'un changement de variable, déterminer $\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi/2}\frac{\sin(t)}{t}dt$.

7. (a) Montrer que pour tout réel strictement positif x on a:

$$\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\frac{1-\cos x}{x}+\int_0^x\frac{1-\cos t}{t^2}dt.$$

   Vous penserez à prouver que la deuxième intégrale existe.

   (b) Montrer que la fonction : $\begin{cases}\mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \int_0^x\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{cases}$ est croissante, majorée, et qu'elle admet en $+\infty$ une limite réelle, après avoir prouvé (dur) que $\int_1^x\frac{1-\cos t}{t^2}dt\leqslant 2$ pour tout $x\geqslant 1$.

   (c) En déduire que la fonction : $\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ admet en $+\infty$ une limite réelle.

   (d) Que vaut $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$?

Exercice 2.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}^\star$, soit F,G deux sous-espaces vectoriels de E. On note $d_n(F,G)=(\dim(F+G))^2+(\dim(F\cap G))^2-(\dim(F))^2-(\dim(G))^2$.

On veut prouver que

$$\begin{cases}0\leqslant d_n(F,G)\leqslant\dfrac{n^2}{2} & \text{si } n \text{ est pair}\\ 0\leqslant d_n(F,G)\leqslant\dfrac{n^2-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$$

On souhaite également montrer que ces inégalités peuvent être atteintes.

Partie A: étude d'exemples

1. On suppose $F\oplus G=E$. Exprimer $d_n(F,G)$ en fonction de $\dim(F)$ et $\dim(G)$.

2. Dans toute cette question, $E=\mathbb{R}^4$. Soit $u=(1,1,0,0)$, $v=(0,0,1,1)$ et $F=\mathrm{Vect}\,(u,v)$.

   (a) Déterminer une base et la dimension de F.

   (b) Soit $G=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4, x-y+z=0=4x-3y+2z+t=2x-y+t\}$. Montrer que G est un sous-ev de $\mathbb{R}^3$, en déterminer une base et la dimension.

   (c) Montrer que $F\oplus G=\mathbb{R}^4$.

(d) A-t-on $d_4(A,B) < \dfrac{4^2}{2}$ pour tout ssev A, B de $\mathbb{R}^4$?

3. Dans cette question, on suppose $E = \mathbb{R}_4[X]$, $F = \{P \in E, P(0) = P'(0) = P"(0) = 0\}$ et $G = \{P \in E, P(1) = P'(1) = 0\}$.

   (a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, en déterminer une base et la dimension.

   (b) Montrer que $F \oplus G = E$.

   (c) Existe-t-il deux sous-espaces vectoriels A, B de E tels que $d_5(A,B) = \dfrac{5^2-1}{2}$?

4. Dans cette question, $E = M_3(\mathbb{R})$. On note $S_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E et $T_3^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de E.

   (a) Montrer que $S_3(\mathbb{R})$ et $T_3^+(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E, en déterminer une base et la dimension.

   (b) Déterminer $S_3(\mathbb{R}) \cap T_3^+(\mathbb{R})$.

   (c) Montrer que $S_3(\mathbb{R}) + T_3^+(\mathbb{R}) = E$.

   (d) Si on note $n = \dim(E)$, vérifier que $d_n(S_3(\mathbb{R}), T_3^+(\mathbb{R})$ satisfait bien l'inégalité attendue.

Partie B: Cas général.

E est de nouveau quelconque, on note $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^\star$ et $\dim(F) = k$.

5. Montrer que $d_n(F,G) = 2\left(\dim(F) - \dim(F \cap G)\right)\left(\dim(G) - \dim(F \cap G)\right)$.

6. En déduire que $d_n(F,G) \geqslant 0$.

7. Montrer que $d_n(F,G) = 0 \Leftrightarrow (F \subset G \text{ ou } G \subset F)$.

8. Démontrer que $\dim(F \cap G) \geqslant \dim(F) + \dim(G) - n$.

9. En déduire que $d_n(F,G) \leqslant 2k(n-k)$.

10. Étudier et tracer la fonction définie sur $[0,1]$ par $\varphi(t) = 2t(1-t)$.

11. On suppose dans cette question que n est pair.

    (a) Montrer que $d_n(F,G) \leqslant \dfrac{n^2}{2}$.

    (b) Démontrer que $d_n(F,G) = \dfrac{n^2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} F \oplus G = E \\ 2\dim(F) = n \end{cases}$

    (c) Justifier qu'il existe deux-sous-espaces vectoriels A, B de E tels que $d_n(A,B) = \dfrac{n^2}{2}$.

12. Déterminer la valeur maximale prise par d_n lorsque n est impair.

Exercice 3.

Dans tout ce problème, l'entier n est supérieur ou égal à 1 ($n \geqslant 1$) ; E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. Le but de ce problème est d'étudier les applications semi-linéaires de l'espace vectoriel complexe E dans lui-même.

- Une application u de E dans lui-même est dite semi-linéaire si et seulement si elle possède la propriété suivante :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, u(\lambda x + \mu y) = \overline{\lambda} u(x) + \overline{\mu} u(y),$$

où le nombre complexe $\overline{\lambda}$ (resp. $\overline{\mu}$) est le nombre complexe conjugué de λ (resp. μ).

- On dit qu'un nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u si et seulement s'il existe un vecteur x différent de 0_E tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$u(x) = \mu x.$$

On dit que le vecteur x est un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre μ.

Partie 1:

Le but de cette partie est d'étudier, pour une application semi-linéaire u donnée, les valeurs et vecteurs co-propres.
Soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E.

1. Démontrer qu'étant donné un vecteur x différent de 0_E, appartenant à l'espace E, il existe au plus un nombre complexe μ tel que $u(x) = \mu x$.
2. Démontrer que, si le nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u, pour tout réel θ, le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore valeur co-propre de l'application semi-linéaire u.
On exprimera un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre $\mu e^{i\theta}$ en fonction d'un vecteur co-propre x associé à la valeur co-propre μ et du réel θ.
3. Étant donnée une valeur co-propre μ de l'application semi-linéaire u, soit E_μ l'ensemble des vecteurs x de l'espace vectoriel E qui vérifient la relation $u(x) = \mu x$:
$$E_\mu = \{x \in E \;/\; u(x) = \mu x\}.$$
Est-ce que l'ensemble E_μ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel? un $\mathbb{R}$-espace vectoriel?
4. Étant données deux applications semi-linéaires u et v, montrer que $u \circ v$ est une application linéaire.
5. Etude d'un exemple:
On considère l'application suivante:
$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (i\bar{x} + \bar{y}, i\bar{y}) \end{array} \right. .$$
   (a) Montrer que u est semi-linéaire.
   (b) Montrer que 1 est une valeur co-propre de u et déterminer un vecteur co-propre associé à 1.

Partie 2:

Soit u une application semi-linéaire sur E.
Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base de E.
Soit $x \in E$ et soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
On pose:

$$\varphi(x) = u(\sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} e_i).$$

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

   Soit ψ l'application linéaire définie par:

   $$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \psi(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\mu_{i,j}} e_j,$$

   où $(\mu_{i,1}, \dots, \mu_{i,n})$ sont les coordonnées de $u(e_i)$ dans $\mathcal{B}$.

2. Montrer que $\varphi \circ \psi = u \circ u$.

3. Montrer que si μ est une valeur co-propre de u, alors:

   $$\ker(\varphi \circ \psi - |\mu|^2 Id_E) \neq \{0_E\}.$$

Correction du DS n 8

Exercice 1 1. (a) *Justifier l'existence de J_n.*

$t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{\sin t}$ est continue sur $]0, \pi/2]$, et en 0, puisque $\sin u \sim u$ quand $u \to 0$, elle tend vers n, et donc est prolongeable par continuité en ce point. J_n existe donc.

(b) *Calculer J_0, J_1, J_2, J_3.*

$J_0 = 0, J_1 = \pi/2, J_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\cos t dt = 2$, et $J_3 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\cos(2t) + 1 = \pi/2$,

car $\dfrac{\sin(3t)}{\sin t} = \dfrac{\sin(2t)\cos(t)}{\sin t} + \cos(2t) = 2\cos^2(t) + \cos(2t) = 2\cos(2t) + 1$

2. (a) *Si a et b sont deux réels, factoriser $\sin a - \sin b$.*

$\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$.

Pour la retrouver, le plus simple est de passer par la factorisation par l'arc moitié:

$$e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{\frac{i(a+b)}{2}},$$

et

$$\sin(a) - \sin(b) = \mathcal{I}m\left(e^{ia} - e^{ib}\right) = \mathcal{I}m\left(2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{\frac{i(a+b)}{2}}\right) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

(b) *Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, exprimer $J_n - J_{n-2}$ en fonction de n.*

$$\begin{aligned} J_n - J_{n-2} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt) - \sin\big((n-2)t\big)}{\sin t} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 2\frac{\cos\big((n-1)t\big)\sin t}{\sin t} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 2\cos\big((n-1)t\big) dt = \boxed{2\frac{\sin\big[(n-1)\pi/2\big]}{n-1}}. \end{aligned}$$

(c) *En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,* $\begin{cases} J_{2N+1} = \dfrac{\pi}{2}, \\ J_{2N} = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{2n+1}. (*) \end{cases}$

Posons $n = 2N+1$ dans l'égalité précédente : $J_{2N+1} - J_{2N-1} = 2\dfrac{\sin\big[(2N)\pi/2\big]}{2N} = 0$, donc pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $J_{2N+1} = J_{2N-1}$, ce qui signifie que la sous-suite de (J_n) formée des éléments d'indice impair est une suite constante. Puisque son premier terme est $\pi/2$, on obtient la première égalité voulue.

Posons maintenant $n = 2N$. Alors $J_{2N} - J_{2N-2} = 2\dfrac{\sin\big[(2N-1)\pi/2\big]}{2N-1} = 2\dfrac{-\cos(N\pi)}{2N-1} = 2\dfrac{(-1)^{N-1}}{2N-1} (\sharp)$.

Montrons donc la récurrence $(*)$: pour $N=1$, nous avons calculé que $J_2=2$, et $2\sum_{n=0}^{1-1}\frac{(-1)^n}{2n+1}=2$, donc l'initialisation est vérifiée. Supposons alors que pour un entier N, on ait $J_{2(N-1)}=2\sum_{n=0}^{N-2}\frac{(-1)^n}{2n+1}$. La formule de récurrence $(\sharp)$ nous donne alors

$$J_{2N}=J_{2N-2}+2\frac{(-1)^{N-1}}{2N-1}=2\sum_{n=0}^{N-2}\frac{(-1)^n}{2n+1}+2\frac{(-1)^{N-1}}{2N-1}=2\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

3. (a) *Montrer que* $\lim_{n\to\infty}(J_n-J_{n-1})=0$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}J_n-J_{n-1} &= \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(nt)-\sin\big((n-1)t\big)}{\sin t}\,\mathrm{d}t\\ &= 20\pi/2t\frac{\cos\big((2n-1)t/2\big)\sin(t/2)}{\sin t}\\ &= \int_0^{\pi/2}\frac{\cos\big((2n-1)t/2\big)}{\cos(t/2)}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

où $f:t\in[0,\pi/2]\mapsto 1/\cos(t/2)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le rappel au début de cette partie, $\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(xt)}{\cos(t/2)}\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 en $+\infty$, donc d'après la caractérisation séquentielle des limites, on a $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\big((2n-1)t/2\big)}{\cos(t/2)}\,\mathrm{d}t=0$.

(b) *En déduire que* $\lim_{n\to\infty}J_n=\frac{\pi}{2}$.

Nous avons déjà prouvé que $(I_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ tendait vers $\pi/2$. Il suffit donc de prouver que la sous-suite (I_{2N}) tend aussi vers $\pi/2$. Or, cette suite s'écrit $I_{2N}=\big(I_{2N}-I_{2N-1}\big)+\big(I_{2N-1}\big)$, i.e comme la somme de deux suites, l'une tendant vers 0 (d'après 6.a)) et l'autre vers $\pi/2$.

4. *Déduire des résultats précédents l'égalité:* $\boxed{\pi=\lim_{N\to\infty}4\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}.}$

D'après les question 5.c) et 6.b), $\lim_{N\to\infty}4\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}=2\lim_{N\to\infty}J_{2N+2}=\pi$.

5. *On définit l'application* $g:t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\mapsto\begin{cases}\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t} & \textit{si } t\neq 0,\\ 0 & \textit{si } t=0.\end{cases}$

Montrer que g *est* C^1.

D'après les théorèmes généraux, sin ne s'annulant qu'en 0, cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi/2]$. De plus, $g(t)=\frac{t-\sin(t)}{t\sin(t)}\sim\frac{t-\sin(t)}{t^2}=\frac{t^3/6+o(t^3)}{t^2}\sim t/6$, donc g est bien continue en 0. Le DL de sin a été obtenu en lui appliquant la formule de Taylor-Young en 0, dont le développement nous est bien connu.

Il reste à prouver qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0, ce qui, d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, est une conséquence de l'existence d'une limite finie en O de g'.

Or, pour tout $t > 0, g'(t) = \dfrac{\sin^2(t) - t^2\cos(t)}{t^2\sin^2 t} \sim \dfrac{\sin^2(t) - t^2\cos(t)}{t^4}$ quand t tend vers 0. Utilisons les DL en 0 pour obtenir un équivalent du numérateur :

$$\begin{aligned}
\sin^2(t) - t^2\cos(t) &= (t - t^3/6 + o(t^3))^2 - t^2(1 - t^2/2 + o(t^2)) \\
&= t^2(1 - t^2/6 + o(t^2))^2 - t^2(1 - t^2/2 + o(t^2)) \\
&= t^2(1 - 2t^2/6 + o(t^2)) - t^2 + t^4/2 + o(t^4)) \\
&\quad \text{car quand } u \to 0, (1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + o(u), \\
&= t^4/6 + o(t^4).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{t\to 0} g'(t) = \dfrac{1}{6}$. Par le thm de la limite de la dérivée, on en déduit que g est C^1 (et que $g'(0) = \dfrac{1}{6}$).

6. (a) *Déterminer* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin t} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t} dt \right)$.

   On remarque que la suite dont on nous demande la limite est $\left(\int_0^{\pi/2} g(t)\sin(nt)dt \right)_{n\in\mathbb{N}}$. Puisque g est $\mathcal{C}^1$, nous savons que cette limite est nulle.

   (b) *En déduire* $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t} dt$.

   $$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t} dt = -\int_0^{\pi/2} g(t)\sin(nt)dt + J_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\frac{\pi}{2}} \text{ d'après les questions 9.a) et 6.b).}$$

   (c) *A l'aide d'un changement de variable, déterminer* $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^{n\pi/2} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

   On pose le changement de variable affine $nu = t$:

   $$\int_0^{n\pi/2} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nu)}{nu} ndu = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nu)}{u} du \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\frac{\pi}{2}},$$

   d'après 9.b).

7. (a) *Montrer que pour tout réel strictement positif x on a:*

   $$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1-\cos x}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt.$$

   La deuxième intégrale existe car la fonction intégrée est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1/2 d'après les équivalents usuels. Effectuons une IPP en intégrant $t \mapsto 1/t^2$:

   $$\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt = \left[-\frac{1-\cos t}{t} \right]_0^x + \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{1-\cos x}{x} + \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

(b) *Montrer que la fonction* $H : x \geqslant 0 \mapsto \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt$ *est croissante, majorée, et qu'elle admet en* $+\infty$ *une limite réelle, après avoir prouvé (dur) que* $\int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt \leqslant 2$ *pour tout* $x \geqslant 1$.

▷ La fonction est croissante car $\forall 0 < x < y, H(y) - H(x) = \int_x^y \frac{1-\cos t}{t^2} dt > 0$ comme intégrale d'une fonction positive.

▷ Pour tout $x \geqslant 2$, $\left| \int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt \right| \leqslant \int_1^x \left| \frac{1-\cos t}{t^2} \right| dt \leqslant \int_1^x \frac{2}{t^2} dt = \left[-\frac{2}{t} \right]_1^x = 2 - \frac{2}{x} \leqslant 2.$

▷ D'après la relation de Chasles, pour tout $x \geqslant 1, H(x)$ est donc majorée par le réel $\int_0^1 \frac{1-\cos t}{t^2} dt + 2.$

H admet donc bien une limite réelle en $= \infty$.

(c) *En déduire que la fonction* $x \geqslant 0 \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ *admet en* $+\infty$ *une limite réelle.*

Il suffit d'utiliser l'égalité obtenue en 10.a) et de remarquer que $x \mapsto \frac{1-\cos x}{x}$ admet une limite finie en $+\infty$.

(d) *Que vaut* $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ *?*

Notons $\psi : x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. Nous venons de prouver que sa limite existait. D'après la caractérisation séquentielle des limites, celle-ci ne peut être que $\lim_{n \to +\infty} \psi\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, qui vaut $\frac{\pi}{2}$ d'après la question 9.c).

Exercice 2 **Partie A**: étude d'exemples

1. *On suppose* $F \oplus G = E$. *Exprimer* $d_n(F, G)$ *en fonction de* $dim(F)$ *et* $dim(G)$.
   On sait que $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$ donc

$$d_n(F, G) = (\dim(F) + \dim(F))^2 + 0 - \dim(F)^2 - \dim(G)^2 = 2\dim(F)\dim(G).$$

2. *Dans toute cette question,* $E = \mathbb{R}^4$. *Soit* $u = (1, 1, 0, 0)$, $v = (0, 0, 1, 1)$ *et* $F = Vect(u, v)$.

   (a) *Déterminer une base et la dimension de* F.
   Les deux vecteurs u et v sont non colinéaires, ils forment donc une base de F qui est, par conséquent, de dimension 2.

   (b) *Soit* $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - y + z = 0 = 4x - 3y + 2z + t = 2x - y + t\}$. *Montrer que* G *est un sous-ev de* $\mathbb{R}^3$, *en déterminer une base et la dimension.*

Soit $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on raisonne par équivalence:

$$\begin{aligned}
X \in G \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z & = 0 \\ 4x - 3y + 2z + t & = 0 \\ 2x - y + t & = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z & = 0 \\ 2x - y + t & = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 - L3 \\
&\begin{cases} z & = -x + y \\ t & = -2x + y \end{cases} \\
&\Leftrightarrow X = (x, y, -x + y, -2x + y) \\
&\Leftrightarrow X \in \text{Vect}\left((1, 0, -1, -2), (0, 1, 1, 1)\right)
\end{aligned}$$

On a montré que $G = \text{Vect}\left((1, 0, -1, -2), (0, 1, 1, 1)\right)$ donc G est un ssev de $\mathbb{R}^4$. La famille $\left((1, 0, -1, -2), (0, 1, 1, 1)\right)$ est libre car les deux vecteurs qui la composent sont non colinéaires, on en déduit que G est de dimension 2.

(c) *Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.*
Montrons que la somme est directe. Soit donc $(x, x, z, z) \in F \cap G$, alors

$$\begin{cases} x - x + z & = 0 \\ 4x - 3x + 2z + z & = 0 \\ 2x - x + z & = 0 \end{cases}$$

donc $z = 0$ puis $x = 0$. Ainsi, $F \cap G \subset \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et l'autre inclusion est évidente. La somme est donc bien directe. Comme $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, on a $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

(d) *A-t-on $d_4(A, B) < \dfrac{4^2}{2}$ pour tout ssev A, B de $\mathbb{R}^4$?*

Dans l'exemple précédent, on a $d_n(F, G) = 8 = \dfrac{4^2}{2}$, l'inégalité n'est donc pas toujours stricte.

3. *Dans cette question, on suppose $E = \mathbb{R}_4[X]$, $F = \{P \in E, P(0) = P'(0) = P"(0) = 0\}$ et $G = \{P \in E, P(1) = P'(1) = 0\}$.*

(a) *Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, en déterminer une base et la dimension.*
Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$, alors

$$P \in F \Leftrightarrow X^3 | P \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P(X) = X^3(aX + b) \Leftrightarrow P \in \text{Vect}(X^3, X^4)$$

Ainsi, $F = \text{Vect}(X^3, X^4)$ donc F est bien un ssev de $\mathbb{R}_4[X]$. La famille (X^3, X^4) est libre car les polynômes sont non nuls de degrés distincts. On en déduit que F est de dimension 2.
De même,

$$P \in G \Leftrightarrow (X-1)^2 | P \Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, P = (X-1)^2(aX^2 + bX + c) \Leftrightarrow P \in \text{Vect}\Big((X-1)^2, X(X-$$

La famille $\left((X-1)^2, X(X-1)^2, X^2(X-1)^2\right)$ est libre car les polynômes sont non nuls de degrés distincts. On en déduit que G est de dimension 3.

(b) *Montrer que $F \oplus G = E$.*

On va montrer que la somme est directe. Soit donc $P \in F \cap G$. Alors 0 est racine de P de multiplicité au moins 3 et 1 est racine de P de multiplicité au moins 2. On en déduit que $X^3(X-1)^2$ divise P. Or $P \in \mathbb{R}_4[X]$, ceci implique $P = 0$.
La somme est donc directe et $\dim(F) + \dim(G) = 5 = \dim(\mathbb{R}_4[X])$ donc $F \oplus G = E$.

(c) *Existe-t-il deux sous-espaces vectoriels A, B de E tels que $d_5(A, B) = \dfrac{5^2-1}{2}$?*

Dans l'exemple précédent, on a $d_n(F, G) = 12 = \dfrac{5^2-1}{2}$.

4. *Dans cette question, $E = M_3(\mathbb{R})$. On note $S_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E et $T_3^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de E.*

   (a) *Montrer que $S_3(\mathbb{R})$ et $T_3^+(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E, en déterminer une base et la dimension.*

   Soit $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned} A \in S_3(\mathbb{R}) \quad & \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2, a_{ij} = a_{ji} \\ & \Leftrightarrow A = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} a_{ij}(E_{ij} + E_{ji}) \\ & \Leftrightarrow A \in \mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, E_{23} + E_{32}\right) \end{aligned}$$

   On a donc $S_3(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, E_{23} + E_{32}\right)$ donc $S_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. De plus, la famille $(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, E_{23} + E_{32})$ est libre car les coefficients dans la combinaison linéaire de cette famille sont unique. On en déduit que c'est une base de $S_3(\mathbb{R})$ qui est donc de dimension 6.

   Par ailleurs,

$$\begin{aligned} A \in T_3^+(\mathbb{R}) \quad & \Leftrightarrow \forall i > j, a_{ij} = 0 \\ & \Leftrightarrow a_{11}E_{11} + a_{22}E_{22} + a_{33}E_{33} + a_{12}E_{12} + a_{13}E_{13} + a_{23}E_{23} \\ & \Leftrightarrow A \in \mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}, E_{13}, E_{23}\right) \end{aligned}$$

   On a donc $T_3^+(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}, E_{13}, E_{23}\right)$ donc $T_3^+(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. De plus, la famille $(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}, E_{13}, E_{23})$ est libre car les coefficients dans la combinaison linéaire de cette famille sont unique. On en déduit que c'est une base de $T_3^+(\mathbb{R})$ qui est donc de dimension 6.

   (b) *Déterminer $S_3(\mathbb{R}) \cap T_3^+(\mathbb{R})$.*
   Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$, alors

$$A \in S_3(\mathbb{R}) \cap T_3^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A \text{ diagonale.}$$

   On a donc

$$S_3(\mathbb{R}) \cap T_3(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{22}, E_{33}\right).$$

   (c) *Montrer que $S_3(\mathbb{R}) + T_3^+(\mathbb{R}) = E$.*
   On considère la concaténation d'une base de $S_3(\mathbb{R})$ et d'une base de $T_3^+(\mathbb{R})$, montrons qu'elle est génératrice de $M_3(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, E_{23} + E_{32}, E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}, E_{13}, E_{23}\right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{22}\right.$$

en enlevant les

$$= \mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{22}\right.$$

en enlevant les

   On reconnaît alors la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$, la famille est donc bien génératrice de $M_3(\mathbb{R})$ donc $S_3(\mathbb{R}) + T_3^+(\mathbb{R}) = M_3(\mathbb{R})$.

(d) *Si on note $n = dim(E)$, vérifier que $d_n(S_3(\mathbb{R}), T_3^+(\mathbb{R})$ satisfait bien l'inégalité attendue.*

c'était inégalité et pas égalité (my mistake !).

On a $\dim(S_3(\mathbb{R}) + T_3^+(\mathbb{R})) = 9$ et $\dim(S_3(\mathbb{R}) \cap T_3^+(\mathbb{R})) = 3$ donc

$$d_n(S_3(\mathbb{R}), T_3^+(\mathbb{R})) = 9^3 + 3^2 - 6^2 - 6^2 = 90 - 72 = 18 \leqslant \frac{9^2 - 1}{2}$$

On a donc bien l'INégalité attendue.

Partie B: Cas général.

E est de nouveau quelconque, on note $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^\star$ et $\dim(F) = k$.

5. *Montrer que $d_n(F, G) = 2\,(dim(F) - dim(F \cap G))\,(dim(G) - dim(F \cap G))$.*
D'après la formule de Grassman, on a $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ donc

$$\begin{aligned} d_n(F, G) &= (\dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G))^2 + \dim(F \cap G)^2 - \dim(F)^2 - \dim(G)^2 \\ &= 2\dim(F \cap G)^2 - 2\dim(F)\dim(F \cap G) - 2\dim(G)\dim(F \cap G) + 2\dim(F)\dim(G) \\ &= 2\,(\dim(F) - \dim(F \cap G))\,(\dim(G) - \dim(F \cap G)) \end{aligned}$$

On a bien l'égalité souhaitée.

6. *En déduire que $d_n(F, G) \geqslant 0$.*
$F \cap G$ est un ssev de F et de G, il est donc de dimension inférieure ou égale. Les deux termes du produit sont positifs, $d_n(F, G)$ est donc positif.

7. *Montrer que $d_n(F, G) = 0 \Leftrightarrow (F \subset G$ ou $G \subset F)$.*
D'après la factorisation, on a

$$\begin{aligned} d_n(F, G) = 0 &\Leftrightarrow \dim(F) = \dim(F \cap G) \text{ ou } \dim(G) = \dim(F \cap G) \\ &\Leftrightarrow F = F \cap G \text{ ou } G = F \cap G \\ &\ \text{ car on a } F \cap G \subset F \text{ et } F \cap G \subset G \\ &= G \subset F \text{ ou } F \subset G \end{aligned}$$

On a donc bien l'équivalence.

8. *Démontrer que $dim(F \cap G) \geqslant dim(F) + dim(G) - n$.*
On a $\dim(F + G) \leqslant n$ donc, d'après la formule de Grassman,

$$\dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \leqslant n,$$

puis

$$\dim(F \cap G) \geqslant \dim(F) + \dim(G) - n.$$

9. *En déduire que $d_n(F, G) \leqslant 2k(n - k)$.*
On a $\dim(F) - \dim(F \cap G) \leqslant \dim(F)$ et $\dim(G) - \dim(F \cap G) \leqslant n - \dim(F)$, on en déduit, comme $\dim(F) = k$, que

$$d_n(F, G) \leqslant 2k(n - k).$$

10. *Étudier et tracer la fonction définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(t) = 2t(1 - t)$.*

φ est dérivable sur $[0, 1]$, de dérivée $t \mapsto 2-4t^2$, on a donc

x	0		$\frac{1}{2}$		
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	
φ		$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	

11. *On suppose dans cette question que n est pair.*

(a) *Montrer que $d_n(F,G) \leqslant \dfrac{n^2}{2}$.*
On a
$$d_n(F,G) \leqslant 2k(n-k) = n^2\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \frac{n^2}{2},$$
car φ est majorée par 2. On a donc bien l'inégalité souhaitée.

(b) *Démontrer que $d_n(F,G) = \dfrac{n^2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} F \oplus G = E \\ 2\dim(F) = n \end{cases}$*

D'après le travail précédent, on a

$$\begin{aligned} d_n(F,G) = \frac{n^2}{2} \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} \dim(F) - \dim(F\cap G) = \dim(F) \\ \dim(G) - \dim(F\cap G) = n - \dim(F) \\ \varphi\left(\dfrac{k}{n}\right) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} F\cap G = \{0_E\} \\ \dim(G) + \dim(F) = n \\ \dfrac{k}{n} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} F \oplus G = E \\ 2\dim(F) = n \end{cases} \end{aligned}$$

On a bien l'équivalence souhaitée.

(c) *Justifier qu'il existe deux-sous-espaces vectoriels A, B de E tels que $d_n(A,B) = \dfrac{n^2}{2}$.*
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, on pose $A = \mathrm{Vect}\left(e_1, \ldots, e_{n/2}\right)$ et $B = \mathrm{Vect}\left(e_{n/2+1}, \ldots, e_n\right)$.
On a alors $A \oplus B = E$ donc, d'après la question précédente, $d_n(A,B) = \dfrac{n^2}{2}$.

12. *Déterminer la valeur maximale prise par d_n lorsque n est impair.*
On suppose $n = 2p+1$. On sait déjà que $d_n(F,G) \leqslant \dfrac{n^2}{2}$ par le travail précédent. Or $d_n(F,G)$ est un entier, on obtient donc
$$d_n(F,G) \leqslant \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor,$$
et
$$\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4p^2+4p+1}{2} \right\rfloor = 2p^2 + 2p = \frac{n^2-1}{2}.$$
On a donc $d_n(F,G) \leqslant \dfrac{n^2-1}{2}$. Reste à savoir si cette valeur est bien le maximum.
Si $\dim(F) = p$ et $\dim(G) = p+1$ avec $F \cap G = \{0_E\}$ (et donc $F \oplus G = E$), alors $d_n(F,G) = 2p(p+1)$ d'après la première question, ce qui est égal à $\dfrac{n^2-1}{2}$. Il suffit donc de considérer deux tels ssev de E. Pour les construire, on peut considérer une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et poser $F = \mathrm{Vect}\left(e_1, \ldots, e_p\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(e_{p+1}, \ldots, e_n\right)$.

Exercice 3 1. *Démontrer qu'étant donné un vecteur x différent de 0, appartenant à l'espace E, il existe au plus un nombre complexe μ tel que $u(x) = \mu x$.*
On suppose qu'il existe μ et μ' tels que $u(x) = \mu x = \mu' x$ donc $(\mu - \mu')x = 0$. Comme x n'est pas le vecteur nul, on a nécessairement $\mu = \mu'$.

2. *Démontrer que, si le nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u, pour tout réel θ, le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore valeur co-propre de l'application semi-linéaire u.*
   On exprimera un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre $\mu e^{i\theta}$ en fonction d'un vecteur co-propre x associé à la valeur co-propre μ et du réel θ.
   Soit x un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre μ. Comme $u(x) = \mu x$, alors $u(e^{-i\frac{\theta}{2}}x) = \overline{e^{-i\frac{\theta}{2}}}u(x) = e^{i\frac{\theta}{2}}u(x) = e^{i\theta}\mu e^{-i\frac{\theta}{2}}x$; ainsi $\boxed{\mathbf{e^{-i\frac{\theta}{2}}x}}$ est un vecteur co-propre (il est bien non nul puisque x l'est) associé à la valeur co-propre $e^{i\theta}\mu$.

3. *Étant donnée une valeur co-propre μ de l'application semi-linéaire u, soit E_μ l'ensemble des vecteurs x de l'espace vectoriel E qui vérifient la relation $u(x) = \mu x$:*
   $$E_\mu = \{x \in E \;/\; u(x) = \mu x\}.$$
   Est-ce que l'ensemble E_μ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel? un $\mathbb{R}$-espace vectoriel? Le vecteur nul appartient bien à E_μ. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et $(x, y) \in E_\mu^2$. Alors
   $$u(\alpha x + y) = \overline{\alpha}u(x) + u(y) = \alpha\mu x + \mu y = \mu(\alpha x + y)$$
   car α est réel. Ainsi E_μ est un $\mathbb{R}$-ev. Ce n'est pas un $\mathbb{C}$-ev car si $x \in E_\mu \setminus \{0_E\}$, alors
   $$u(ix) = -iu(x) = -i\mu x \neq \mu x,$$
   si $x \neq 0_E$ donc $ix \notin E_\mu$.

4. *Étant données deux applications semi-linéaires u et v, montrer que $u \circ v$ est une application linéaire.*
   Soit $(x, y) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors
   $$\begin{aligned} u \circ v(\alpha x + y) &= u(\overline{\alpha}v(x) + v(y)) \\ &= \alpha u \circ v(x) + u \circ v(y) \end{aligned}$$
   on a donc bien $u \circ v$ linéaire.

5. *Etude d'un exemple:*
   On considère l'application suivante:
   $$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (i\overline{x} + \overline{y}, i\overline{y}) \end{array}.$$
   (a) *Montrer que u est semi-linéaire.*
   Soit $(X, Y) \in (\mathbb{C}^2)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, avec $X = (x, y)$ et $Y = (x', y')$, alors
   $$\begin{aligned} u(\lambda X + \mu Y) &= u\left((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')\right) \\ &= \left(i(\overline{\lambda x + \mu x'} + \overline{\lambda y + \mu y'}, i\overline{(\lambda y + \mu y')}\right) \\ &= \left(i\overline{\lambda}\overline{x} + i\overline{mu}\overline{x'} + \overline{\lambda}\overline{y} + \overline{\mu}\overline{y'}, i\overline{\lambda}\overline{y} + i\overline{\mu}\overline{y'}\right) \\ &= \left(\overline{\lambda}(i\overline{x} + \overline{y}) + \overline{\mu}(i\overline{x'} + \overline{y'}), i\overline{\lambda}\overline{y} + i\overline{\mu}\overline{y'}\right) \\ &= \overline{\lambda}(i\overline{x} + \overline{y}, i\overline{y}) + \overline{\mu}(i\overline{x'} + \overline{y'}, i\overline{y'}) \\ &= \overline{\lambda}u(X) + \overline{\mu}u(Y) \end{aligned}$$
   On a bien u semi-linéaire.

   (b) *Montrer que 1 est une valeur co-propre de u et déterminer un vecteur co-propre associé à 1.*

On cherche $(x,y) \in \mathbb{C}^2 \neq (0,0)$ tel que

$$\begin{cases} i\overline{x} + \overline{y} = x \\ i\overline{y} = y \end{cases}$$

La deuxième ligne, on peut prendre $y = 1+i$. Le plus simple pour le voir est géométriquement : si M désigne l'image de y et M' l'image de $\overline{y}$, alors on veut que l'image de M' par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ soit égale à M, sachant que M' est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Une fois y fixé, on cherche x tel que $x - i\overline{x} = \overline{y} = 1 - i$ et on remarque que 1 vérifie cette égalité. Ainsi, le vecteur non nul $(1, 1+i)$ est vecteur co-propre associé à 1, 1 est donc une valeur co-propre de u. **Partie 2:**

Soit u une application semi-linéaire sur E.

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de E.

Soit $x \in E$ et soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.

On pose:

$$\varphi(x) = u(\sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} e_i).$$

1. *Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.*

   Soit $(x,y) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On suppose que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$. Alors $\alpha x + y = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\lambda_i + \mu_i) e_i$, donc

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha x + y) &= u\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{(\alpha\lambda_i + \mu_i)} e_i\right) \\ &= u\left(\overline{\alpha}\sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} e_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{\mu_i} e_i\right) \\ &= \alpha u\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} e_i\right) + u\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\mu_i} e_i\right) \\ &= \alpha\varphi(x) + \varphi(y) \end{aligned}$$

   On a donc bien φ linéaire.

   Soit ψ l'application linéaire définie par:

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \psi(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \overline{\mu_{i,j}} e_j,$$

   où $(\mu_{i,1}, \dots, \mu_{i,n})$ sont les coordonnées de $u(e_i)$ dans $\mathcal{B}$.

2. *Montrer que $\varphi \circ \psi = u \circ u$.*

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, alors

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \pi(e_i) &= \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\mu_{ij}} e_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \overline{\mu_{ij}} \varphi(e_j) \\
&\text{ car } \varphi \text{ est linéaire} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \overline{\mu_{ij}} u(e_j) \\
&= u\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e_j\right) \\
&\text{ car } u \text{ est semi-linéaire} \\
&= u^2(e_i)
\end{aligned}$$

car par hypothèse $(\mu_{i,1}, \dots, \mu_{i,n})$ sont les coordonnées de $u(e_i)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

On peut aussi dire que $(\overline{\mu_{i,1}}, \dots, \overline{\mu_{i,n}})$ sont les coordonnées de $\sum_{j=1}^{n} \overline{\mu_{ij}} e_j$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ donc $\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{\mu_{ij}} e_j\right) = u\left(\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e_j\right)$ pour gagner une ligne.

Ainsi, on a montré que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi \circ \psi(e_i) = u^2(e_i)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E donc, par linéarité, on a

$$\forall x \in E, \varphi \circ \psi(x) = u^2(x),$$

autrement dit $\varphi \circ \psi = u^2$.

3. *Montrer que si μ est une valeur co-propre de u, alors:*

$$\ker(\varphi \circ \psi - |\mu|^2 Id_E) \neq \{0\}.$$

Soit x un vecteur co-propre associé à μ, alors

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \psi(x) &= u^2(x) \\
&= u(\mu x) \\
&= \overline{\mu} u(x) \\
&= \overline{\mu} \mu x \\
&= |\mu|^2 x
\end{aligned}$$

Ainsi, $x \in \ker\left(\varphi \circ \psi - |\lambda|^2 id_E\right)$ et $x \neq 0_E$ car c'est un vecteur co-propre. On en déduit donc que $\ker\left(\varphi \circ \psi - |\lambda|^2 id_E\right) \neq \{0_E\}$.