Devoir d'entrainement 9.

Exercice 1 (sujet 1)**.** On donne l'équivalent de Stirling:

$$n! \sim \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$$

Dans tout ce problème, x désigne un nombre réel. On pose $a_n = \frac{(nx)^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Rappeler sans démonstration une condition nécessaire et suffisante de convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. On suppose $|x| > 1/e$. Vérifiez que la série $\sum a_n$ diverge grossièrement.

3. On suppose $|x| < 1/e$.

   (a) Montrez que la série $\sum a_n$ converge absolument

   (b) Qu'en déduisez-vous ?

4. On suppose que $x = 1/e$. Quelle est la nature de la série $\sum a_n$?

5. On suppose que $x = -1/e$. On pose $b_n = (-1)^n a_n$ pour tout entier $n > 0$.

   (a) Vérifiez que la suite $(b_n)_n$ est positive et converge vers 0.

   (b) Montrer que pour tout $x \in]-1, \infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1}/b_n = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

   (d) En déduire que $(b_n)_n$ est décroissante

   (e) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k b_k$.
   Montrez que les suites $(S_{2p})_p$ et $(S_{2p+1})_p$ sont adjacentes.

   (f) Déduisez-en que la série $\sum a_n$ converge.

   (g) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(1+a_n)$. Quelle est la nature de la série $\sum v_n$?

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $a_n(x) = \dfrac{(nx)^n}{n!}$ et lorsque cela a un sens, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$.

   (a) Sur quel intervalle maximal J la fonction S est-elle définie ?
   On pose $I = J \cap \mathbb{R}^+$.

   (b) Vérifiez que S est croissante sur I.

   (c) Montrez que S tend vers $+\infty$ en $1/e$.
   (*Indication*: on montrera que S n'est majorée par aucun réel $M > 0$.)

Exercice 2 (sujet 2)**.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. On dit que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) si

- $a_1 \geqslant 1$,

- la suite (a_n) est bornée,

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n > 0$,
- la série $\sum(a_n)$ diverge.

On note alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ b_n = \frac{1}{\ln(A_n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A_k}$$

Dans tout l'exercice, on utilisera sans la démontrer la propriété suivante, notée (R) :

> Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles **à termes strictement positifs**.
>
> **Si** (a) $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$; (b) la série $\sum(u_n)$ diverge **alors** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} v_k$.

1. Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   En utilisant les séries de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ et la propriété (R), prouver que :
   $$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$
2. (a) De façon analogue, montrer que $T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln(k)} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$
   (b) En déduire la nature de la série de terme général $w_n = \frac{1}{n \ln(n)}$ $(n \geqslant 2)$.
   (c) Retrouver ce résultat sans utiliser la propriété (R).
3. Etude de deux exemples.
   (a) On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 1$. Vérifier que la suite (a_n) vérifie la propriété (P) et déterminer la limite en $+\infty$ de b_n.
   (b) On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n}$. Vérifier que la suite (a_n) vérifie la propriété (P). En utilisant la propriété (R) et la série $\sum(w_n)_{n \geqslant 2}$, déterminer la limite en $+\infty$ de b_n.
4. On revient au cas général et on considère une suite (a_n) qui satisfait à la propriété (P).
   (a) Montrer que $A_n \underset{+\infty}{\sim} A_{n-1}$.
   (b) Prouver que
   $$\frac{a_n}{A_n} \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)$$
   (c) Déterminer alors la nature de la série $\sum(a_n/A_n)_{n \geqslant 2}$.
   (d) À l'aide de la propriété (R) et des questions précédentes, déterminer alors la limite de b_n en $+\infty$.
5. Soit u_n le terme général d'une série à termes strictement positifs divergente. Montrer qu'il existe une suite (v_n) à termes positifs tels que $v_n = o(u_n)$ et $\sum(v_n)$ diverge.

Exercice 3 (sujet 1)**.** Soit Q un polynôme de degré au plus 2 et φ l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\varphi(P) = P'Q - PQ'$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Soient u et v deux réels, on suppose dans cette question que $Q = X^2 + uX + v$.

   (a) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) Calculer le déterminant de φ.

   (c) Déterminer une base du noyau.

   (d) Déterminer une base de l'image.

3. On suppose ici que $Q = X - 1$.

   (a) Montrer que $(-1, X^2 + X - 1, X - 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) Écrire la matrice B de φ dans cette base.

   (c) Écrire la matrice A de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

   (d) Donner la relation liant A et B. On explicitera les matrices de passages.

   (e) Calculer $\det \varphi$.

   (f) Déterminer le noyau de φ.

   (g) Déterminer l'image de φ.

   (h) Les sous-espaces $\mathrm{Im}\varphi$ et $\ker \varphi$ sont-ils en somme directe?

   (i) Déterminer un supplémentaire de $\ker \varphi$.

Exercice 4 (sujet 1)**.** Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

Pour deux matrices A et B de $M_3(\mathbb{R})$, on dit que la matrice A est semblable à la matrice B lorsqu'il existe une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et u un endomorphisme de E. Si $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ et $B = Mat_{\mathcal{B}'}(u)$, alors $A = P^{-1}BP$ et par suite la matrice A est semblable à la matrice B.

Partie I

Soient A, B, C trois matrices de $M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A est semblable à B alors B est semblable à A.
   Désormais, on pourra alors dire que les matrices A et B sont semblables.

2. Montrer que si d'une part A et B sont semblables et que d'autre part B et C le sont aussi alors A et C sont semblables. (la relation 'être semblable' est transitive)

3. Montrer que si A et B sont semblables alors elles ont même rang.

Partie II

Soit u un endomorphisme de E et $v = u^2 - u$.

1. Soient p, q deux entiers naturels et w l'application linéaire de $\ker u^{p+q}$ vers E définie par $w(x) = u^q(x)$.

   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(w) \subset \ker u^p$.

   (b) En déduire que $\dim \ker u^{p+q} \leqslant \dim \ker u^p + \dim \ker u^q$.

2. Dans cette question, on suppose que $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg} u = 2$.

   (a) Établir que $\dim \ker u^2 = 2$.

   (b) Justifier qu'il existe un vecteur a de E tel que $u^2(a) \neq 0$

(c) Montrer que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.

(d) Écrire la matrice U de u et la matrice V de v dans cette base.

3. Dans cette question, on suppose que $u^2 = 0$ et $\text{rg} u = 1$.

   (a) Montrer que l'on peut trouver un vecteur b de E tel que $u(b) \neq 0$.

   (b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\ker u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(u(b), c, b)$ est une base de E.

   (c) Écrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de v dans cette base.

Partie III

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. On se propose de montrer que A est semblable à son inverse A^{-1}.

On pose $N = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = N^2 - N$.

1. (a) Calculer N^3 et justifier que $\text{rg} N \leqslant 2$.

   (b) Justifier que A est inversible et que $A^{-1} = I_3 + M$

2. Dans cette question, on suppose que $\text{rg} N = 2$.

   (a) En exploitant 2, montrer que la matrice N est semblable à la matrice $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) En exploitant 2d, dire à quelle matrice " simple " la matrice M est semblable. En déduire M^3 et $\text{rg} M$.

   (c) Montrer que les matrices M et N sont semblables

   (d) Conclure que A et A^{-1} sont semblables.

3. Dans cette question, on suppose que $\text{rg} N \leqslant 1$. Montrer que A et A^{-1} sont encore semblables.

Exercice 5 (sujet 2)**. Partie I: généralités**

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose $\text{rg}(A) = 1$.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$,$(b_1, \ldots, b_n)$ des éléments de $\mathbb{R}^n$ tels que $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]$, $a_{ij} = b_i \alpha_j$.

2. Montrer que $A^2 = \text{Tr}(A).A$.

   On rappelle que $\text{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$.

3. On suppose que $\text{Tr}(A) \neq 0$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

   (a) Que vaut $\dim \text{Ker}(f)$?

   (b) Soit $w \in \text{Im}(f)$, calculer $f(w)$.

   (c) Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

(d) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$Mat_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{Tr}(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(e) La matrice A est-elle semblable à une matrice diagonale?

Partie II: un cas particulier

Soit $n \geqslant 2$. On considère la matrice J_n de taille n à coefficients réels dont tous les coefficients sont égaux à $\frac{1}{n}$:

$$J_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Le vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1 est noté V.

4. Montrer l'égalité: $J_n V = V$.
5. Calculer J_n^2.
6. Soit $D_n \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale suivante:

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

   Montrer qu'il existe $P_n \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $J_n = P_n D_n P_n^{-1}$.

7. Deux matrices semblables ont-elles même déterminant? Justifier.
8. Déterminer $\{\lambda \in \mathbb{R}, J_n + \lambda I_n \text{ est non inversible }\}$.
9. Montrer que pour tout vecteur colonne W de $\mathbb{R}^n$, $J_n W \in \mathrm{Vect}(V)$.

Partie III: Application à la résolution d'une équation

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Dans cette question, on considère l'équation (E) d'inconnue le réel x:

$$\det(M + xJ_n) = 0. \qquad (E)$$

On note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de l'équation (E).

10. Lorsque $M = 0$, où 0 désigne la matrice nulle, déterminer $\mathcal{S}_E$.
11. Lorsque $M = I_n$, où I_n désigne la matrice identité, montrer que $\mathcal{S}_E$ est réduit à un unique élément. Préciser cet élément.
12. On suppose M inversible. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que tout vecteur W dans le noyau de $M + xJ_n$ est colinéaire au vecteur $M^{-1}V$.

(b) Soit $W = M^{-1}V$. On notant σ la somme des coordonnées du vecteur W, démontrer l'équivalence:

$$(M + xJ_n)W = 0 \Leftrightarrow (1 + x\frac{\sigma}{n}) = 0.$$

(c) En déduire que $\mathcal{S}_E$ est au plus de cardinal 1.

(d) Pour quelles valeurs de σ, l'ensemble $\mathcal{S}_E$ est-il vide?

13. On se propose de déterminer $\mathcal{S}_E$ lorsque M est non inversible.

(a) Montrer que $\mathcal{S}_E$ est non vide.

(b) S'il existe un réel b tel que $M + bJ_n$ est inversible, établir une bijection entre $\mathcal{S}_E$ et l'ensemble des solutions de l'équation (F) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ définie par:

$$\det(M + bJ_n + xJ_n) = 0. \qquad (F)$$

(c) Conclure.

Correction du devoir d'entrainement n 9

Exercice 1 Dans tout ce problème, x désigne un nombre réel.

On donne l'équivalent de Stirling:

$$n! \sim \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$$

On pose $a_n = \frac{(nx)^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifiez que la série $\sum a_n$ diverge grossièrement pour $|x| > 1/e$.

D'après l'équivalent de Stirling, $a_n \sim \frac{n^n x^n e^n}{n^n\sqrt{2\pi n}} = \frac{(xe)^n}{\sqrt{2\pi n}}$.

Si $|x| > 1/e$, $|xe| > 1$, et donc par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|xe|^n}{\sqrt{2\pi n}} = \text{inf}$.

En particulier, (a_n) n'est pas de limite nulle: la série diverge donc grossièrement. Si vous minorer $|a_n|$ (et pas seulement a_n d'ailleurs) par le terme général d'une série divergente, vous montrez que $\sum |a_n|$ diverge donc ni que que $\sum a_n$ diverge, ni qu'elle diverge grossièrement.

2. (a) Montrez que la série $\sum a_n$ converge absolument pour $|x| < 1/e$ On reprend les calculs de la question précédente. $|a_n| \sim \frac{|xe|^n}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{n^2}$: en effet, $\frac{\frac{|xe|^n}{\sqrt{2\pi n}}}{\frac{1}{n^2}} = |xe|^n\sqrt{2\pi}n^{3/2} \to 0$, par croissances comparées (en utilisant l'hypothèse $|xe| < 1$).
   Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |a_n|$ converge, i.e. $\sum a_n$ converge absolument.
   Donc $\sum a_n$ converge.

   (b) On en déduit que la série $\sum a_n$ converge car c'est une série absolument convergente.

3. On suppose que $x = 1/e$. Quelle est la nature de la série $\sum a_n$?

Si $x = \frac{1}{e}$, $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$. $\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ est à une constante multiplicative près le terme général d'une série de Riemann divergente.

Donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum a_n$ diverge.

N'oubliez pas de préciser que a_n (ou son équivalent) est positif!

4. On suppose que $x = -1/e$. On pose $b_n = (-1)^n a_n$ pour tout entier $n > 0$.

   (a) Vérifiez que la suite $(b_n)_n$ est positive et converge vers 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = (-1)^n a_n = (-1)^n \frac{n^n(-1/e)^n}{n!} = \frac{n^n}{e^n n!}$ – donc $b_n \geqslant 0$.
La disjonction de cas pour montrer que b_n est positif c'est poussif De plus, $b_n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, qui est de limite nulle, donc (b_n) également.

(b) Montrer que pour tout $x \in]-1, \infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

L'égalité est vraie si $x = 0$. On suppose $x \neq 0$ et $x > -1$. Alors $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est un taux d'accroissement.
Si $x > 0$, il existe $c \in]0, x[$ tel que $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{1}{1+c} \leqslant 1$. En multipliant par x qui est positif, on obtient l'inégalité souhaitée. Si $x < 0$, il existe $d \in]x, 0[$ tel que $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{1}{1+d} \geqslant 1$. En multipliant par x qui est négatif, l'inégalité chance de sens et on obtient l'inégalité souhaitée.
On peut aussi faire une étude de fonction, ou bien dire que la fonction exponentielle est convexe donc au-dessus de ses tangentes et, par croissance de l'exponentielle, on obtient l'inégalité souhaitée.
Je suis surprise du nb de personnes qui n'ont pas pris les points de cette question, en écrivant n'importe quoi, en bâclant le TAF ou en ne la traitant pas (pourquoi???)

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1}/b_n = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. En déduire que $(b_n)_n$ est décroissante

---

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = -\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!((n+1)/e)^{n+1}}{(n+1)!(n/e)^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n e} = \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
Or $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp(n\ln(1+\frac{1}{n})) \leqslant \exp(n.1/n) = e$ d'après la question précédente, en utilisant la croissance de exp.
On a donc $\frac{b_{n+1}}{b_n} \leqslant 1$, et (b_n) étant à termes positifs, elle est décroissante.
Le quotient inférieur à 1 implique la décroissance CAR elle est à termes positifs !!!!

(d) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k b_k$.
Montrez que les suites $(S_{2p})_p$ et $(S_{2p+1})_p$ sont adjacentes.

- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $S_{2(p+1)} - S_{2p} = (-1)^{2p+2} b_{2p+2} + (-1)^{2p+1} b_{2p+1} = b_{2p+2} - b_{2p+1} \leqslant 0$ par décroissance de (b_n).
  Donc (S_{2p}) est décroissante.
- De même, on montre que (S_{2p+1}) est croissante.
- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $S_{2p+1} - S_{2p} = (-1)^{2p+1} b_{2p+1}$ qui est de limite nulle car (b_p) l'est.

Les suites sont donc bien adjacentes.
pourtant j'avais bien dit que c'était classique !

(e) Déduisez-en que la série $\sum a_n$ converge.

D'après la question précédente, $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite, donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers cette limite. Par ailleurs, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ donc la série $\sum a_n$ converge.
Trois choses à dire :

- les suites étant adjacentes, elles ont même limite
- Comme on a les indices pairs et impairs, la suite S_n converge
- Remarquer que S_n est la somme partielle de la série $\sum a_n$.

Attention, l'existence de la limite de (S_n) provient du fait que l'on a convergence vers la même limite des suites extraites d'indices pairs et impairs

(f) On a vu que $a_n \to 0$, on écrit donc

$$\ln(1+a_n) = a_n - \frac{a_n^2}{2} + O(a_n^3).$$

On a vu que $\sum a_n$ converge. On a $|a_n| \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ donc $\sum |a_n|^3$ converge par comparaison à une série de Riemann et $\sum a_n^3$ est donc une série convergente. Enfin, $a_n^2 \sim \frac{1}{2\pi n}$ et $\sum \frac{1}{2\pi n}$ est le terme général POSITIF d'une série divergente. On en déduit que $\sum v_n$ diverge (bien que son terme général soit équivalent à a_n, terme général d'une série convergente).

La plupart de ceux qui ont remarqué $v_n \sim a_n$ m'ont ensuite dit que a_n était positif, ce qui est très faux, c'est b_n qui l'est, a_n change de signe.

5. On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ où $a_n(x) = \frac{(nx)^n}{n!}$, pour tout $x \in [0, 1/e[$.

(a) Sur quel intervalle maximal $I \subset \mathbb{R}^+$ la fonction S est-elle définie ?

D'après les questions 1, 2 et 3, l'intervalle voulu est $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$.

(b) Vérifiez que S est croissante sur I.

Pour tout $x, y \in [0, 1/e[$, si $x \leqslant y$, on a $a_n(x) \leqslant a_n(y)$.
En sommant, on en déduit que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} a_n(x) \leqslant \sum_{n=1}^{N} a_n(y)$.
En passant à la limite lorsque $N \to \inf$, on obtient $S(x) \leqslant S(y)$.
S est donc croissante sur $[0, 1/e[$.

(c) ($\star$) Montrez que S tend vers $+\infty$ en $1/e$. (*Indication*: on montrera que S n'est majorée par aucun réel $M > 0$.)

D'après la question précédente et le théorème de la limite monotone, il suffit de montrer que S n'est pas majorée au voisinage de $\frac{1}{e}$.
Soit $M > 0$. D'après la question 3, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{n=1}^{N} a_n(1/e) \geqslant 2M$.
Par continuité de $x \mapsto \sum_{n=1}^{N} a_n(x)$ en $x = 1/e$ (il s'agit d'une somme finie de fonctions puissances – donc continues), pour x assez proche de $1/e$, $\left|\sum_{n=1}^{N} a_n(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n(1/e)\right| \leqslant M$.
On en déduit par inégalité triangulaire que, pour x assez proche de $1/e$,
$\sum_{n=1}^{N} a_n(x) \geqslant M$. On a donc $S(x) = \sum_{n=1}^{\inf} a_n(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N} a_n(x) \geqslant M$.
S est donc non-majorée au voisinage de $1/e$, d'où le résultat.

Exercice 2 1. Les suites u et v sont à termes strictement positifs et $v_n = \ln(1+1/n) \sim 1/n = u_n$. Comme $\sum(u_n)$ diverge, on peut utiliser (R) pour obtenir (la somme se simplifiant par télescopage)

$$H_n \sim \sum_{k=1}^{n} v_k = \ln(n+1)$$

Enfin, $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+1/n) \sim \ln(n)$ permet de conclure que

$$H_n \sim \ln(n)$$

Il est impératif de vérifier TOUTES les hypothèses de (R) (donc aussi les suites sont à termes strictement positifs). Ne pas oublier de montrer $\ln(n+1) \sim \ln n$ qui nécessite une preuve.

2. On pose cette fois $u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$ et $v_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$ (définies pour $n \geqslant 2$). On a des suites à termes strictement positifs. De plus, par télescopage,

$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \to +\infty$$

ce qui montre que $\sum(v_k)$ diverge. Enfin,

$$v_n = \ln\left(\frac{\ln(n) + \ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right) = \ln\left(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right) \sim \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \sim \frac{1}{n\ln(n)} = u_n$$

On peut donc encore utiliser (R) pour conclure que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \sim \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \sim \ln(\ln(n+1))$$

Bien sûr, le fait que les séries soient définies à partir du rang 2 seulement ne change rien au fait que l'on peut utiliser (R).
Comme $\ln(\ln(n+1)) = \ln(\ln(n) + \ln(1+1/n)) = \ln(\ln(n)) + \ln(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}) \sim \ln(\ln(n))$ on conclut que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$$

Là encore, $\ln(\ln(n+1)) \sim \ln(\ln(n))$ nécessite un calcul

3. En particulier, la suite des sommes partielles de la série $\sum(w_n)$ est de limite infinie et la série diverge.

4. De façon alternative, on peut considérer la fonction $f \; : \; x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$. f est décroissante sur $[2, +\infty[$ et on peut donc utiliser une comparaison série-intégrale pour montrer que

$$\forall n \geqslant 2,\ \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geqslant \int_{2}^{n+1} \frac{dx}{x\ln(x)} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \to +\infty$$

On retouve que la suite des sommes partielles de la série $\sum(w_n)$ est de limite infinie et donc la série diverge.
La méthode pourrait d'ailleurs donner, en écrivant un encadrement, l'équivalent de **2.1**.

5. Les trois premiers points de (P) sont immédiats et le quatrième aussi (on a une série géométrique de raison 1 qui diverge). Ici, $A_n = n$ et

$$b_n = \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{H_n}{\ln(n)}$$

La question **1** indique que

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 1$$

6. Les quatre points de la propriété (P) sont immédiats (la suite est à valeurs dans $]0,1]$ et la série associée, de Riemann, est divergente). On a $A_k = H_k$ et donc

$$b_n = \frac{1}{\ln(H_n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kH_k}$$

Posons $u_n = \frac{1}{nH_n}$; u et w (définies à partir du rang 2) sont strictement positives à partir du rang 3. Ce sont des suites équivalentes (question **1**) de séries divergente (question **2.2**). La propriété (R) indique que

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{kH_k} \sim \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$$

Ajouter les termes d'indices 1 et 2 ne change rien à l'équivalence car les sommes sont de limites infinies (les constantes sont alors négligeables) et avec la question **2.1** on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kH_k} \sim \ln(\ln(n))$$

Enfin, $\ln(H_n) = \ln(\ln(n)) + \ln(\frac{\ln(n)}{H_n}) \sim \ln(\ln(n))$ (le second terme, de limite nulle, est négligeable devant le premier, de limite infinie). On a finalement

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 1$$

7. On a $A_n = A_{n-1} + a_n$. Par ailleurs $A_n \to +\infty$ (suite croissante car (a_n) est à termes positives, et non convergente car $\sum(a_n)$ diverge) et (a_n) est bornée donc $a_n = o(A_n)$. Ainsi, $A_n = A_{n-1} + o(A_n)$ et donc

$$A_n \sim A_{n-1}$$

On a besoin de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée ET $A_n \to +\infty$
Attention, dire que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente ne suffit pas car une suite divergente n'est pas nécessairement de limite infinie !!! elle peut aussi ne pas avoir de limite.

8. On en déduit que $\frac{A_n}{A_{n-1}} \to 1$ et donc $\ln(\frac{A_n}{A_{n-1}}) \sim \frac{A_n}{A_{n-1}} - 1 = \frac{a_n}{A_{n-1}}$. Enfin, $A_{n-1} \sim A_n$ donne

$$\ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_n}{A_n}$$

9. $u_n = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right)$ est le terme général $(n \geqslant 2)$ d'une suite strictement positive de série divergente $(\sum_{k=2}^{n} u_k = \ln(A_n) - \ln(A_1) = \ln(A_n) \to +\infty)$. Comme $u_n \sim \frac{a_n}{A_n}$ qui est aussi à termes > 0, on peut utiliser (R) pour obtenir

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{A_k}{A_{k-1}}\right) \sim \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{A_k}$$

Ces suites sont de limite infinie et ainsi $\sum(a_k/A_k)$ diverge.

10. L'équivalence obtenue ci-dessus s'écrit

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{A_k} \sim \ln(A_n)$$

Ajouter le terme pour $k = 1$ ne change rien car les termes tendent vers $+\infty$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 1$$

11. On va essayer d'utiliser le résultat précédent pour construire (v_n). Pour cela, il nous faut une suite vérifiant (P) et je distingue donc deux cas.

- Si (u_n) est bornée, je pose $a_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 1,\ a_n = u_n$. On a alors (a_n) qui vérifie (P) .$\sum(a_n/A_n)$ diverge (question **4.3**) et $\frac{a_n}{A_n} = o(a_n)$ (le quotient vaut $1/A_n$ et tend vers 0). La suite de terme général $v_n = \frac{a_n}{A_n}$ convient donc.
- Sinon, je pose $w_n = \min(u_n, 1)$; on a $w_n > 0$ et $\sum(w_n)$ diverge (car u_n est régulièrement plus grand que 1 et il existe une extraite de w qui est constante égale à 1 ce qui donne la divergence grossière de la série). Le premier cas donne une suite $v_n = o(u_n)$ à termes > 0 et de série divergente. On a a fortiori $v_n = o(u_n)$ (puisque $0 \leqslant w_n \leqslant u_n$).

Exercice 3 1. L'application φ étant linéaire d'après l'énoncé, il suffit de montrer que son domaine d'arrivée est bien $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $P = aX^2 + bX + c$ et par hypothèse, $Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$. Le terme en X^3 de $\varphi(P)$ est donc $2a\alpha - 2a\alpha = 0$ donc $\deg \varphi(P) \leqslant 2$ et on a bien $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X], \forall P \in \mathbb{R}_2[X]$.

2. (a)
   - $\varphi(1) = -(2X+u) = -u_2X$
   - $\varphi(X) = (X^2 + uX + v) - X(2X+u) = v - X^2$
   - $\varphi(X^2) = 2X(X^2 + uX + v) - X^2(2X+u) = uX^2 + 2vX.$

   donc $A = \begin{pmatrix} -u & v & 0 \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{pmatrix}$.

   (b) Le déterminant de φ est le déterminant de la matrice de φ dans n'importe quelle base. En utilisant la matrice A trouvée à la question précédente, on trouve $\det \varphi = 0$.

   (c) En raisonnant avec la matrice, on trouve qu'un élément $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient au noyau de A si

$$\left\{ \begin{array}{l} -ux + vy = 0 \\ -2x + 2vz = 0 \\ -y + uz = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = vz \\ y = uz \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

   d'où $\ker \varphi = Vect(u + vX + X^2)$.

   l'erreur classique c'est d'oublier que $\ker \varphi$ est un ssev de $\mathbb{R}_2[X]$ et doit donc être engendré par des polynômes !

   Attention à ne pas diviser par u ou v en résolvant le système car ils peuvent s'annuler.

   (d) D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}\varphi = 2$, il suffit donc de prendre deux éléments non colinéaires de l'image: $\mathrm{Im}\varphi = Vect(u + 2X, v - X^2)$.

   Quelques uns ont fait une erreur plus subtile: au lieu de prendre les deux premières colonnes, ils ont pris la première et la dernière et ont écrit $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Vect}(-2X + u, uX^2 + 2vX)$. Problème: si $u = 0$ les deux vecteurs sont colinéaires et ce n'est donc pas une base du noyau

3. Attention !!!! dans cette question on change de polynôme ET ce n'est pas un car particulier du précédent

   (a) A permutation près, la famille est à degrés échelonnés donc elle est libre. Comme elle est de cardinal 3 dans un espace de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   Attention, si vous raisonnez avec l'espace engendré (mais pourquoi faire ça !?!?!?!) vous montrez seulement que la famille est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ et il faut encore l'argument de son cardinal (et pas sa dimension car la dimension d'une famille, ça n'existe pas).

(b)
- $\varphi(-1) = 1$
- $\varphi(X^2 + X - 1) = X^2 - 2X = 2(-1) + (X^2 + X - 1) - 3(X - 1)$
- $\varphi(X - 1) = 0$.

donc $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

(c)
- $\varphi(1) = -1$
- $\varphi(X) = -1$
- $\varphi(X^2) = X^2 - 2X$

d'où $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) On note C la base canonique et $C' = (-1, X^2 + X - 1, X - 1)$. On a $A = P_{CC'} B P_{C'C}$ où $P_{CC'}$ est la matrice de passage de C dans C'. On a

$$P_{CC'} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P_{C'C} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(e) D'après la question b, on a $X - 1 \in \ker \varphi$ donc $\det \varphi = 0$.

(f) On peut remarquer grâce à la forme de la matrice B que le rang de φ est 2 ce qui implique, par le théorème du rang, que $\dim \ker \varphi = 1$ et comme $X - 1 \in \ker \varphi$, on a $\ker \varphi = Vect(X - 1)$.

On peut aussi poser un système comme dans la question 2 et on retrouve le même résultat.

(g) Comme $\mathrm{rg}\varphi = 2$, il suffit de choisir deux éléments non colinéaires de l'image. On a par exemple $\mathrm{Im}\varphi = Vect(1, X^2 - 2X)$.

(h) Les deux espaces seront en somme directe si la famille $(X - 1, 1, X^2 - 2X)$ est libre ce qui est clair puisqu'elle est, à permutation près, à degrés échelonnés.

(i) On a vu à la question précédente que $\mathrm{Im}\varphi$ et $\ker \varphi$ sont en somme directe donc $\dim \ker \varphi \oplus \mathrm{Im}\varphi = \dim \ker \varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi = 3$ d'après le théorème du rang. On a donc $\ker \varphi \oplus \mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}_2[X]$ ce qui montre qu'un supplémentaire de $\ker \varphi$ est $\mathrm{Im}\varphi$.

Exercice 4 **Partie I**

1. Si A est semblable à B, alors il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}BP$. Posons $Q = P^{-1} \in GL_3(\mathbb{R})$, on a alors $B = Q^{-1}AQ$ donc Q est semblable à A.

   Si vous écrivez $B = PAP^{-1}$, il vous manque la dernière étape pour montrer que B est semblable à A.

2. Supposons qu'il existe $P, Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telles que $A = P^{-1}BP$ et $B = Q^{-1}CQ$. On a alors $A = P^{-1}Q^{-1}CQP = (QP)^{-1}C(QP)$ avec $QP \in GL_3(\mathbb{R})$ donc A et C sont semblables.

   Attention, on a vu dans le chapitre calcul matriciel que l'inverse de AB et $B^{-1}A^{-1}$, pas besoin de le démontrer (ni de douter!

3.

On sait que la multiplication par une matrice inversible ne change pas le rang car cela revient à composer par un automorphisme, on a donc $\text{rg}(B) = \text{rg}(BP) = \text{rg}(P^{-1}BP) = \text{rg}(A)$.

On peut aussi dire que A et B représente le même endomorphisme dans des bases différentes et donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(f) = \text{rg}(B)$. **Partie II**

1. (a) Soit $y \in \text{Im}(w)$, alors il existe $x \in \ker u^p$ tel que $y = w(x) = u^q(x)$. On a donc $u^p(y) = u^{p+q}(x) = 0_E$.

   (b)

   On écrit le théorème du rang pour w:

$$\dim \ker(u^{p+q}) = \dim \ker w + \dim \text{Im} w$$

   On sait que $\dim \text{Im} w \leqslant \dim \ker u^p$ d'après la question précédente. Par ailleurs, $\ker w = \ker u|_{\ker u^{p+q}} = \ker u^{p+q} \cap \ker u^q$, or $\ker u^q \subset \ker u^{p+q}$ donc $\ker w = \ker u^q$. On a donc $\dim \ker u^{p+q} \leqslant \dim \ker u^q + \dim \ker u^p$.

   Attention $\text{Im} w \neq \text{Im} u^q$ et $\text{Ker} w \neq \text{Ker} u^q$!!! On a $\text{Im}(w) = u^q(\text{Ker}(u^{p+q})) \subset Im(u^q)$ et $\text{Ker}(w) = \ker u^q \cap \text{Ker}(u^{p+q})$.

2. (a) On applique la question précédente à $p = 1 = q$, on a donc $\dim \ker u^2 \leqslant 2 \dim \ker u$. Or $\text{rg} u = 2$ donc $\dim \ker u = 1$ d'où $\dim \ker u^2 \leqslant 2$.

   Appliquons maintenant la question précédente à $p = 1$ et $q = 2$, on a donc $\dim \ker u^3 \leqslant \dim \ker u^2 + \dim \ker u$ or $u^3 = 0$ donc $\ker u^3 = E$ et $\dim \ker u^2 = 3$. On a ainsi $\dim \ker u^2 \geqslant 2$ d'où l'égalité par double inégalité.

   (b) D'après la question précédente, on sait que $\dim \ker u^2 = 2$ donc $\ker u^2 \neq E$. Il existe donc $a \in E$ tel que $u^2(a) \neq 0$. Montrons que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que $\lambda_1 u^2(a) + \lambda_2 u(a) + \lambda_2 a = 0_E$ (1).
   On applique u, on obtient $\lambda_2 u^2(a) + \lambda_3 u(a)$ (2) puisque $u^3 = 0$. En appliquant encore u, on obtient $\lambda_3 u^2(a) = 0_E$ et comme $u^2(a) \neq 0_E$, on a $\lambda_3 = 0$. En reportant dans l'égalité (2), cela implique $\lambda_2 u^2(a) = 0_E$ donc $\lambda_2 = 0$ et enfin, l'égalité (3) donne $\lambda_1 = 0$. On a montré que les trois coefficients sont nuls donc la famille est libre. Comme elle est de cardinal 3 et que $\dim E = 3$, cette famille est une base de E.

   (c) On a $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. (a) D'après le théorème du rang appliqué à u, on sait que $\dim \ker u = 2$ donc $\ker u \neq E$ et il existe par conséquent $b \in E$ tel que $u(b) \neq 0_E$.

   (b) On a vu que $\dim \ker u = 2$, on peut donc compléter la famille libre $(u(b))$ en une base $(u(b), c)$ de $\ker u$.

   Montrons que la famille $(u(b), c, b)$ est une famille libre. Soient $\lambda_1 u(b) + \lambda_2 c + \lambda_3 b = 0_E$. Appliquons u à cette égalité, on obtient $\lambda_3 u(b) = 0_E$ puisque $u(b)$ et c appartiennent à $\ker u$. Cela implique $\lambda_3 = 0$ puisque $u(b) \neq 0_E$. On a ainsi $\lambda_1 u(b) + \lambda_2 c = 0_E$ et comme la famille est libre, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et la famille est libre. Comme elle est de cardinal 3, c'est une base de E.

   (c)

On a $U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $V' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Partie III

1. (a) On a $N^3 = 0$. La matrice de N étant triangulaire à coefficients diagonaux nuls, N n'est pas inversible donc $\mathrm{rg}N < 3$ soit $\mathrm{rg}N \leqslant 2$. On peut aussi dire que $\mathrm{Im}(N)$ est engendré par les colonnes de N et comme N a une colonne nulle, l'espace est engendré par deux colonnes (qui peuvent être nulles donc le rang peut ne pas être égal à 2)

   (b)

   Il suffit de vérifier que $A(I_3 + M) = (I_3 + N)(I_3 + N^2 - N) = I_3$. Cela implique que A admet un inverse à droite donc qu'elle est inversible et $A^{-1} = I_3 + M$.

   De manière générale, un élément est inversible s'il admet un inverse à droite ET à gauche. Les matrices étant un cas très particulier où un seul inverse suffit, montrez que vous le savez en précisant votre raisonnement

2. (a) Fixons une base B de E, alors il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $N = Mat_B(u)$. Comme $N^3 = 0$ et $\mathrm{rg}N = 2$, on a $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}u = 2$. On peut donc appliquer la question 2 de la partie 2, on sait que pour un tel endomorphisme, il existe une base $\mathcal{C}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{C}}(u) = U$. Les matrices U et N représentant le même endomorphisme, elles sont semblables.

   (b) On sait d'après la question précédente qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $N = P^{-1}UP$ d'où $M = N^2 - N = P^{-1}U^2P - P^{-1}UP = P^{-1}(U^2 - U)P = P^{-1}VP$ donc M et V sont semblables.

   On a $M^3 = P^{-1}V^3P = 0$ puisque $V^3 = 0$ et $\mathrm{rg}M = \mathrm{rg}V = 2$.

   (c)

   D'après la question précédente, on sait que $M^3 = 0$ et $\mathrm{rg}M = 2$ donc on peut appliquer le même raisonnement qu'à la question 2a) pour montrer que M et U sont semblables. On a donc M et N semblables à U donc ces deux matrices sont semblables.

3. - Si $\mathrm{rg}N = 0$ alors $N = 0$ et $A = I_3 = A^{-1}$ donc A est bien semblable à son inverse.
   - Si $\mathrm{rg}N = 1$, alors, pour une base donnée B de E, il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Mat_B(u) = N$. On a alors $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}u = 1$ donc, d'après la question 3 de la partie II, on sait qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{C}}(u) = U'$. Les matrices N et U' sont donc semblables.
     Comme à la question précédente, on montre ensuite que M est semblable à V' donc $M^3 = 0$ et $\mathrm{rg}M = 1$. Le même raisonnement que pour N permet de montrer que M est semblable à U' donc à N.

Exercice 5 **Partie I: généralités**

1. Choisissons un indice $j_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que la colonne j_0 est non nulle (ce qui est possible, puisque $A \neq 0$). On note cette colonne

$$A_{j_0} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

   La matrice A est de rang 1, ses colonnes forment une famille de rang 1; autrement dit, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la colonne A_j est proportionnelle à la colonne A_{j_0}; autrement dit, il existe

$\alpha_j \in \mathbb{R}$ tel que $A_j = \alpha_j A_{j_0}$. On obtient alors

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{i,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \alpha_j \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Dit autrement : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = \alpha_j b_i$.

Ceci étant valable pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a montré l'existence des deux n-uplets $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = \alpha_j b_i$.

Certains m'ont dit que toutes les colonnes étaient combinaisons linéaires des autres, cela ne vous garantit pas l'existence d'une colonne $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ dont elles seraient toutes un multiple. En effet, si $C_1 = C_2 + C_3$ et (C_2, C_3) libre alors $\mathrm{rg}(A) = 2$, $C_2 = C_1 - C_3$, $C_3 = C_1 - C_2$ et on n'est pas du tout dans le cas de la matrice A du pb

2. On revient à la définition du produit matriciel. Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$. On a

$$\begin{aligned}
\left(A^2\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{k,j} &= \sum_{k=1}^{n} b_i \alpha_k \, b_k \alpha_j \\
&= b_i \alpha_j \sum_{k=1}^{n} b_k \alpha_k \\
&= a_{i,j} \sum_{k=1}^{n} b_k \alpha_k \\
&= a_{i,j} \sum_{k=1}^{n} a_{k,k} \\
&= \mathrm{tr}(A) a_{i,j} \\
&= (\mathrm{tr}(A)\, A)_{i,j}
\end{aligned}$$

Ceci étant valable pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on en déduit l'égalité matricielle $A^2 = \mathrm{tr}(A)\, A$.

3. (a) La matrice A étant de rang 1, par le théorème du rang, on a $\dim(\ker(f)) = n - \mathrm{rg}(f) = n - 1$

   (b) Comme $w \in \mathrm{Im}(f)$, par définition, il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $w = f(u)$. On a alors, par la question 2:
   $$f(w) = f^2(u) = A^2 u = \mathrm{tr}(A) A u = \mathrm{tr}(A) f(u) = \mathrm{tr}(A) w$$
   On a donc $f(w) = \mathrm{tr}(A) w$.

   (c) • Soit $x \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. On a alors $f(x) = 0$, et de plus, il existe $x' \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = f(x')$. D'où, par la question 3b
   $$0 = f(x) = f^2(x') = \mathrm{tr}(A) x,$$
   ce qui implique, comme $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, que $x = 0$. Ainsi, $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.
   De plus, comme $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$, on en déduit la somme directe attendue: $\mathbb{R}^n = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Le prochain qui me dit " par le thm du rang, on a $\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Ker}(f)=\mathbb{R}^n$" je le mords. le thm du rang ne vous donne qu'une égalité sur les dimensions. SI on a une somme directe, alors $\dim(\mathrm{Im}(f))+\dim(\mathrm{Ker}(f))=\dim(\mathrm{Im}(f)\oplus\mathrm{Ker}(f))$ et la somme directe est un ssev de $\mathbb{R}^n$, de même dimension, donc égal à $\mathbb{R}^n$. En aucun cas, on a l'égalité $\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Ker}(f)=\mathbb{R}^n$ simplement en appliquant le thm du rang.

(d) Soit $\mathcal{C}:=(u,u_1,\dots,u_{n-1})$ la base de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^n=\ker(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$. On a $f(u)=\mathrm{Tr}(A)u$ d'après la question 3b. Dans cette base, on a

$$[f(u)]_{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix}\mathrm{tr}(A)\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad\text{et}\quad[f(u_i)]_{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

On en déduit que la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est

$$\begin{pmatrix}\mathrm{tr}(A)&0&\dots&0\\0&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&0\end{pmatrix}$$

(e) D'après la formule du changement de base, on a $A=PMat_{\mathcal{C}}(f)P^{-1}$ avec P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{C}$. On en déduit que A est bien semblable à une matrice diagonale.

Parie II: un cas particulier

4. On a $J_nV=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$ avec pour tout i, $\alpha_i=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\times 1=1$ donc on a bien $J_nV=V$.

5. On a $\mathrm{Tr}(J_n)=1$ et J_n est de rang 1 donc, d'après la partie précédente, $J_n^2=J_n$.

6. Notons f_n l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice J_n. Il s'agit d'appliquer la question **??** de la partie I : la matrice J_n est de rang 1, puisque toutes ses colonnes sont colinéaires; sa trace vaut
$$\mathrm{tr}(J_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=n\times\frac{1}{n}=1$$
Donc il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que
$$(f_n)_{\mathcal{C},\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\dots&0&0\end{pmatrix}=:D_n$$
Par la formule de changement de base, on a
$$J_n=(f_n)_{\mathrm{can},\mathrm{can}}=P_{\mathrm{can}}^{\mathcal{C}}(f_n)_{\mathcal{C},\mathcal{C}}P_{\mathcal{C}}^{\mathrm{can}}$$
En posant $P_n:=P_{\mathrm{can}}^{\mathcal{C}}$, on obtient l'égalité matricielle souhaitée.

7. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, et supposons qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$. On a alors, par propriété du déterminant:

$$\det(A) = \det\left(PBP^{-1}\right) = \det(P)\det(B)\det\left(P^{-1}\right) = \det(P)\det(B)\det(P)^{-1} = \det(B)$$

On en déduit que les deux matrices semblables A et B ont bien même déterminant.

8. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes, en utilisant la question précédente:

$$\begin{aligned} J_n + \lambda I_n \text{ non inversible} &\Leftrightarrow \det(J_n + \lambda I_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det\left(P_n D_n P_n^{-1} - \lambda I_n\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det\left(P_n (D_n - \lambda I_n) P_n^{-1}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det(D_n - \lambda I_n) = 0 \end{aligned}$$

Or,

$$\det(D_n - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}$$

Ainsi, on a les équivalences:

$$J_n + \lambda I_n \text{ non inversible} \Leftrightarrow (1-\lambda)(-1)^{n-1}\lambda^{n-1} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1$$

L'ensemble cherché est donc $\{0; 1\}$.

Très peu ont vu que la question précédente était là pour vous aider et vous vous êtes donc lancés dans le calcul du déterminant. J'ai vu plusieurs fois l'erreur suivante: vous faites simultanément des opérations et vous perdez l'équivalence. Par exemple, si vous faites $C_i \leftarrow C_i - C_{i+1}$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ ET $C_n \leftarrow C_n - C_1$, vous ne pouvez pas retrouver $C_1, \ldots, C_n$ car vous n'avez plus que les différences entre deux colonnes.

9. Soit $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On a

$$J_n W = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} w_1 + \cdots + w_n \\ \vdots \\ \vdots \\ w_1 + \cdots + w_n \end{pmatrix} = \frac{w_1 + \cdots + w_n}{n} V$$

On en déduit que $J_n W \in \mathrm{Vect}(V)$.

Partie II: Application à la résolution d'une équation

10. L'équation $\mathcal{E}$ s'écrit $x^n \det J_n = 0$. Si $n \geqslant 2$, $\det J_n = 0$, donc $\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \mathbb{R}$. Si $n = 1$, $\det J_n = 1$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{0\}$.

11. Supposons maintenant $M = I_n$, l'équation E s'écrit

$$\det(I_n + xJ_n) = 0$$

Comme $\det(I_n) \neq 0$, 0 n'est pas solution. Supposons donc $x \neq 0$; on a alors les équivalences:

$$x \text{ solution} \Leftrightarrow x^n \det\left(\frac{1}{x} I_n + J_n\right) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\frac{1}{x} I_n + J_n\right) = 0 \Leftrightarrow J_n + \frac{1}{x} I_n \text{ non inversible}$$

Or, par la question 8, l'ensemble des valeurs $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que $J_n + \lambda I_n$ est non inversible est $\{0; 1\}$; on en déduit l'équivalence

$$x \text{ solution} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0 \text{ ou } \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

On a ainsi montré que $\mathcal{S}_E = \{1\}$.

12. (a) Soit $U \in \ker(M + xJ_n)$. On a alors

$$0 = (M + xJ_n)U = MU + xJ_nU, \text{ càd } U = -xM^{-1}J_nW$$

Or, par la question 9, on sait que $J_nU \in \text{Vect}(V)$, donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $J_nU = aV$. Ceci montre que

$$U = -axM^{-1}V \quad : \quad \text{donc } U \text{ colinéaire à } M^{-1}V$$

(b) On utilise le calcul de la question 9; on a alors les équivalences:

$$\begin{aligned}(M + xJ_n)W = 0 \;\Leftrightarrow\; MW + xJ_nW = 0 &\Leftrightarrow MM^{-1}V + xJ_nW = 0 \\ &\Leftrightarrow V + x\frac{\sigma}{n}V = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(1 + x\frac{\sigma}{n}\right)V = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + x\frac{\sigma}{n} = 0 \qquad (\text{car } V \neq 0)\end{aligned}$$

Tout d'abord, on a l'équivalence

$$\boxed{\ker(M + xI_n) \neq \{0\} \Leftrightarrow W \in \ker(M + xI_n)}$$

Montrons-le. Tout d'abord, la question 12a permet d'avoir l'implication directe. Supposons en effet qu'il existe $U \in \ker(M + xJ_n)$, $U \neq 0$. Par la question 12a, on en déduit que U est colinéaire à W: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $U = \lambda W$, avec $\lambda \neq 0$ car $U \neq 0$.
On a donc par définition de U:

$$(M + xJ_n)(\lambda W) = 0,$$

et comme $\lambda \neq 0$, cela implique que

$$(M + xJ_n)W = 0, \text{ donc } W \in \ker(M + xJ_n)$$

L'implication directe a été démontrée.
La réciproque est assurée par le fait que $W \neq 0$, ce qui est vrai car $V \neq 0$ et M inversible (donc de noyau réduit à $\{0\}$).
On a donc deux cas selon la valeur de σ:

- Si $\sigma \neq 0$, alors la question précédente a montré que W (qui est non nul) est dans le noyau de $M + xJ_n$ si et seulement si $1 + x\frac{\sigma}{n} = 0$, càd $x = -\frac{n}{\sigma}$.
  Ceci montre que $\mathcal{S}_E = \left\{-\frac{n}{\sigma}\right\}$.

- Si $\sigma = 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 + x\dfrac{\sigma}{n} \neq 0$, ce qui par la question précédente, montre que $(M + xJ_n)\, W \neq 0$, donc que W n'est pas dans le noyau de $M + xJ_n$. Ainsi, $M + xJ_n$ est inversible, ce qui implique que $\mathcal{S}_E = \emptyset$.

13. (a) Comme, par hypothèse, M est non inversible, on a $\det(M) = 0$; autrement dit,

$$\det(M + 0 \times J_n) = 0 \quad : \quad \text{donc } \ 0 \in \mathcal{S}_E$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} x \text{ solution de } \ \mathcal{E} &\Leftrightarrow \det(M + xJ_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det(M + bJ_n + (x - b)J_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - b \text{ solution de } \ F \end{aligned}$$

On en déduit que l'application $\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & x - b \end{array}$ est une bijection entre les deux ensembles E et F.

(c) Sous l'hypothèse de la question précédente, d'après la question 12c), l'ensemble des solutions de $\mathcal{F}$ est de cardinal au plus égal à 1, donc $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ est de cardinal au plus égal à 1. Comme $0 \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \{0\}$.
Si, pour tout $b \in \mathbb{R}$, $M + bJ_n$ n'est pas inversible, alors $\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \mathbb{R}$.