Matrices et déterminants

> Dans tout ce chapitre:
>
> - $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
> - E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de **dimensions finies** respectives $p \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}$.

La propriété suivante interviendra dans certaines démonstrations :

Une application linéaire est déterminée par "l'image d'une base".

Formellement :
Proposition$(\star)$
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soient $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de F.
Il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad f(e_j) = u_j.$$

Remarque: Concrètement, connaître f revient à connaître les p vecteurs $f(e_1)$,...,$f(e_p)$.
Preuve: *Soit $x \in E$; notons $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p$ (avec $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{K}$) son écriture dans la base $\mathcal{B}$.*
Comme f est linéaire, on a :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j f(e_j).$$

Comme pour tout j, on a $f(e_j) = u_j$, on obtient :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j.$$

Réciproquement, l'application f ainsi définie est bien linéaire et vérifie, pour tout j, $f(e_j) = u_j$.

1 Représentation matricielle

1.1 Matrice d'un vecteur et d'une famille

Définition 1. Soit $x \in E$ et $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_p)$ une base de E, on sait qu'il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^p$ tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$. On appelle représentation matricielle de x dans $\mathcal{C}$ le vecteur colonne

$$Mat_{\mathcal{C}}(x) = \begin{array}{c} x \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{array}$$

Exemple 1. On pose $B = (1, X, X^2)$, $C = (X^2, X, 1)$ et $P = 2X^2 + 3X - 1$, calculer $Mat_B(P)$ et $Mat_C(P)$. on a

$$Mat_B(P) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } Mat_C(P) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Définition 2. Soit $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ une famille de F et $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_n)$ une base de F, on sait qu'il existe $a_{ij} \in \mathbb{K}^{np}$ tel que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $f_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$. On appelle représentation matricielle de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{C}$ la matrice de taille $n \times p$:

$$Mat_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f_1 & \dots & f_j & \dots & f_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1j} & & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{array}$$

Exemple 2. On pose $B = (1, X, X^2)$, $C = (X^2, X, 1)$, calculer les matrices possibles.

$$Mat_B(B) = I_3, Mat_C(C) = I_3, Mat_B(C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } Mat_C(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 3. Soient $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ une base de F.
Comme $\mathcal{B}'$ est une base de F :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad \exists!(a_{1,j}, \dots, a_{n,j}) \in \mathbb{K}^n, \quad f(u_j) = a_{1,j} v_1 + \cdots + a_{n,j} v_n.$$

La matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelée **matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$**. On la note $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(u_1) & \cdots & f(u_j) & \cdots & f(u_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{array}$$

C'est la matrice de la famille $(f(u_1), \ldots, f(u_p))$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Dans le cas où $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on note plus simplement $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Remarque: Lorsque $E = F$, rien n'empêche néanmoins de choisir deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ distinctes de E.

$f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $Mat(f) \in \mathrm{Mat}_{np}(\mathbb{K})$ avec $\dim(E) = p$ et $\dim(F) = n$. Le nombre de lignes de la matrice est égale à la dimension de l'espace d'arrivée.

Exemples 3.

1. *On considère l'application linéaire* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (y, x+y, x-y) \end{array} \right.$. *Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^3$. On calcule les images des éléments de la base $\mathcal{B}$:*

   - $f(e_1) = f((1,0)) = (0,1,1) = 0.f_1 + 1.f_2 + 1.f_3$
   - $f(e_2) = f((0,1)) = (1,1,-1) = 1.f_1 + 1.f_2 - 1.f_3$

   On a donc

$$\mathrm{Mat}_{B,B'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}$$

2. *Soit f de l'exemple précédent, déterminer $Mat_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(f)$ avec $\mathcal{E} = (e_2, e_1)$ et $\mathcal{E}' = (f_1, f_3, f_2)$. On reprend les notations des bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. On a*

   - $f(e_2) = f((0,1)) = (1,1,-1) = 1.f_1 - 1.f_3 + 1.f_2$
   - $f(e_1) = f((1,0)) = (0,1,1) = 0.f_1 + 1.f_3 + 1.f_2$

   On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_2) & f(e_1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ f_3 \\ f_2 \end{array}$$

3. *Soit $f_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\ x \mapsto \lambda x$ un endomorphisme d'un ev E, écrire $Mat_B(f_\lambda)$ où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E. On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a*

$$f(e_i) = \lambda e_i = 0e_1 + \ldots + \lambda e_i + \ldots + 0e_p$$

   On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} f(e_i) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda & & 0 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & \lambda & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & 0 & & \lambda \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_p \end{array}$$

   En particulier, pour $\lambda = 1$, on obtient, en notant $p = dim(E)$, que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(id_E) = I_p \text{ pour toute base } \mathcal{B} \text{ de } E.$$

   Remarque: *En revanche, si on prend deux bases distinctes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_E) \neq I_p$. Prenons, par exemple $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((1,1,1), (1,1,0), (1,0,0))$ et $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a alors*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   La matrice d'une application linéaire se construit en colonne !!

4. *Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = \mathbb{R}^2$. Écrire la matrice de l'application linéaire*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ P & \mapsto & (P(0), P'(0)) \end{array} \right.$$

   relativement aux bases canoniques de E et F. La base canonique de E est $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$, celle de $\mathbb{R}^2$ est $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$. On a :

   - $f(1) = (1,0) = 1e_1 + 0e_2$

- $f(X) = (0,1) = 0e_1 + 1e_2$
- $f(X^2) = (0,0) = 0e_1 + 0e_2$

On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \end{array}$$

5. *Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On cherche la matrice de l'endomorphisme*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P(X) & \mapsto & P(X) + P(X+1) \end{array} \right.$$

relativement à la base canonique de E. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E. On a :

- $f(1) = 1 + 1 = 2 = 2.1 + 0.X + 0.X^2 + 0.X^3$.
- $f(X) = X + X + 1 = 2X + 1 = 1.1 + 2.X + 0.X^2 + 0.X^3$
- $f(X^2) = X^2 + (X+1)^2 = 2X^2 + 2X + 1 = 1.1 + 2.X + 2.X^2 + 0.X^3$.
- $f(X^3) = X^3 + (X+1)^3 = 2X^3 + 3X^2 + 3X + 1$
$= 1.1 + 3.X + 3.X^2 + 2.X^3$

On en déduit que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array}$$

6. *Supposons maintenant que je vous donne la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

en vous disant qu'elle est égale à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ où f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (1, 1+X, 1+X+X^2)$. Que vaut $f(1)$? $f(X)$? On sait que la première colonne de la matrice nous donne les coordonnées de $f(1)$ <u>dans la base $\mathcal{B}'$</u>. On a donc

$$f(1) = 1.1 - 1.(1+X) + 2.(1+X+X^2) = 2X^2 + X + 2.$$

De même, en lisant sur la deuxième colonne, on a

$$f(X) = 3.1 + 4.(1+X) + 1.(1+X+X^2) = X^2 + 5X + 8.$$

7. *On considère, à nouveau, la matrice A On suppose $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$ où $g \in \mathcal{L}(R^3, \mathbb{R}_2[X])$ et $\mathcal{B}$,$\mathcal{B}'$ sont les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$. Que vaut $g(0,0,1)$?*

   On lit sur la troisième colonne :

$$f(0,0,1) = 0.1 + 1.X + 5X^2 = 5X^2 + X.$$

Proposition 1.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$ une base de F.
L'application $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$: $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Preuve:
Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2, \alpha \in \mathbb{K}$. On pose $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij})$ et $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g) = (b_{ij})$.

- *Montrons la linéarité :*

$$\begin{array}{rl} & \forall j \in [\![1,p]\!], \quad (\alpha f + g)(e_j) \\ = & \alpha f(e_j) + g(e_j) \\ = & \alpha(a_{1j}v_1 + \cdots + a_{nj}v_n) + (b_{1j}v_1 + \cdots + b_{nj}v_n) \\ = & (\alpha a_{1j} + b_{1j})v_1 + \cdots + (\alpha a_{nj} + b_{nj})v_n \end{array}$$

  donc:

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\alpha f + g) = \left(\alpha a_{ij} + b_{ij}\right)_{i,j} = \alpha\ \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g).$$

- *Soit maintenant $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$,*

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i.$$

  D'après la proposition ($\star$), il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ vérifiant :

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad f(e_j) = u_j.$$

  On a alors

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i,$$

  donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = A$. On a montré que tout élément A de l'espace d'arrivée admet un unique antécédent $f \in \mathcal{L}(E,F)$ donc l'application est bijective.

Concrètement, cela signifie qu'on peut définir la matrice d'une application linéaire dans une base de départ et d'arrivée fixée mais également que toute matrice peut être vue comme la matrice d'une certaine application dans des bases fixées.

Définition 4. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on appelle endomorphisme canoniquement associé à A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Exemples 4.

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ *tel que* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$, *où* $\mathcal{B}$ *désigne la base canonique de* $\mathbb{R}^3$, *déterminer* $f(x, y, z)$ *pour* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. *En lisant sur la matrice, on*

   - $f(1, 0, 0) = (1, 2, -1)$
   - $f(0, 1, 0) = (3, 1, 2)$ *et*
   - $f(0, 0, 1) = (-2, 1, 1)$

   Soit maintenant $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, *alors* $X = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$ *d'où, par linéarité de* f*:*

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) \\ &= x(1, 2, -1) + y(3, 1, 2) + z(-2, 1, 1) \\ &= (x + 3y - 2z, 2x + y + z, -x + 2y + z). \end{aligned}$$

2. *On considère toujours la même matrice. Soit* $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ *tel que* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(h) = A$, *où* $\mathcal{B}$ *désigne la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathcal{B}'$ *désigne la base* $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$. *Déterminer* $h(x, y, z)$.

   En lisant la matrice, on obtient les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ *des vecteurs de la base canonique. On a donc*

   - $h(1, 0, 0) = 1 \times (1, 1, 1) + 2 \times (1, 1, 0) - 1 \times (1, 0, 0) = (2, 3, 1)$
   - $h(0, 1, 0) = 3 \times (1, 1, 1) + 1 \times (1, 1, 0) + 2 \times (1, 0, 0) = (6, 4, 3)$ *et*
   - $h(0, 0, 1) = -2 \times (1, 1, 1) + 1 \times (1, 1, 0) + 1 \times (1, 0, 0) = (0, -1, -2)$

   Soit maintenant $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, *alors* $X = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$ *d'où, par linéarité de* h*:*

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= xh(1, 0, 0) + yh(0, 1, 0) + zh(0, 0, 1) \\ &= x(2, 3, 1) + y(6, 4, 3) + z(0, -1, -2) \\ &= (2x + 6y, 3x + 4y - z, x + 3y - 2). \end{aligned}$$

3. *On considère toujours la matrice* A. *Soit* $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[X])$ *tel que* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g) = A$, *où* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *désignent les bases canoniques de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}_2[X]$. *Déterminer* $g(x, y, z)$. *En lisant les colonnes de* A, *on obtient :*

   - $g(1, 0, 0) = 1 + 2X - X^2$
   - $g(0, 1, 0) = 3 + X + 2X^2$ *et*
   - $g(0, 0, 1) = -2 + X + X^2$

   Soit maintenant $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, *alors* $X = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$ *d'où, par linéarité de* h*:*

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= xg(1, 0, 0) + yg(0, 1, 0) + zg(0, 0, 1) \\ &= x(1 + 2X - X^2) + y(3 + X + 2X^2) + z(-2 + X + X^2) \\ &= (-x + 2y + z)\, X^2 + (2x + y + z)\, X + (x + 3y - 2z) \end{aligned}$$

Remarque. *Dans la démonstration ci-dessus, nous avons dû justifier la bijectivité de* $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ *car, bien qu'il s'agisse d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimensions finies, nous ne connaissions pas encore la dimension de* $\mathcal{L}(E, F)$. *On en déduit:*

> **Corollaire 2.** *L'espace vectoriel* $\mathcal{L}(E, F)$ *est de dimension finie, égale à* $\dim E \times \dim F$.

Preuve: *On a en effet trouvé un isomorphisme entre cet espace vectoriel et* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *qui est de dimension* np.

(Pour ceux qui auraient oublié, on peut écrire, de manière unique, un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, *comme combinaison linéaire de matrices* E_{ij} *(des zéros partout sauf un 1 en position* (i, j)*), les coefficients de la combinaison linéaire sont alors les coefficients de la matrice donc unique, ce qui montre que les* $(E_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ *forme une base de* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, *de cardinal* np*).*

1.3 Écritures matricielles de x et de $f(x)$.

Soient $\mathcal{B} = (u_1, \ldots\ldots, u_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de F.

Soient $x \in E$ et $y \in F$. On a :

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 u_1 + \cdots\cdots + \alpha_p u_p \qquad (\text{avec } \alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_p \in \mathbb{K}) \\ y &= \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n \qquad (\text{avec } \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}) \end{aligned}$$

On pose :

$$Mat_{\mathcal{B}}(x) = X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \text{ et } Mat_{\mathcal{B}'}(y) = Y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Si on pose par ailleurs $A = \text{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$. Alors :

$$\boxed{y = f(x) \iff Y = AX.}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f(x)) = \text{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\text{mat}_{\mathcal{B}}(x)}$$

En effet :

- *Calculons le produit AX:*

$$AX = {}_{\text{ligne } i}\begin{pmatrix} \\ a_{i1} \cdots\cdots\cdots a_{ip} \\ \\ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \alpha_1 a_{i1} + \quad \ldots + \quad \alpha_p a_{ip} \\ \\ \end{pmatrix}_{\text{ligne } i}.$$

- *Par ailleurs :*

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \alpha_j f(u_j) \text{ par linéarité de } f \\ &= \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i\right) \text{ par définition de la matrice} \\ &= \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} \alpha_j a_{ij} v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \alpha_j a_{ij} v_i \text{ en permutant les deux signes somme} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j a_{ij}\right)}_{\text{coordonnées de } f(x) \text{ dans } \mathcal{B}'} v_i \end{aligned}$$

On retrouve que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la iième coordonnée de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$\left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j a_{ij}\right) = \alpha_1 a_{i1} + \ldots + \alpha_p a_{ip}.$$

On retrouve bien l'expression trouvée sur la iième ligne du vecteur Y, on a donc bien $AX = Y$.

Reprenons certains des exemples du paragraphe précédent :

- En utilisant la matrice A de l'application linéaire

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (y, x + y, x - y) \end{array} \right.$$

  relativement aux bases canoniques (e_1, e_2) et (f_1, f_2, f_3) retrouver $f(1, -2)$.
  l'égalité

$$f(e_1 - 2e_2) = f(1, -2) = (-2, -1, 3)$$

  s'écrit de manière matricielle, en posant $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

  .

  Si on a uniquement la matrice, on peut donc calculer l'image d'un élément en faisant un produit matriciel.

  Le vecteur que l'on obtient en faisant le produit matriciel n'est pas l'image mais <u>les coordonnées de l'image !!</u>

- Reprenons l'application précédente. La matrice de f relativement aux bases $\mathcal{E} = (e_2, e_1)$ et $\mathcal{E}' = (f_1, f_3, f_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e_2) & f(e_1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_3 \\ f_2 \end{array}$$

  Déterminer $f(1, -2)$

  Imaginons que vous ayez uniquement la matrice et on cherche à calculer l'image du vecteur $x = (1, -2)$. Tout d'abord, il faut commencer par décomposer ce vecteur dans la base de l'espace de départ, donc dans $\mathcal{E} = (e_2, e_1)$. On a $x = -2e_2 + e_1$ donc

$$X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On fait maintenant le produit matriciel avec A:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On sait donc que les coordonnées de $f(x)$ dans $\mathcal{E}'$ sont $\begin{pmatrix} -2, & 3, & -1 \end{pmatrix}$, autrement dit, on a :

$$f(x) = -2f_1 + 3f_3 - f_2 = (-2, -1, 3).$$

Pour éviter d'écrire des bêtises, regarder les espaces de départ et d'arrivée de f.

- Imaginons que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ soit désormais la matrice de l'application $g \in \mathcal{L}(R^2, \mathbb{R}_2[X])$, les deux espaces étant munis de leurs bases canoniques. Que vaut $g(1,1)$? *Comme $\mathbb{R}^2$ est muni de la base canonique, les coordonnées de $(1,1)$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on doit donc faire le produit matriciel*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On a <u>les coordonnées de $g(1,1)$</u> dans la base canonique de l'espace de départ, c'est-à-dire dans $(1, X, X^2)$. On peut donc affirmer que

$$g(1,1) = 1.1 + 0.X + 2.X^2 = 2X^2 + 1$$

.

- Encore un exemple pour être sûr : On considère toujours la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cette fois-ci, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$ avec $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_1[X], \mathbb{R}_2[X])$ avec $\mathcal{B} = (X, X+1)$ et $\mathcal{B}' = (X^2, X-1, 1)$, déterminer $g(2X-1)$.
Il faut tout d'abord déterminer les coordonnées de $2X-1$ dans la base de l'espace de départ de A, c'est-à-dire $\mathcal{B}$. On écrit

$$2X - 1 = 3X - (X+1),$$

ses coordonnées sont donc $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ On peut maintenant faire le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $g(2X-1)$ <u>dans la base $\mathcal{B}'$</u> sont $(3, -4, 2)$ donc on a :

$$g(2X-1) = 3 \times X^2 + 4 \times (X-1) - 2 \times 1 = 3X^2 - 2X - 6.$$

- *En utilisant sa matrice dans la base canonique, calculons l'image par l'endomorphisme*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X) + P(X+1) \end{array} \right.$$

du vecteur $2X^3 - 4X^2 + 5$.
On a déjà déterminé la matrice de f dans la base canonique dans les exemples du début du cours. On a trouvé :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On cherche maintenant les coordonnées de $2X^3 - 4X^2 + 5$ dans la base canonique : $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. On fait ensuite le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$f(2X^3 - 4X^2 + 5) = 4X^3 - 2X^2 - 2X + 8.$$

(attention à l'ordre !!!)
Vous pouvez, pour vous convaincre que c'est juste et surtout vous convaincre de l'utilité de la matrice, calculer directement $f(2X^3 - 4X^2 + 5) = 2X^3 - 4X^2 + 5 + 2(X+1)^3 - 4(X+1)^2 + 5$. Vous retombez, sauf erreur de calcul, sur le résultat ci-dessus mais c'est beaucoup plus long qu'un simple produit matriciel.

1.4 Matrice de $g \circ f$

Soit G un espace vectoriel de dimension finie $m \in \mathbb{N}$.

Proposition 3.
Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ des bases de E, F et G respectivement.
Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On a :

$$\underbrace{\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)}_{\in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{R})} = \underbrace{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g)}_{\in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})} \times \underbrace{\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)}_{\in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})}$$

Remarques:

- On se souvient que pour le produit matriciel, on doit avoir compatibilité des tailles des matrices : $\mathcal{M}_{mn}$ fois $\mathcal{M}_{np}$ donne un élément de $\mathcal{M}_{mp}$.
- La formule $\mathrm{Mat}(g \circ f) = \mathrm{Mat}(g)\mathrm{Mat}(f)$ est facile à retenir, elle l'est moins quand on rajoute les bases $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$. Pour ne pas faire d'erreur sur les bases ou leur ordre (base de l'espace de départ, base de l'espace d'arrivée), faites le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

ou, en rajoutant les bases :

$$\begin{tikzcd} E \text{ muni de } \mathcal{B} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \text{ muni de } \mathcal{B}' \arrow[r, "g"] & G \text{ muni de } \mathcal{B}'' \end{tikzcd}$$

Preuve:
Notons les vecteurs des bases :

$$\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_p), \qquad \mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_n), \qquad \mathcal{B}'' = (w_1, \ldots, w_m).$$

Notons $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij})$ *et* $B = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) = (b_{hi})$.
On pose aussi $C = BA = (c_{hj})$ *; par définition du produit de deux matrices :*

$$\forall h \in [\![1, m]\!], \quad \forall j \in [\![1, p]\!], \quad c_{hj} = \sum_{i=1}^{n} b_{hi} a_{ij}.$$

Rappelons les notations et couleurs:

e.v.	E	F	G
dimension	p	n	m
vecteurs de base	u_j	v_i	w_h

On veut montrer que $BA = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}"}(g \circ f)$, *on va donc déterminer le coefficient d'indice* (h, j) *de* $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}"}(g \circ f)$ *et montrer qu'il vaut* c_{hj}. *Pour cela, on doit écrire chaque vecteur* $(g \circ f)(u_j)$ *en fonction des vecteurs* w_h*:*

$$\begin{aligned} \forall j \in [\![1, p]\!], \quad (g \circ f)(u_j) = g\left(f(u_j)\right) &= g\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} g(v_i) \ \textit{par linéarité de } g \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{h=1}^{m} b_{hi} w_h\right) \end{aligned}$$

En permutant ces deux sommes :

$$(g \circ f)(u_j) = \sum_{h=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{hi}\right) = \sum_{h=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} b_{hi} a_{ij}\right)}_{\text{coefficient d'indice } (h,j) \text{ de } Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}"}(g \circ f)} w_h.$$

On reconnaît l'expression de c_{hj}, *coefficient d'indice* (h, j) *de* BA. *La matrice de* $g \circ f$ *relativement aux bases* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}''$ *est donc bien égale à* BA.

Remarque. *Si* $f = g$ *et* $B = B' = B"$, *on a* $Mat_B(f^2) = (Mat_B(f))^2$. *Par une récurrence immédiate, on a* $\forall n \in \mathbb{N}$, $Mat_B(f^n) = (Mat_B(f))^n$ *(notez que pour* $n = 0$, *on a* $f^0 = id_E$ *et* $Mat_B(f)^0 = I_p$ *donc la formule reste vraie).*

1.5 Inversibilité et inverse d'une application et de sa matrice

Théorème 4. *Soit un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $dim(E) = dim(F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est bijective ;*
2. *il existe une base de E et une base de F dans laquelle la matrice de f est inversible ;*
3. *la matrice de f dans n'importe quelle base de E et de F est inversible.*

Dans ce cas, si A est la matrice de f relativement à une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F, alors la matrice de f^{-1} relativement à ces même base est A^{-1} . Autrement dit :$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)^{-1}$.

Preuve: *Nous allons montrer* $1) \Rightarrow 3) \Rightarrow 2) \Rightarrow 1)$.

- $1) \implies 3)$ *: On suppose f bijective. Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E et $\mathcal{C}$ une base quelconque de F. Notons $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $B = \mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1})$. D'après la proposition précédente:*

$$\begin{cases} A \times B = \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f \circ f^{-1}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_E) = I_p \\ B \times A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = I_p \end{cases}$$

  et la matrice A est donc inversible, d'inverse B.

- $3) \implies 2)$ *:Si c'est vrai pour toute base, il en existe une pour laquelle c'est vrai.*

- $2) \implies 1)$ *: Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F dans laquelle la matrice $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ de f est inversible.*
  Notons $g \in \mathcal{L}(F,E)$ l'application de F dans E dont A^{-1} est la matrice dans la base $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ (l'existence et l'unicité de g sont assurées par la bijectivité de l'application $\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ *).*
  D'après la proposition précédente :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = A^{-1} \times A = I_p.$$

  Et donc, en notant $(u_1, \ldots, u_p)$ les vecteurs de la base $\mathcal{B}$, la matrice de $g \circ f$ dans cette base étant l'identité, on a:

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \quad (g \circ f)(u_i) = u_i$$

  Les applications linéaires $g \circ f$ et id_E coïncident (d'après la proposition ($\star$)) sur une base de E donc sont égales: $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
  On en déduit que f est injective, entre deux espaces de même dimension donc bijective.

Dans cette démonstration,(On aurait aussi pu n'utiliser que l'existence d'un inverse à droite pour A.) nous avons supposé pour le point "$2) \implies 1)$ *" que A est inversible mais n'avons en fait utilisé que l'existence d'un inverse à gauche pour A. La conclusion de ce point (f est bijective) et la réciproque (maintenant connue) "1) $\implies$ 3) " donnent :*

Corollaire 5. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si elle admet un inverse à gauche* ou *à droite.*

Preuve: *Si A est inversible, elle admet un inverse à gauche et à droite. Supposons maintenant qu'elle admette un inverse à gauche (même démo pour à droite), alors il existe B tel que $BA = I_n$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (par exemple) représenté par A dans la base canonique et g celui représenté par B, alors $BA = I_n$ implique $g \circ f = id_{\mathbb{R}^n}$ donc f admet un inverse à gauche. Mais comme f est un endomorphisme d'un ev de dimension finie, il est bijectif. On en déduit que A est inversible.*

Exemple 5. Montrer que $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X) + P(X+1) \end{cases}$ *est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ à l'aide de sa matrice. Nous avons vu que la matrice de l'endomorphisme*

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X) + P(X+1) \end{cases}$$

relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est :

$$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice étant triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls, elle est inversible.
Ceci prouve que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. ***Remarque:*** *On savait déjà que f était un automorphisme ! En effet, en calculant les images de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, on avait trouvé une famille de polynômes non nuls de degré distincts donc une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$. Or, on sait que l'image de f est engendrée par les images d'une base de l'espace de départ, ainsi, on a trouvé une base de $Im(f)$, composée de 4 vecteurs donc $Im(f) = \mathbb{R}_3[X]$ donc f est surjective et, comme c'est un endomorphisme d'un ev de dimension finie, f est un automorphisme!*

2 Noyau, image et rang d'une matrice

2.1 Noyau

Définition 5. Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$, on appelle noyau de A, noté $\mathrm{Ker}(A)$ l'ensemble :

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in M_{p1}(\mathbb{K}), AX = (0)\}.$$

Proposition 6.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ des bases de E et F. On pose $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, alors

$$\mathrm{Ker}(A) = \{Mat_{\mathcal{B}}(x), x \in \ker(f)\}.$$

Autrement dit, $\mathrm{Ker}(A)$ donne les coordonnées des éléments du noyau dans la base $\mathcal{B}$.

Exemples 6.

1. *Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, 1+X, 1+X+X^2)$, $\mathcal{B}' = (X^2, 1, X)$. On suppose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer Ker$(f)$. On a Ker$(A)$ = Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.*

   Si $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, alors $\ker(f) =$ Vect$(2+X)$.

2. *Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} R_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X+1)P'(X) - 2P \end{array} \right.$, déterminer son noyau à l'aide de sa matrice on construit sa matrice dans la base canonique, on trouve*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   On trouve Ker(A) = Vect$\big(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\big)$, on en déduit que Ker$(f)$ = Vect$(1 + 2X + X^2)$.

2.2 Image et rang d'une matrice

Définition 6. Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ une matrice. On appelle image de A, noté $\mathrm{Im}(A)$ le sous-espace de $M_{n1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes de A.

Proposition 7.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ des bases de E et F. On pose $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, alors

$$\mathrm{Im}(A) = \{Mat_{\mathcal{B}'}(y), y \in \mathrm{Im}(f)\}.$$

Autrement dit, $\mathrm{Im}(A)$ donne les coordonnées des éléments de l'image dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple: Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, 1+X, 1+X+X^2)$, $\mathcal{B}' = (X^2, 1, X)$. On suppose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
Si $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(X^2 + 1 - X, 2 + X)$.

Définition 7. On appelle **rang** d'une *matrice* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la dimension de son image. Autrement dit, le rang de A est le rang de la famille de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ composée de ses vecteurs colonnes:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}\right).$$

2.3 Lien entre les deux notions.

On rappelle que le rang d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est la dimension de l'image de f:

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{dim}\mathrm{Im}(f).$$

Il est aussi le rang de l'image d'une base quelconque de E, par exemple la base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{dim}\mathrm{Vect}\big(f(u_1), \ldots, f(u_p)\big).$$

Proposition 8.
Le rang d'une application $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est égale au rang de sa matrice relativement à n'importe quelles bases de E et de F:

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\big(\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)\big).$$

Preuve: *L'application* $\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i & \mapsto & \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \end{array} \right.$ *est un isomorphisme*

d'espaces vectoriels.
Concrètement, c'est l'application qui, à un vecteur, associe ses coordonnées dans une base fixée. On l'a vu quand on a montré qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

On note $(u_1, \dots, u_p)$ une base de E et $A = (a_{ij}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$. Par définition, on a, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$,

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

On sait que $Im(f) = Vect(f(u_1), \dots, f(u_p))$. La restriction de Φ au s.e.v. $Im(f)$ de F réalise un isomorphisme vers le s.e.v. de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$\mathrm{Vect}\big(\Phi \circ f(u_1), \dots, \Phi \circ f(u_p)\big) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ \dots, \ \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}\right) = Im(A).$$

Les deux espaces ont donc même dimension, ce qui montre que le rang de la matrice et le rang de l'application qu'elle représente sont égaux. Exemple Quel est le rang de l'application linéaire

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (y, x+y, x-y) \end{array} \right. ?$$

C'est le rang de sa matrice relativement à des bases quelconques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, par exemple les bases canoniques :

$$rg(f) = rg \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$

car les deux colonnes de la matrice sont non colinéaires.

2.4 Propriétés.

On déduit des propriétés du rang d'une famille de vecteurs

Proposition 9.
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. $\mathrm{rg}(A) = 0 \iff A = 0$;
2. $\mathrm{rg}(A) = 1$ si et seulement si les colonnes de A sont colinéaires deux-à-deux et non toutes nulles;
3. $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n,p)$;
4. si $n = p$ alors :
$$\mathrm{rg}(A) = n \iff A \text{ est inversible.}$$

Preuve:

1. *$rg(A) = 0$ si et seulement si l'espace engendré par les colonnes de A est nul, c'est-à-dire si et seulement si $A = 0$.*
2. *c'est clair.*
3. *On sait que A possède p colonnes, l'espace engendré par ses colonnes est donc de dimension au plus p. Par ailleurs, les colonnes sont des éléments de $M_{n1}(\mathbb{K})$ qui est de dimension n. L'espace engendré est donc un ssev de $M_{n1}(\mathbb{K})$, il est donc nécessairement de dimension inférieur ou égale à n.*
4. *Si $n = p$, la matrice est carrée. On note f l'application canoniquement associée à A, c'est-à-dire l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A. On a alors*
$$\begin{aligned} rg(A) = n \ &\Leftrightarrow rg(f) = n \\ &\Leftrightarrow f \text{ est surjective} \\ &\Leftrightarrow f \text{ est bijective,} \\ &\text{car } f \text{ est un endomorphisme d'un ev de dimension finie} \\ &\Leftrightarrow A \text{ est inversible} \end{aligned}$$

Proposition 10.
Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice ne modifie pas le rang :

- échanger deux colonnes ;
- multiplier une colonne par un scalaire non nul ;
- ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

Preuve: *Cela découle du fait que ces opérations élémentaires ne modifie pas l'espace engendré et donc la dimension de celui-ci.*

Théorème 11 (admis)**.** *Une matrice et sa transposée ont même rang :*

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad rg(A) = rg(A^T).$$

Corollaire 12. *Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne modifie pas le rang.*

Preuve: *En effet, faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice, revient à faire des opérations élémentaires sur les colonnes de la transposée; comme une matrice et sa transposée ont même rang, faire des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, ne modifie pas son rang.*

2.5 Calcul pratique du rang d'une matrice.

Le rang d'une matrice peut être déterminé en pratique en se ramenant, par opérations élémentaires sur les lignes et colonnes, à une matrice triangulaire.

Exemples 7.

1. *Rang de* $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$.

$$rg\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ *et* $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$*. On a donc*

$$rg(A) = rg\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

en faisant $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$.

2. *Rang de* $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$*, on obtient :*

$$rg(B) = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On fait ensuite $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ *et on obtient :*

$$rg(B) = rg\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Remarque: On retrouve la définition du rang d'une matrice comme rang du système associé ! Sauf que désormais, vous pouvez aussi faire des opérations sur les colonnes pour "triangulariser" la matrice.

⚠ Le rang d'une matrice triangulaire n'est en général pas égal au nombre de coefficients diagonaux non nuls.

Exemple 8. rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *L'espace engendré par ses lignes (ou ses colonnes) est de dimension 4 car on a 4 vecteurs échelonnés qui forment donc une famille libre. Ainsi,* $rg(A) = 4$ *et pourtant, le nombre de coefficients diagonaux non nuls est 2.*

3 Matrice de passage

3.1 Définition

Définition 8. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. Concrètement, c'est la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque : $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E)$.

Proposition 13.
Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $x \in E$, alors

$$Mat_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} Mat_{\mathcal{B}'}(x)$$

Exemple 9. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$*, et posons* $\mathcal{E} = (1, X, X^2)$*, et* $\mathcal{E}' := (X^2, 1 + X, 1 + X^2)$.

1. ***Déterminer*** $P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$ ***et*** $P_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}$**.**

(a) *Tout d'abord,* $Mat_{\mathcal{E}}(X^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $Mat_{\mathcal{E}}(1+X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et*

$$Mat_{\mathcal{E}}(1+X^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) *Déterminons* $P_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}$.

- *Posons* $Mat_{\mathcal{E}'}(1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$, *où* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$. *Par définition, on a*

  $$1 = \lambda_1 X^2 + \lambda_2(1+X) + \lambda_3(1+X^2) = (\lambda_2+\lambda_3) + \lambda_2 X + (\lambda_1+\lambda_3)X^2$$

  Donc:

  $$\begin{cases} \lambda_2+\lambda_3 &= 1 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1+\lambda_3 &= 0 \end{cases}, \quad \text{c-à-d} \quad \begin{cases} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 1 \end{cases}$$

  Donc $Mat_{\mathcal{E}'}(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- *Posons* $Mat_{\mathcal{E}'}(X) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$, *où* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$. *De même que précédemment, on en déduit le système suivant:*

  $$\begin{cases} \lambda_2+\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_1+\lambda_3 &= 0 \end{cases}, \quad \text{c-à-d} \quad \begin{cases} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 1 \\ \lambda_3 &= -1 \end{cases}$$

  Donc $Mat_{\mathcal{E}'}(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- *On a* $Mat_{\mathcal{E}'}(X^2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, *puisque* X^2 *est l'un des trois vecteurs de la base* $\mathcal{E}'$.

Finalement, $P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. *Soit* $Q = 6X^2 + X + 3$. *Déterminer* $Mat_{\mathcal{E}'}(Q)$ *directement puis à l'aide du travail précédent On écrit* $Q = 6X^2 + X + 3 = (X+1) + 6X^2 + 2 = (X+1) + 2(X^2+1) + 4X^2 = 4X^2 + (X+1) + 2(X^2+1)$ *donc*

   $$Mat_{\mathcal{E}}(Q) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Par ailleurs, on a $Mat_{\mathcal{E}}(Q) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, *donc*

   $$Mat_{\mathcal{E}'}(Q) = P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} \times Mat_{\mathcal{E}}(Q) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Proposition 14.
Avec les mêmes notations que le théorème/définition précédent, $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ sont inversibles, et

$$(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$

Preuve: *Il suffit d'écrire*

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E).Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_E) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(id_E) = I_n.$$

3.2 Formule du changement de base

Théorème 15. *Soit* $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ *deux bases de* E, $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ *deux bases de* F *et* $f \in \mathcal{L}(E,F)$, *alors alors*

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

En particulier, si $E = F$ *et* $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ *et* $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$, *on a*

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}^{-1} Mat_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}.$$

Définition 9. Soit $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A et A' sont **semblables** s'il existe P inversible telle que: $A' = P^{-1}AP$.

Moralement, cela signifie que A et A' représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

4 Déterminant

4.1 Définitions et premières propriétés

Définition 10. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Une application ϕ de E^n dans $\mathbb{K}$ est dite alternée si $\phi(x_1,\dots,x_n)=0$ lorsque $(x_1,\dots,x_n)$ contient deux éléments égaux.

Proposition 16.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, ϕ linéaire par rapport à chacune des variables et alternée, alors $\forall(x_1,\dots,x_n)\in E^n$ et tout $\lambda_i\in\mathbb{K}$,

- $\varphi(x_1,\dots,\lambda_i x_i,\dots,x_n)=\lambda_i\varphi(x_1,\dots,x_n)$,
- $\varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)=-\varphi(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n)$
- $\varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)=\varphi\left(x_1,\dots,x_i+\sum_{i\neq j}\lambda_j x_j,\dots,x_n\right)$

Preuve:

- *Provient de la linéarité par rapport à la ième variable.*
- *On a* $\varphi(x_1,\dots,x_i+x_j,\dots,x_i+x_j,\dots,x_n)=0$. *On écrit ensuite :*

$$\begin{array}{ll} & \varphi(x_1,\dots,x_i+x_j,\dots,x_i+x_j,\dots,x_n)\\ = & \varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_i+x_j,\dots,x_n)+\varphi(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i+x_j,\dots,x_n)\\ \multicolumn{2}{l}{\textit{par linéarité par rapport à la ième variable}}\\ = & \varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_i,\dots,x_n)+\varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)\\ & +\varphi(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n)+\varphi(x_1,\dots,x_j,\dots,x_j,\dots,x_n)\\ = & \varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)+\varphi(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n)\\ \multicolumn{2}{l}{\textit{car } \varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_i,\dots,x_n)=0=\varphi(x_1,\dots,x_j,\dots,x_j,\dots,x_n)}\end{array}$$

  On a donc bien
  $\varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)=-\varphi(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n)$

- *On utilise la linéarité par rapport à la ième variable pour sortir la somme. Tous les termes de la somme seront nuls car il y aura deux coordonnées identiques dans les vecteurs.*

Remarque: on sait donc exactement comment est modifiée la valeur de $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ lorsque l'on fait une opération élémentaire sur la famille $(x_1,\dots,x_n)$.

Définition 11. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Il existe une unique application $\det_{\mathcal{B}}: E^n\to\mathbb{K}$, linéaire par rapport à chaque variable, alternée et telle que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})=1$.

4.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 12. Le déterminant de n vecteurs $(x_1,\dots,x_n)$ dans une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est :
$det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)$.

Proposition 17.
Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, alors

$$\det_{\mathcal{B}'}(x_1,\dots,x_n)=\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}(\S_\infty,\dots,\S_\backslash)$$

Cela provient de l'étude (hors programme) des formes n-linéaires alternées: leur ensemble est un ev de dimension 1.

Théorème 18. *Une famille de n vecteurs est liée ssi $det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)=0$.*
Par conséquent, $(x_1,\dots,x_n)$ est une base de E ssi $det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)\neq 0$.

Preuve: *Si la famille est liée, alors un des vecteurs est CL des autres donc le déterminant sera nul.*

Si la famille est libre, alors comme elle contient n vecteurs, c'est une base $\mathcal{B}'$ de E. On a donc

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}')=1=\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'),$$

donc $\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)=\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\neq 0$.

Définition 13. Pour un endomorphisme $f\in\mathcal{L}(E)$ où E est un ev de dimension finie, il existe un réel α tel que, pour tout $(x_1,\dots,x_n)$ et pour toute base $\mathcal{B}$ on ait :

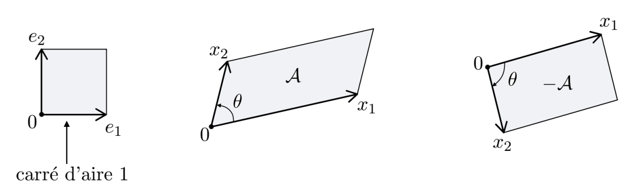
$$det_{\mathcal{B}}(f(x_1),\dots,f(x_n))=\alpha\, det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)$$

Ce réel α est appelé le déterminant de f. Il est noté $det(f)$.

Remarque Il faut bien noter que ce déterminant ne dépend pas de la base.

Interprétation géométrique:

1. **Lorsque $E=\mathbb{R}^2$.** Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ la base canonique, et $\mathcal{F}=(x_1,x_2)$ une famille de deux vecteurs. On note θ l'angle orienté entre x_1 et x_2.

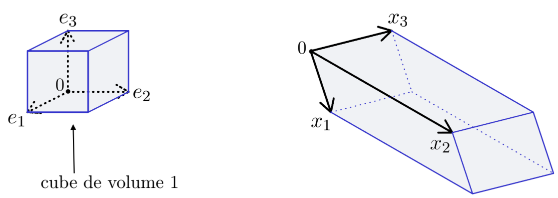


$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2)$ est l'aire algébrique du parallélogramme engendré par x_1 et x_2, c'est-à-dire:

- $+$ l'aire si $\theta \in [0; \pi]$;
- $-$ l'aire si $\theta \in [-\pi; 0]$.

Si x_1 et x_2 sont colinéaires, alors l'aire est nulle.

2. **Lorsque $E = \mathbb{R}^3$.** Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique, et $\mathcal{F} = (x_1, x_2, x_3)$ une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.



$\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, x_3)$ est le volume algébrique du parallélépipède engendré par x_1, x_2, x_3:

- positif si orienté comme (e_1, e_2, e_3);
- négatif sinon (et nul si coplanaires).

4.3 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 19.
Soit f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-ev E alors

- $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$
- $\det_{\mathcal{B}}(id_E) = 1$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$
- $\det(f) \neq 0 \iff f \in GL(E)$.

Preuve: *On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, par définition du déterminant donc* $\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

- *Cela découle des propriétés des n-formes linéaires alternées.*
- *On a* $\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$.
- *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*
$$\begin{aligned} \det(\lambda f) &= \det_{\mathcal{B}}(\lambda f(e_1), \dots, \lambda f(e_n)) \\ &= \lambda \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \lambda f(e_2), \dots, \lambda f(e_n)) \\ &= \lambda^2 \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), \lambda f(e_3), \dots, \lambda f(e_n)) \\ &= \dots \\ &= \lambda^n \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \\ &= \lambda^n \det(f) \end{aligned}$$
- *On a* $\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. *On raisonne par équivalence:*
$$\begin{aligned} f \textit{ est bijective} &\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n)) \textit{ est une base de } E \\ &\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n)) \textit{ est libre} \\ &\Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \det(f) \neq 0 \end{aligned}$$

On a bien montré l'équivalence souhaitée.

4.4 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 14. Soit A une matrice carrée de taille n, on appelle déterminant de A et on note $det(A)$ le déterminant des vecteurs colonnes de la matrice A dans la base canonique.

Remarque: Si A représente un endomorphisme f dans une base $\mathcal{B}$, les définitions coïncident, i.e. $det(A) = det(f)$.

On a alors que pour toute famille $(x_1, \dots, x_n)$ de E, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det(Mat_B(x_1, \dots, x_n))$.

On en déduit alors les propriétés suivantes qui découlent du paragraphe précédent:

Proposition 20.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

- Le déterminant de A est multiplié par -1 si l'on permute deux colonnes de A.
- Le déterminant est multiplié par λ si on multiplie une colonne par λ.
- Le déterminant ne change pas si on ajoute à une colonne de A une CL des autres colonnes.

puis

Proposition 21.
Soit $(A,B) \in M_n(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$, alors

- $det(A \times B) = det(A) \times det(B)$ (A et B sont des matrices carrées)
- $det(I_n) = 1$
- $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$
- A est inversible ssi $det(A) \neq 0$. Dans ce cas, $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$.

Théorème 22. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $det(A^T) = det(A)$.*

La conséquence est que l'on sait comment les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice modifie son déterminant! On peut donc alterner les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

Proposition 23.
Deux matrices semblables ont même déterminant.

4.5 Calcul pratique

4.5.1 En dimension 2 et 3

En dimension 2 on a:

$$\det\begin{vmatrix} |a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

En dimension 3 on peut utiliser la règle de Sarrus :

$$\det\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - gec - hfa - dbi$$

remarque Pour une matrice de taille n, il y a $n!$ calculs à faire. N'espérez pas généraliser la règle de Sarrus.

4.5.2 Matrice triangulaire

Proposition 24.
Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes diagonaux.

En pratique, on peut faire des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes pour se ramener à une matrice triangulaire.

4.5.3 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

On fixe $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geqslant 2$.

Notation: Pour $i,j \in [\![1;n]\!]$, on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice A privée de sa i-ième ligne et de sa j-ième colonne.

Exemple: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$. On a :

$$\Delta_{1,1} = \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} \qquad \Delta_{3,2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 13 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

Théorème 25.

1. *Soit $i \in [\![1;n]\!]$. On a $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$ (développement par rapport à la i-ième ligne)*
2. *Soit $j \in [\![1;n]\!]$. On a $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$ (développement par rapport à la j-ième colonne)*

Preuve admise en PCSI (et difficile).

Exemple: Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Développez par rapport

- à la première ligne
- à la deuxième ligne
- à la première colonne
- *Développement par rapport à la première ligne :*

$$\det(A) = 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -(-2+6) = -4$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \boxed{0} \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- *Développement par rapport à la deuxième ligne :*

$$\det(A) = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & \boxed{3} \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- *Développement par rapport à la première colonne:*

$$\det(A) = 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ \boxed{-2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Conseil: pour le $(-1)^{i+j}$, retenir le damier des $(+1)$, (-1) :

+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+

diagonale de $\oplus$