Lycée du Parc
PCSI 842
DS 9

Année 2023-2024

Devoir surveillé 9, sujet 1.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{rg}(f)$.
2. Calculer $\det(A - \lambda I_3)$.
3. Déterminer les réels λ tels que $\ker(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3})$.
5. Montrer que $(1, -1, 1) \in \ker(f + id_{\mathbb{R}^3})$, en déduire une base de $\ker(f + id_{\mathbb{R}^3})$.
6. Montrer que $C = ((1,1,1), (1,-1,1), (4,2,1))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Écrire la matrice de f dans cette base C.
8. En déduire qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $PDP^{-1} = A$. On explicitera les matrices P et D.
9. On considère l'ensemble $E(D) = \{M \in M_3(\mathbb{R}), DM = MD\}$. Déterminer cet ensemble. On précisera une base et sa dimension.
10. Soit $\Delta \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $\Delta^2 = D + \lambda I_3$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que Δ est diagonale.
11. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que l'équation $N^2 = A + \lambda I_3$ admette au moins une solution $N \in M_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2.

Soit α, β deux réels strictement positifs. On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$. On souhaite notamment étudier la nature de cette série, selon les valeurs de α et β. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} u_k$.

1. Supposons $\alpha > 1$ (et $\beta > 0$ quelconque). Quelle est la nature de $\sum u_n$?

2. Supposons $\alpha < 1$ (et $\beta > 0$ quelconque). Montrer que $\sum u_n$ est divergente.
   Indication : écrire α sous la forme $1 - \varepsilon$

3. On suppose dans cette question que $\alpha = 1$, et $\beta \neq 1$. On pose la fonction $h : t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$, et on note, pour $(a, x) \in \left]1, +\infty\right[^2 : I(a, x) = \displaystyle\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$.

   (a) Justifier l'existence de $I(a, x)$.

   (b) A l'aide du changement de variable $u = \ln(t)$, calculer $I(a, x)$, et déterminer sa limite lorsque $x \to +\infty$. On distinguera deux cas, selon la valeur de β.

   (c) Pour $n \geqslant 3$, établir l'encadrement

   $$I(3, n+1) \leqslant S_n \leqslant I(2, n)$$

   et en déduire les valeurs de β pour lesquelles la série $\sum u_n$ est convergente.

   (d) Montrer que lorsqu'elle est divergente, on a $S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{(\ln n)^{1-\beta}}{1 - \beta}$.

4. On suppose dans cette question que $\alpha = \beta = 1$, de sorte que $S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k \ln k}$. L'objectif est de montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ (que l'on ne cherchera pas à calculer), telle que

   $$S_n \underset{n \to +\infty}{=} \ln(\ln n) + C + o(1)$$

   (a) Montrer que cela revient à prouver que la série de terme général

   $$t_n = \frac{1}{n \ln n} - (\ln(\ln n) - \ln(\ln(n-1)))$$

   est convergente.

   (b) Montrer que $\ln(n-1) \underset{n \to +\infty}{=} \ln(n) - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

   (c) En déduire que $t_n = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2 \ln n}\right)$, et conclure.

5. En synthétisant les résultats des questions précédentes, expliquer brièvement pour quelles valeurs de α et β la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 3.

On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et u un endomorphisme de E.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, u^k désigne l'endomorphisme $\underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$, avec la convention $u^0 = \mathrm{id}_E$.

On fixe x_0 un vecteur non nul de E, et on pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $x_k = u^k(x_0)$ et le sev : $E_k = \mathrm{Vect}(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) = \mathrm{Vect}(x_0, u(x_0), \ldots, u^{k-1}(x_0))$

Partie I - Étude des E_k

1. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E_k \subset E_{k+1}$.
2. Justifier qu'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que la famille $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ est liée.
3. On note désormais (et dans tout l'exercice) p le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que la famille $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ soit liée.
   (a) Justifier que $\dim(E_p) = p$, et préciser une base de E_p.
   (b) Justifier qu'il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que
   $$x_p = a_0 x_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_{p-1} x_{p-1}.$$
   (c) Montrer que $E_{p+1} = E_p$.
4. (a) Montrer que E_p est stable par u (c'est-à-dire que $\forall y \in E_p$, $u(y) \in E_p$).
   (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E_{p+k} = E_p$.

Partie II - Un cas particulier

On suppose dans cette partie que $p = n$ et que $u^n(x_0) = x_0$.

5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^n(x_k) = x_k$.
6. En déduire que $u^n = \mathrm{id}_E$.
7. Justifier que u est un automorphisme de E, et préciser u^{-1}.
8. Déterminer la matrice de u, puis de u^{-1}, dans la base $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ de E.

Partie III - Restriction de u à E_p

On note désormais $\hat{u}$ l'endomorphisme de E_p obtenu comme restriction de u à E_p, c'est-à-dire

$$\hat{u} : \left(\begin{array}{ccc} E_p & \longrightarrow & E_p \\ y & \longmapsto & u(y) \end{array} \right)$$

Comme il a été démontré que E_p est stable par u, cet endomorphisme $\hat{u}$ est bien défini.

9. (a) A l'aide des a_i définis question 3b, déterminer la matrice de $\hat{u}$ dans la base $(x_0, \ldots, x_{p-1})$.
   (b) Justifier que $\mathrm{rg}(\hat{u}) \geqslant p - 1$, et montrer que ce rang vaut p ssi $a_0 \neq 0$.
10. Montrer que la famille $(\mathrm{Id}, \hat{u}, \ldots, \hat{u}^{p-1})$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E_p)$.
11. Montrer, pour tout $k < p$:$\hat{u}^p(x_k) = a_0 x_k + a_1 \hat{u}(x_k) + \cdots + a_{p-1} \hat{u}^{p-1}(x_k)$
12. En déduire que $\hat{u}^p = a_0 \mathrm{Id} + a_1 \hat{u} + \cdots + a_{p-1} \hat{u}^{p-1}$
13. Montrer que si $a_0 \neq 0$, $\hat{u}$ est un automorphisme, et préciser $\hat{u}^{-1}$.

Correction du DS n 9, sujet 1

Exercice 1 *On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.*

1. *Déterminer $Ker(f)$, $Im(f)$ et $rg(f)$.*

   Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors

   $$\begin{aligned} AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z &= 0 \\ x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y = z = 0 \\ &\Leftrightarrow X = (0) \end{aligned}$$

   On en déduit que $\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ puis $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Par le théorème du rang, on a donc $\mathrm{rg}(f) = 3$ donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

   Je ne sais plus comment vous dire de rédiger correctement ce genre de questions. Si vous souhaitez vraiment perdre des points sur ce genre de questions, tant pis pour vous. Pour ce qui est de l'image, me dire que c'est l'espace vectoriel engendré par les colonnes est correct mais insatisfaisant (car écrit ainsi, cela ne saute pas aux yeux que c'est égal à $\mathbb{R}^3$.

2. *Calculer* $\det(A - \lambda I_3)$.

   $$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 1-\lambda & -\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix} C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & -\lambda - 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

   Je vous ai dit que Sarrus en donnerai pas la factorisation, ceux qui l'ont appliqué sont visiblement joueurs, heureusement que les racines ici étaient sympathiques.

3. *Déterminer les réels λ tels que* $\ker(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
   On sait que

   $$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\} &\Leftrightarrow f - \lambda id_{\mathbb{R}^3} \text{ non injective} \\ &\Leftrightarrow f - \lambda id_{\mathbb{R}^3} \text{ non bijective} \\ &\qquad \text{car c'est un endo d'un ev de dimension finie} \\ &\Leftrightarrow \det(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_3) = 0 \end{aligned}$$

   On a vu à la question précédente que $\det(A - I_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 1, 2\}$. Ainsi,

   $$\mathrm{Ker}(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 1, 2\}$$

4. *Déterminer une base de Ker*$(f - id_{\mathbb{R}^3})$.
Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker}(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}) &\Leftrightarrow f(X) = X \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z &= x \\ x &= y \\ y &= z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y = z \end{aligned}$$

On a donc $\operatorname{Ker}(f - \lambda id_{\mathbb{R}^3}) = \operatorname{Vect}((1, 1, 1))$.

5. *Montrer que* $(1, -1, 1) \in \ker(f + id_{\mathbb{R}^3})$*, en déduire une base de* $\ker(f + id_{\mathbb{R}^3})$.
Á l'aide de la matrice, on calcule $f(1, -1, 1) = -(1, -1, 1)$, on a donc bien $(1, -1, 1) \in \ker(f + id_{\mathbb{R}^3})$. Par ailleurs, la matrice associée

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

contient deux colonnes non colinéaires. On en déduit que $\operatorname{rg}(A + I_3) \geqslant 2$ donc $\operatorname{rg}(f + \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}) \geqslant 2$. Avec le thm du rang, cela impose $\dim(\operatorname{Ker}(f + id_{\mathbb{R}^3}) \leqslant 1$ et comme on a trouvé un vecteur non nul appartenant à ce noyau, on en déduit qu'il est de dimension 1 et que le vecteur $(1, -1, 1)$ en forme une base.

6. *Montrer que* $C = ((1, 1, 1), (1, -1, 1), (4, 2, 1))$ *forme une base de* $\mathbb{R}^3$.
La famille étant de cardinal 3, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\alpha(1, 1, 1) + \beta(1, -1, 1) + \gamma(4, 2, 1) = (0, 0, 0),$$

alors

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 4\gamma &= 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 4\gamma &= 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma &= 0 \quad L_3 \leftarrow -L_3 + L_1 \\ 3\gamma &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta &= 0 \\ \alpha - \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

La famille est donc bien libre, de cardinal 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

7. *Écrivez la matrice de f dans cette base C.*
On sait déjà que $f(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$ et $f(1, -1, 1) = -(1, -1, 1)$. On calcule $f(4, 2, 1)$, on trouve $2(4, 2, 1)$, on en déduit que

$$Mat_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8. *En déduire qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $PDP^{-1} = A$. On explicitera les matrices P et D.*
D'après la formule du changement de base, en notant B la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a

$$A = Mat_B(f) = P_{BC} Mat_C(f) P_{CB} = P_{BC} Mat_C(f) P_{BC}^{-1} = PDP^{-1},$$

avec $P = P_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Certains se sont trompés dans la formule du changement de base et ont donc cru que j'attendais l'inverse de la matrice "facile à déterminer", c'est dommage.

9. *On considère l'ensemble $E(D) = \{M \in M_3(\mathbb{R}), DM = MD\}$. Déterminer cet ensemble. On précisera une base et sa dimension.*

Soit $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_3(\mathbb{R})$. Alors

$$(DM)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} m_{kj} = d_{ii} m_{ij},$$

et

$$(MD)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} d_{kj} = m_{ij} d_{jj}.$$

On en déduit que

$$M \in E(D) \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2, m_{ij}(d_{ii} - d_{jj}) = 0.$$

Or si $i \neq j$, $d_{ii} \neq d_{jj}$, on a en déduit donc que

$$M \in E(D) \Leftrightarrow \forall i \neq j, m_{ij} = 0 \Leftrightarrow M \text{ est diagonale}$$

Par équivalence, on a montré que $E(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales.

10. *Soit $\Delta \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $\Delta^2 = D + \lambda I_3$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que Δ est diagonale.*
On va montrer que Δ commute avec D afin d'utiliser la question précédente. On a

$$\Delta D = \Delta(\Delta^2 - \lambda I_3) = \Delta^3 - \lambda \Delta = \left(\Delta^2 - \lambda I_3\right) \Delta = D \Delta.$$

On a bien $\Delta \in E(D)$ donc Δ est diagonale.

11. *Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que l'équation $N^2 = A + \lambda I_3$ admette au moins une solution $N \in M_3(\mathbb{R})$.*

Commençons par chercher à quelle condition il existe Δ telle que $\Delta^2 = D + \lambda I_3$. D'après la question précédente, Δ est une matrice diagonale $\text{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, on a donc

$$\Delta^2 = \text{diag}(\delta_1^2, \delta_2^2, \delta_3^2).$$

Ainsi, Δ existe si et seulement s'il existe $(\delta_1, \delta_2, \delta_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} \delta_1^2 & = \lambda + 1 \\ \delta_2^2 & = \lambda - 1 \\ \delta_3^2 & = \lambda + 2 \end{cases}$$

Une CNS d'existence de Δ est donc $\lambda - 1 \geqslant 0$ donc $\lambda \geqslant 1$.

Par ailleurs, si $N \in M_3(\mathbb{R})$, on a

$$N^2 = A + \lambda I_3 \Leftrightarrow P^{-1} N^2 P = P^{-1}(A + \lambda I_3) P \Leftrightarrow \left(P^{-1} N P\right)^2 = \underbrace{P^{-1} A P}_{=D} + \lambda I_3,$$

ainsi,

$$\exists N \in M_3(\mathbb{R}), N^2 = A + \lambda I_3 \Leftrightarrow \exists \Delta \in M_3(\mathbb{R}), \Delta^2 = D + \lambda I_3 \Leftrightarrow \lambda \geqslant 1.$$

La CNS cherchée est donc $\lambda \geqslant 1$.

Exercice 2 Attention à bien distinguer la série $\sum u_n$ de la somme partielle S_n (ce qui revient à confondre une suite et son terme général).

1. On remarque que $\sum u_n$ est une série à termes positifs. De plus, pour tout $n \geqslant 3$:

$$\begin{array}{lll} \ln(n) \geqslant 1 & \text{donc} & (\ln n)^\beta \geqslant 1^\beta = 1 \\ & \text{donc} & n^\alpha (\ln n)^\beta \geqslant n^\alpha \\ & \text{donc} & \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}. \end{array}$$

Or, comme $\alpha > 1$, $\frac{1}{n^\alpha}$ est le terme général d'une série convergente. Par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, $\sum u_n$ est convergente.

Il est impératif de citer correctement le théorème utilisé

2. Posons $\varepsilon = 1 - \alpha > 0$ de sorte que $\alpha = 1 - \varepsilon$. On a :

$$\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \frac{1}{n^{1-\varepsilon} (\ln n)^\beta} = \frac{1}{n} \times \underbrace{\frac{n^\varepsilon}{(\ln n)^\beta}}_{= v_n}$$

Or, comme $\varepsilon > 0$, on a par croissance comparée : $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Donc en particulier, à partir d'un certain rang, $v_n \geqslant 1$, et $u_n \geqslant \frac{1}{n}$.
Or, $\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série divergente. Donc par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.
C'est la partie du thm que vous n'aimez pas, personne ne l'a montré (correctement).

3. (a) Si $t \in \mathbb{R}$, le nombre $\ln(t)$ est défini si $t > 0$, et $t(\ln t)^\beta$ s'annule ssi $t = 1$. La fonction h est donc continue sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, par quotient de fonctions continues. En particulier, si $a, x \in]1, +\infty[$, elle est continue sur $[a, x]$ (ou $[x, a]$). Donc $I(a, x)$ est bien définie.

   On sort de DS où j'ai dit qu'il était impératif de préciser que la fonction était continue sur son intervalle d'intégration, j'ai donc été intraitable.

   (b) Fixons $a, x \in]1, +\infty[$. En posant le changement de variable $u = \ln(t)$; $du = \frac{dt}{t}$, on a :

$$\begin{aligned} I(a,x) &= \int_{\ln(a)}^{\ln(x)} \frac{du}{u^\beta} \\ &= \left[\frac{1}{-\beta+1} u^{-\beta+1} \right]_{\ln a}^{\ln x} \qquad \text{(on a bien } \beta \neq 1\text{)} \\ &= \frac{1}{1-\beta} \left[(\ln x)^{1-\beta} - (\ln a)^{1-\beta} \right] \qquad \text{(forme 1)} \\ &= \frac{1}{\beta - 1} \left[\frac{1}{(\ln a)^{\beta-1}} - \frac{1}{(\ln x)^{\beta-1}} \right] \qquad \text{(forme 2)} \end{aligned}$$

   D'où les deux cas suivants.

   - 1[er] cas : si $\beta < 1$, c'est-à-dire $1 - \beta > 0$.
     D'après la forme 1, et comme $(\ln x)^{1-\beta} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $I(a, x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   - 2[nd] cas : si $\beta > 1$, c'est-à-dire $\beta - 1 > 0$.
     D'après la forme 2, et comme $\frac{1}{(\ln x)^{\beta-1}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $I(a, x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\beta-1} \cdot \frac{1}{(\ln a)^{\beta-1}}$.

(c) On remarque que pour tout $n \geqslant 3$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} h(k)$.

Fixons $n \geqslant 3$. La fonction h est positive et décroissante sur $[2, +\infty[$. On a pour tout $k \in [\![3, n]\!]$ les deux raisonnements suivants.

- ▶ Pour tout $t \in [k, k+1]$, $h(t) \leqslant h(k)$. Par croissance de l'intégrale, on a donc
$$\int_k^{k+1} h(t)dt \leqslant \int_k^{k+1} h(k)dt = h(k).$$
- ▶ Pour tout $t \in [k-1, k]$, $h(k) \leqslant h(t)$. Par croissance de l'intégrale, on a donc
$$\int_{k-1}^{k} h(k)dt \leqslant \int_{k-1}^{k} h(t)dt \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad h(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} h(t)dt.$$

En sommant l'encadrement $\displaystyle\int_k^{k+1} h(t)dt \leqslant h(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} h(t)dt$ sur $k \in [\![3, n]\!]$:
$$\sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} h(t)dt \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} h(t)dt$$
puis, par la relation de Chasles :
$$\int_3^{n+1} h(t)dt \leqslant S_n \leqslant \int_2^{n} h(t)dt$$
c'est-à-dire $I(3, n+1) \leqslant S_n \leqslant I(2, n)$.

On a donc les deux cas suivants.

- 1^{er} cas : si $\beta < 1$.
  On a $I(3, n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ d'après la question précédente. Donc par comparaison, $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. $\sum u_n$ est donc divergente.
- 2^{nd} cas : si $\beta > 1$.
  La suite $\big(I(2, n)\big)_{n\geqslant 3}$ converge, d'après la question précédente, donc est en particulier majorée (mettons pas $M \in \mathbb{R}$). La suite $(S_n)_{n\geqslant 3}$ est donc croissante (série à termes positifs) et majorée par M. Donc elle converge. Autrement dit, $\sum u_n$ est convergente.

(d) Plaçons-nous dans le cas où $\beta < 1$, et partons de l'encadrement
$$I(3, n+1) \leqslant S_n \leqslant I(2, n).$$
On a :
$$\begin{aligned} I(3, n+1) &= \frac{1}{1-\beta}\Big[(\ln(n+1))^{1-\beta} - (\ln 3)^{1-\beta}\Big] \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta} \\ \text{et} \quad I(2, n) &= \frac{1}{1-\beta}\Big[(\ln n)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}\Big] \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta}. \end{aligned}$$
Cela implique que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta}$.

En effet, posons $w_n = \frac{(\ln n)^{1-\beta}}{1-\beta}$. On a
$$I(3, n+1) \leqslant S_n \leqslant I(2, n) \qquad \text{donc} \qquad \frac{I(3, n+1)}{w_n} \leqslant \frac{S_n}{w_n} \leqslant \frac{I(2, n)}{w_n}.$$
Or, $\frac{I(3,n+1)}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\frac{I(2,n)}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc par théorème des gendarmes, $\frac{S_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, c'est-à-dire $S_n \sim w_n$.

4. (a) Si $C \in \mathbb{R}$, la phrase $S_n = \ln(\ln n) + C + o(1)$ équivaut à $S_n - \ln(\ln n) = C + o(1)$, c'est-à-dire $S_n - \ln(\ln n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} C$.

Tout revient donc à montrer que la suite $\big(S_n - \ln(\ln n)\big)_{n \geqslant 3}$ converge. Or :

- $S_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k \ln k}$;
- Par télescopage, $\ln(\ln n) = \ln(\ln 2) + \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \ln(\ln k) - \ln(\ln(k-1))$.

Donc $S_n - \ln(\ln n) = \ln(\ln 2) + \displaystyle\sum_{k=3}^{n} t_k$.

Cela montre en particulier que la convergence de la suite $\big(S_n - \ln(\ln n)\big)_{n \geqslant 3}$ est équivalente à celle de la série $\sum t_n$.

(b) On a :

$$\ln(n-1) \;=\; \ln\left(n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \;=\; \ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Or,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &\underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &\underset{x \to 0}{=} x + x^2 \underbrace{\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right)}_{=\mathcal{O}(1)} \\ &\underset{x \to 0}{=} x + \mathcal{O}(x^2) \end{aligned}$$

Donc $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et par suite, $\ln(n-1) = \ln(n) - \dfrac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

(c) On a donc :

$$\begin{aligned} \ln(\ln(n-1)) &= \ln\left[\ln(n) - \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= \ln\left[\ln(n)\left(1 - \frac{1}{n \ln n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right)\right)\right] \\ &= \ln(\ln n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n \ln n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right)\right) \end{aligned}$$

On écrit alors $\ln(1 + X_n) = X_n + \mathcal{O}(X_n^2)$ pour $X_n = -\frac{1}{n \ln n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right)$, ce qui donne :

$$\ln(\ln(n-1)) \;=\; \ln(\ln n) - \frac{1}{n \ln n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right)$$

car comme $X_n \sim -\frac{1}{n \ln n}$, on a $X_n^2 \sim \frac{1}{n^2 \ln^2 n}$, qui est négligeable devant $\frac{1}{n^2 \ln n}$.

Cette égalité est bien équivalente à $t_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right)$.

Cela implique $|t_n| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right)$. Or, $\frac{1}{n^2 \ln n}$ est le terme général d'une série convergente, car $0 \leqslant \frac{1}{n^2 \ln n} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Donc par comparaison asymptotique sur les séries à termes positifs, $\sum |t_n|$ est convergente, ce qui implique que $\sum t_n$ est convergente.

5. La question 4 a montré que lorsque $\alpha = \beta = 1$, $\sum u_n$ diverge, puisque $S_n \sim \ln(\ln n)$, donc $S_n \to +\infty$.

La série $\sum u_n$ converge donc ssi on est dans l'un des deux cas suivants :

- $\alpha > 1$;
- $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 3 Partie I - Etude des E_k

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$E_k = \text{Vect}(x_0, \ldots, x_{k-1}) \qquad \text{et} \qquad E_{k+1} = \text{Vect}(x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k)$$

Soit $y \in \mathbb{E}_k$. Par définition, il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{K}$ tel que :

$$y = \lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_{k-1} x_{k-1}$$

donc :

$$y = \lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_{k-1} x_{k-1} + 0.x_k$$

ce qui prouve que $y \in E_{k+1}$.

2. On pose $k = n$. La famille $(x_0, \ldots, x_n)$ est une famille de $n + 1$ vecteurs dans un espace de dimension n. Par théorème, elle est liée. Ainsi, l'ensemble des $\{k \in \mathbb{N}, (x_0, \ldots, x_k) \text{ liée } \}$ est non vide.

3. (a) Par définition de p :
   - la famille $(x_0, \ldots, x_{p-1}, x_p)$ est liée ;
   - la famille $(x_0, \ldots, x_{p-1})$ est **libre**.

   Donc E_p, qui vaut $\text{Vect}(x_0, \ldots, x_{p-1})$, est de dimension p, et une base de E_p est $(x_0, \ldots, x_{p-1})$.

   (b) Comme $(x_0, \ldots, x_{p-1}, x_p)$ est liée, il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}, \lambda_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$, différent de $(0, \ldots, 0, 0)$, tel que :

$$\lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_{p-1} x_{p-1} + \lambda_p x_p = 0_E \qquad (E)$$

   λ_p est nécessairement non nul. En effet (par l'absurde), si $\lambda_p = 0$, on a :

$$\lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_{p-1} x_{p-1} = 0_E$$

   et alors par liberté des $x_0, \ldots, x_{p-1}$, tous les λ_i sont nuls. Or, par définition des λ_i, ils ne sont pas tous nuls. Contradiction.
   λ_p est donc non nul, et donc (E) devient :

$$x_p = -\frac{\lambda_0}{\lambda_p} x_0 - \cdots - \frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p} x_{p-1}$$

   Il suffit donc de poser $a_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_p}$, pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$ pour obtenir ce qu'on veut.

   Certains m'ont évoqué le fait que la famille $(x_0, \ldots, x_{p-1})$ était libre, ce qui n'implique rien sur l'existence d'une CL, d'autres ont simplement dit que la famille $(x_0, \ldots, x_p)$ était liée ce qui ne suffit pas. Cela implique qu'un des vecteurs est CL des autres, il faut ensuite montrer que c'est nécessairement x_p.

   (c) On sait déjà que $E_p \subset E_{p+1}$. Montrons $E_{p+1} \subset E_p$.
   Soit $y \in E_{p+1}$. Il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$y = \underbrace{\lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_{p-1} x_{p-1}}_{\hat{=}\, a} + \lambda_p x_p$$

   Or, $a \in E_p$ et d'après la question précédente, $x_p \in E_p$. Donc par combinaison linéaire, $y \in E_p$.

4. (a) Soit $y \in E_p$. Par définition, il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}$ tels que

$$y = \lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_{p-1} x_{p-1}$$

Donc par linéarité

$$\begin{aligned} u(y) &= \lambda_0 u(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} u(x_{p-1}) \\ &= \lambda_0 x_1 + \cdots + \lambda_{p-1} x_p \end{aligned}$$

Donc $u(y) \in E_{p+1}$, et comme $E_{p+1} = E_p$, on a bien $u(y) \in E_p$.

(b) Fixons $k \in \mathbb{N}$. D'après la question 1, on a les inclusions :

$$E_p \subset E_{p+1} \subset \ldots \subset E_{p+k-1} \subset E_{p+k}$$

et donc $E_p \subset E_{p+k}$. Reste à montrer l'inclusion $E_{p+k} \subset E_p$. On a :

$$E_{p+k} = \mathrm{Vect}(x_0, \ldots, x_{p-1}, x_p, \ldots, x_{p+k-1})$$

Or, $x_0 \in \mathbb{E}_p$ et E_p est stable par u. Donc par récurrence immédiate, tous les $u^i(x_0)$, où $i \in \mathbb{N}$, appartiennent à E_p. Autrement dit, tous les x_i appartiennent à E_p.
Donc toute CL des $x_0, \ldots, x_{p+k-1}$ appartient à E_p, ce qui prouve que $E_{p+k} \subset E_p$.
Conclusion : $E_{p+k} = E_p$.

Partie II - Un cas particulier

5. Soit $k \in \mathbb{N}$. On applique u^k à l'égalité $u^n(x_0) = x_0$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} u^{n+k}(x_0) = u^k(x_0) \quad \text{c'est-à-dire : } \quad & u^n\big(u^k(x_0)\big) = x_k \\ \text{c'est-à-dire : } \quad & u^n(x_k) = x_k. \end{aligned}$$

6. La question précédente montre que les endomorphismes u^n et id_E sont égaux en chacun des x_k. Or, $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ est une base de E, car elle est libre ($p = n$) et de cardinal n. Par théorème ("une AL est entièrement caractérisée par l'image d'une base"), ces endomorphismes sont égaux. Donc $u^n = \mathrm{id}_E$.

7. On a donc $u \circ u^{n-1} = u^{n-1} \circ u = \mathrm{id}_E$. Cela montre que u est bijectif, et que $u^{-1} = u^{n-1}$.

8. Notons $\mathcal{X} = (x_0, \ldots, x_{n-1})$. Par hypothèse, $u(x_{n-1}) = u(u^{n-1}(x_0)) = u^n(x_0) = x_0$. On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} u(x_0) & = & x_1 & = & 0.x_0 & +1.x_1 & +0.x_2 & +\cdots+ & 0.x_{n-1} \\ u(x_1) & = & x_2 & = & 0.x_0 & +0.x_1 & +1.x_2 & +\cdots+ & 0.x_{n-1} \\ \vdots & & & & & & & \ddots & \\ u(x_{n-2}) & = & x_{n-1} & = & 0.x_0 & +0.x_1 & +0.x_2 & +\cdots+ & 1.x_{n-1} \\ u(x_{n-1}) & = & x_0 & = & 1.x_0 & +0.x_1 & +0.x_2 & +\cdots+ & 0.x_{n-1} \end{array} \right.$$

Donc

$$(u)_{\mathcal{X},\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour u^{-1}, on a : $\left\{\begin{array}{ccc} u^{-1}(x_0) & = & x_{n-1} \\ u^{-1}(x_1) & = & x_0 \\ u^{-1}(x_2) & = & x_1 \\ \vdots & & \vdots \\ u^{-1}(x_{n-1} & = & x_{n-2} \end{array}\right.$ donc $(u^{-1})_{\mathcal{X},\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

On attend un minimum de justification lorsque l'on vous demande une matrice.

Partie III - Restriction de u à E_p

9. (a) Notons $\mathcal{B} = (x_0, \ldots, x_{p-1})$. On a :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \hat{u}(x_0) & = & x_1 & = & 0.x_0 & +1.x_1 & +0.x_2 & +\cdots+ & 0.x_{p-1} \\ \hat{u}(x_1) & = & x_2 & = & 0.x_0 & +0.x_1 & +1.x_2 & +\cdots+ & 0.x_{p-1} \\ \vdots & & & & & & & \ddots & \\ \hat{u}(x_{p-2}) & = & x_{p-1} & = & 0.x_0 & +0.x_1 & +0.x_2 & +\cdots+ & 1.x_{p-1} \\ \hat{u}(x_{p-1}) & = & x_p & = & a_0x_0 & +a_1x_1 & +a_2x_2 & +\cdots+ & a_{p-1}x_{p-1} \end{array}\right.$$

Donc

$$(\hat{u})_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{bmatrix}$$

(b) Les $p-1$ premières colonnes sont clairement libres. Le rang de cette matrice est donc supérieur à $p-1$, et c'est donc le cas aussi pour le rang de $\hat{u}$.
Par ailleurs, $\hat{u}$ est de rang p ssi le déterminant de sa matrice représentative est non nul.
Or, par développement sur la première ligne, on a :

$$\det((\hat{u})_{\mathcal{B},\mathcal{B}}) = (-1)^{p-1} \times a_0 \times \det(I_{p-1}) = (-1)^{p-1} a_0$$

Ce déterminant est nul ssi $a_0 = 0$. Donc $\hat{u}$ est de rang p ssi $a_0 \neq 0$.
On peut aussi dire que si $a_0 = 0$, la matrice n'est pas inversible donc $\mathrm{rg}(\hat{u}) = p-1$ et si $a_0 \neq 0$, les colonnes forment une famille échelonnée donc libre, de cardinal p.

10. Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1} \in \mathbb{K}$. Supposons que l'on a :

$$\lambda_0 \mathrm{id}_E + \lambda_1 \hat{u} + \cdots + \lambda_{p-1}\hat{u}^{p-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

On évalue cette égalité en x_0 pour obtenir :

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{p-1}x_{p-1} = 0_E$$

Or, la famille $(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ est libre. Donc cette égalité implique que tous les λ_i sont nuls.

11. On sait que

$$x_p = a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_{p-1}x_{p-1}$$

c'est-à-dire

$$\hat{u}^p(x_0) = a_0x_0 + a_1\hat{u}(x_0) + \cdots + a_{p-1}\hat{u}^{p-1}(x_0)$$

Fixons $k < p$. On applique $\hat{u}^k$ à l'égalité précédente. Par linéarité :

$$\hat{u}^{p+k}(x_0) = a_0\hat{u}^k(x_0) + a_1\hat{u}^{k+1}(x_0) + \cdots + a_{p-1}\hat{u}^{p+k-1}(x_0)$$

ce qu'on peut ré-écrire :

$$\hat{u}^p\big(\hat{u}^k(x_0)\big) = a_0\hat{u}^k(x_0) + a_1\hat{u}\big(\hat{u}^k(x_0)\big) + \cdots + a_{p-1}\hat{u}^{p-1}\big(\hat{u}^k(x_0)\big)$$

c'est-à-dire :

$$\hat{u}^p(x_k) = a_0x_k + a_1\hat{u}(x_k) + \cdots + a_{p-1}\hat{u}^{p-1}(x_k)$$

12. La question précédente montre que les endomorphismes $\hat{u}^p$ d'une part et $a_0\mathrm{id}_E + a_1\hat{u} + \cdots + a_{p-1}\hat{u}^{p-1}$ d'autre part sont égaux sur chacun des vecteurs x_k. Or, $(x_0, \ldots, x_{p-1})$ est une base de E_p. Par théorème ("une AL est entièrement caractérisée par l'image d'une base"), ces deux endomorphismes sont donc égaux.

    Beaucoup de confusion entre vecteurs et applications linéaires dans cette question. Attention, $\mathcal{L}(E_p)$ est de dimension p^2 et non pas p.

13. Supposons que $a_0 \neq 0$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} a_1\hat{u} + \cdots + a_{p-1}\hat{u}^{p-1} - \hat{u}^p &= -a_0\mathrm{id}_E \\ \text{donc}\quad \hat{u}\circ\big(a_1\mathrm{id}_E + \cdots + a_{p-1}\hat{u}^{p-2}\big) &= -a_0\mathrm{id}_E \\ \text{donc}\quad \hat{u}\circ\left(\frac{-1}{a_0}\big(a_1\mathrm{id}_E + \cdots + a_{p-1}\hat{u}^{p-2}\big)\right) &= \mathrm{id}_E \end{aligned}$$

    On montre de même que $\left(\frac{-1}{a_0}\big(a_1\mathrm{id}_E + \cdots + a_{p-1}\hat{u}^{p-2}\big)\right)\circ\hat{u} = \mathrm{id}_E$.
    $\hat{u}$ est donc bijectif, et $u^{-1} = \frac{-1}{a_0}\big(a_1\mathrm{id}_E + \cdots + a_{p-1}\hat{u}^{p-2}\big)$.