Correction du TD n 22

Correction 1 1. symétrique, bilinéaire, positive et définie en se souvenant que $P^{(k)}(0) = k!a_k$.

2. Symétrique, bilinéaire, positive. Si $< f, f >= 0$ alors la fonction positive $t \mapsto (1-t^2)f^2(t)$ est nulle sur $[0,1]$ donc $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1[$ et, par continuité de f, f est nulle sur $[0,1]$.

3. Si $< f, f >= 0$, $f'^2(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$ donc f est constante sur $[0,1]$ et comme $f(0) = 0$, on a f nulle

Correction 2 C'est une forme symétrique, linéaire par rapport à la première variable (par linéarité du produit matriciel et de la trace) donc bilinéaire. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on note $B =^{\perp} A = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Alors par le formule du produit matriciel, on a

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj},$$

donc $\mathrm{Tr}(^{\perp}A) = \sum_{1 \leqslant i,k \leqslant} a_{ki}^2$. On a donc bien $(A, A) \geqslant 0$ et si $(A, A) = 0$, alors A est la matrice nulle donc c'est bien un produit scalaire.

Correction 3 1. Si $< u_i, u_j >= 1$ pour tout i, j, alors pour i, j quelconque, $||u_i - u_j||^2 = 1 - 2 + 1 = 0$ donc $u_i = u_j$ ce qui est absurde. donc $a \neq 1$.

2. On a $||v||^2 = \sum_{i,j} < u_i, u_j >= \sum_{i \neq j} a + n$ on a donc $(n^2 - n)a + n \geqslant 0$ donc $a \geqslant -\dfrac{n}{n^2 - n}$ d'où le résultat.

3. Pour tout $i, k \in [\![2, n]\!]$ on a

$$< u_i - u_1, u_k >=< u_i, u_k > - < u_1, u_k >= \begin{cases} 0 & \text{si } k = i \\ 1 - a & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose qu'il existe des réels λ_i non tous nuls tels que $\sum \lambda_i (u_i - u_1) = 0_E$, alors pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $\sum \lambda_i < u_i - u_1, u_k >= 0$ donc $\lambda_k(1 - a) = 0$ d'où $\lambda_k = 0$ pour tout k donc la famille est libre. On en déduit que $N \geqslant n - 1$.

4. On suppose $(u_1, \ldots, u_n)$ liée alors il existe des réels λ_i tels que $\sum \lambda_i u_i = 0_E$. On a donc, pour tout k, $< \sum \lambda_i u_i, u_k >= 0 = \sum_{i \neq k} \lambda_i a + \lambda_k$ ou encore

$$\sum_i \lambda_i a + (1 - a)\lambda_k = 0.$$

On somme pour k variant de 1 à n :

$$na \sum_i \lambda_i + (1 - a) \sum_k \lambda_k = 0$$

donc $\sum_i \lambda_i (na + 1 - a) = 0$. Montrons que $\sum_i \lambda_i \neq 0$. On suppose, par l'absurde que $\sum_i \lambda_i = 0$, alors $-\lambda_1 = \sum_{i \geqslant 2} \lambda_i$ donc

$$0 = \lambda_1 u_1 + \sum_{i \geqslant 2} \lambda_i u_i = \sum_{i \geqslant 2} \lambda_i (u_i - u_1)$$

Or $(u_2 - u_1, \ldots, u_n - u_1)$ est libre donc $\forall k \geqslant 2$, $\lambda_i = 0$ puis $\lambda_1 = 0$. On obtient une contradiction, on a donc $\sum_i \lambda_i \neq 0$ d'où $na + (1 - a) = 0$ d'où $a = -\dfrac{1}{n - 1}$.

Correction 4 On raisonne par équivalence en remplaçant $||x + y||^2$ par $2\,||x||^2 + 2\,||y||^2 - ||x - y||^2$ (identité du parallélogramme). On arrive à

$$||x - y||^2 + 2\,||x||^2\,||y||^2 \geqslant 0,$$

ce qui est vrai donc l'inégalité donnée l'est aussi.

Correction 5 On trouve

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(X^2 - 1), \frac{1}{\sqrt{38}}(X^2 + 6X + 1), \frac{1}{\sqrt{19}}(3X^2 - X + 3) \right)$$

Correction 6 On trouve $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1), \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1) \right)$

Correction 7 1. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une bon, alors $< f(e_i), f(e_j) >= \delta_{i,j}$ donc $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille orthonormale et comme de cardinal n, c'est une bon de E.

2. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors $f(x) = \sum_{j=1}^{n} < f(x), f(e_j) > f(e_j)$ car c'est une bon et par linéarité,

$$< f(x), f(e_j) >=< \sum x_i e_i, e_j >= x_j,$$

donc f est linéaire.

Correction 8 On a $||e_i||=1$ pour tout i et

$$||e_i||^2=\sum_{j=1}^{n}<e_i,e_j>^2,$$

donc

$$\sum_{i\neq j}<e_i,e_j>^2=0,$$

puis $<e_i,e_j>=0$ pour $i\neq j$. La famille est donc orthonormale. Montrons que c'est une base de E.

Pour cela, on va montrer que pour tout $x\in E$, on a $x=\sum_{i=1}^{n}<x,e_i>e_i$. Soit donc $x\in E$, on pose $y=x-\sum_{i=1}^{n}<x,e_i>e_i$ On a $<y,e_j>=0$ pour tout j donc $||y||^2=0$ et $y=0$. On a montré que la famille était génératrice de E et libre car orthonormale donc c'est une base de E.

Correction 9 On applique Cauchy-Schwarz à f et f' avec le produit scalaire $(f,g)=\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Correction 10 Cauchy-Schwarz appliqué à (x,y,z) et $(1,2,3)$.

Correction 11 Cauchy-Schwarz appliqué à $(\sqrt{2}x,y,\sqrt{5}z)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Correction 12 On applique Cauchy-Schwarz à $t\mapsto t^n\sqrt{f}$ et $t\mapsto t^m\sqrt{f}$ avec le produit scalaire $<f,g>=\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Correction 13 On note $(e_1,\ldots,e_n,e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et on suppose que $\mathbb{R}^{n+1}$ est muni de son produit scalaire canonique. On pose $x=\sum_{i=0}^{n}\sqrt{\binom{n}{i}}e_i=\left(\binom{n}{0},\binom{n}{1},\ldots,\binom{n}{n}\right)$ et $y=(1,\ldots,1)$. Alors $<x,y>=\sum_{i=0}^{n}\sqrt{\binom{n}{i}}$, $||x||=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$ et $||y||=n+1$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz x et y, on a l'inégalité souhaitée.

Correction 14 On applique Cauchy-Schwarz à I_n et A.

Correction 15 On voit que φ est symétrique et bilinéaire. On suppose φ définie positive. On sait, par cauchy-Schwarz que $\forall x\in E, ||x||^2\geqslant<x,a>^2$ car $||a||^2=1$.

On en déduit que $\varphi(x,x)=||x||^2+k<x,a>^2\leqslant(k+1)\,||x||^2$ donc il faut que $k+1\geqslant 0$. Si $k=-1$, on a $\varphi(a,a)=0$ et φ ne sera pas définie. Il faut donc $k>-1$.

Réciproquement, supposons que $k>-1$. On a $\varphi(x,x)\geqslant(k+1)<x,a>^2\geqslant 0$ et si $\varphi(x,x)=0$ alors d'après l'inégalité

$$\varphi(x,x)\geqslant(k+1)<x,a>^2,$$

on a $<x,a>=0$ donc $\varphi(x,x)=||x||^2$ d'où $x=0_E$ et φ est bien un produit scalaire.

Correction 16

1. Soit $x\in\mathrm{Vect}\,(e_1,\ldots,e_n)^{\perp}$. Alors $||x||^2=0$ car $<x,e_i>=0$ pour tout i, on a donc $x=0_E$. Ainsi, on a $\mathrm{Vect}\,(e_1,\ldots,e_n)^{\perp}=\{0_E\}$ donc $\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_n)=E$ (car E euclidien) et la famille est bien génératrice de E.
2. On a $||e_j||^2=1=1+\sum_{i\neq j}<e_j,e_i>^2$ donc $<e_i,e_j>=0$ pour $i\neq j$. On en déduit que la famille est orthonormale donc libre et avec la question 1, c'est une bon de E.

Correction 17 On remarque que $G=(\mathrm{Vect}((1,2,-1,1)))^{\perp}$ donc $G^{\perp}=\mathrm{Vect}((1,2,-1,1))$.

Correction 18 On note $S_n(\mathbb{R})$, $A_n(\mathbb{R})$ et $D_n(\mathbb{R})$ respectivement l'ensemble des matrices symétriques, antisymétriques et diagonales.

On peut remarquer que la base (E_{ij}) de $M_n(\mathbb{R})$ est une BON pour ce produit scalaire. Une base de l'ensemble des matrices diagonales est $(E_{ii}, i\in[\![1,n]\!])$, une base des matrices symétriques est $(E_{ii}, i\in[\![1,n]\!])\cup(E_{ij}+E_{ji}, i<j)$.

L'orthogonal des matrices diagonales est l'ensemble des matrices de diagonale nulle. En effet, si $M\in D_n(\mathbb{R})^{\perp}$, alors pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $<M,E_{ii}>=0$, soit $m_{ii}=0$ (puisque $M=\sum_{i,j}m_{ij}E_{ij}$ et $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ BON pour ce produit scalaire.)

L'orthogonal des matrices symétriques est l'ensemble des matrices antisymétriques. En effet, les matrices antisymétriques, c'est-à-dire les matrices vérifiant $^{\perp}=-M$ admettent pour base $(E_{ij}-E_{ij})_{i<j}$. Si $i<j$ et $k<l$, on a

$$<E_{ij}+E_{ji},E_{kl}-E_{kl}>=\begin{cases}0 & \text{si } (i,j)\neq(k,l)\\ ||E_{ij}||^2-||E_{ji}||^2=0 & \text{si } (i,j)=(k,l)\end{cases}$$

Remarque: On ne peut pas avoir $(i,j)=(l,k)$ car $i<j$ et $k<l$.

Par ailleurs, on a

$$<E_{ii},E_{kl}-E_{lk}>=0,$$

puisque la base (E_{ij}) est orthonormée. On a donc bien que pour tout $k<l$, $E_{kl}-E_{lk}\in S_n(\mathbb{R})^{\perp}$ d'où $A_n(\mathbb{R})\subset S_n(\mathbb{R})$. Par égalité des dimensions, on a montré que l'orthogonal des matrices symétriques est l'ensemble des matrices antisymétriques.

Correction 19 Soit $f \in H^{\perp}$ alors $h : t \mapsto tf(t)$ est un élément de H donc $< h, f >= \int_0^1 tf^(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Par stricte positivité de l'intégrale, comme $t \mapsto tf^2(t)$ est positive et continue, on a $tf^2(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$ donc $f(t) = 0$ pour tout $t \in]0,1]$ puis $f \equiv 0$ par continuité. Ainsi, on a montré $H^{\perp} \subset \{0\}$. Comme $H^{\perp}$ est un ssev de E, on a donc $H^{\perp} = \{0\}$.

Correction 20 1. C'est le noyau de la forme linéaire trace donc un ssev et, par le thm du rang, sa dimension est $n^2 - 1$.

On peut aussi dire qu'un élément de F vérifie $m_{nn} = -\sum_{i=1}^{n} m_{ii}$ donc il est engendré par $(E_{ij}, i \neq j) \cup (E_{ii} - E_{nn}, i \in [\![1, n-1]\!]$. C'est assez rapide de montrer que cette famille est libre et elle est de cardinal $n^2 - 1$.

2. On sait que $\dim(F^{\perp}) = n^2 - \dim(F) = 1$, il suffit donc de donner un élément non nul de $F^{\perp}$. On remarque que $I_n \in F^{\perp}$ car pour tout $M \in F$, $< I_n, M >= \mathrm{Tr}^{\perp} M = \mathrm{Tr} I_n M = \mathrm{Tr}(M) = 0$, donc $F^{\perp} = \mathrm{Vect}(I_n)$.

Correction 21 1. Soit $x \in G^{\perp}$, montrons que $x \in F^{\perp}$. Soit donc $y \in F$, montrons que $< x, y >= 0$. On a $y \in F$ et $F \subset G$ donc $y \in G$. Comme $x \in G^{\perp}$, on a $< x, y >= 0$. On a donc bien $x \in F^{\perp}$ d'où l'inclusion.

2. On le montre par double inclusion. Soit $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$, montrons que l'on a $x \in (F+G)^{\perp}$. On se donne donc $a + b \in F + G$, on a

$$< x, a+b >=< x, a > + < x, b > .$$

Or $< x, a >= 0$ puisque $x \in F^{\perp}$ et $a \in F$. De même, $< x, b >= 0$, on a donc $< x, a+b >= 0$ donc $x \in (F+G)^{\perp}$ et on a montré l'inclusion $F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}$.

Par ailleurs, on a $F \subset (F+G)$ donc d'après la question précédente, $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp}$. De même, $G \subset (F+G)$ donc $(F+G)^{\perp} \subset G^{\perp}$. On en déduit que $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

On a montré l'égalité par double inclusion.

3. Soit $(a, b) \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$, montrons que $a + b \in (F \cap G)^{\perp}$. Soit donc $x \in F \cap G$, alors $< x, a+b >=< x, a > + < x, b >$. Or $< x, a >= 0$ puisque $a \in F^{\perp}$ et $x \in F$. De même, $< x, b >= 0$ donc $a + b \in (F \cap G) \perp$ et on a montré l'inclusion $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$.

On peut aussi le montrer en raisonnant avec les ensembles: On a $F \cap G \subset F$ donc $F^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$. De même, $G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$. Comme $(F \cap G)^{\perp}$ est un ssev, on a donc $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$.

Attention! il n'y a pas égalité comme dans l'énoncé original du td (sauf si on se place en dimension finie, il suffit d'appliquer la question 4 à la question 2 pour l'obtenir).

4. On l'a vu en cours ! On a $F \subset (F^{\perp})^{\perp} \subset F$ car si $x \in F$, alors $< x, y >= 0$ pour tout $y \in F^{\perp}$ donc $x \in (F^{\perp})^{\perp}$. On conclut avec l'égalité des dimensions car $F \oplus F^{\perp} = E = F^{\perp} \oplus (F^{\perp})^{\perp}$.

5. On applique la question 2 à $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$, on obtient :

$$(F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp} = (F^{\perp})^{\perp} \cap (G^{\perp})^{\perp}$$

donc $(F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp} = F \cap G$. On en déduit que $(F \cap G) \perp = \left((F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp}\right)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Correction 22

Correction 23 Soit $x \in E$, alors $\langle x, 0_E \rangle = 0$ donc $x \in \{0_E\}^{\perp}$. On en déduit que $E \subset \{0_E\}^{\perp} \subset E$ donc $E = \{0_E\}^{\perp}$.

Soit maintenant $x \in E^{\perp}$ alors $\langle x, x \rangle = 0$ donc $x = 0_E$. On a donc $E^{\perp} \subset \{0_E\}$ donc $E^{\perp} = \{0_E\}$ car $E^{\perp}$ est un ssev.

Correction 24 1. On a $\dim(F) = 2$.

2. On remarque que $F = \mathrm{Vect}(u, v)^{\perp}$ avec $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v = (1, 2, 3, 4)$ donc $F^{\perp} = \mathrm{vect}(u, v)$. Comme u et v sont non colinéaires, ils forment une base de $F^{\perp}$.

3. On cherche une base orthogonale de $F^{\perp}$. On orthogonalise (u, v) (attention, il faut appliquer la formule avec $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$, on trouve le vecteur $\frac{1}{2}(-3, -1, 1, 3)$ donc $((1, 1, 1, 1), (3, 1, -1, -3)) = (u, w)$ est une base orthogonale de $F^{\perp}$. On a donc

$$q(x) = \frac{\langle u, x \rangle}{||u||^2} u + \frac{\langle x, w \rangle}{||w||^2} w,$$

où q désigne la projection ortho sur $F^{\perp}$. On a donc

$$d(x, F) = ||q(x)|| = \left|\left|\frac{1}{5}(4, 3, 2, 1)\right|\right| = \sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Correction 25 1. On remarque que $F = \mathrm{vect}(u, v)^{\perp}$ avec $u = (1, -1, 1)$ et $v = (1, 1, 2)$. On a donc $F^{\perp} = \mathrm{vect}(u, v)$

2. On a F de dimension 1, $F = \text{vect}(w)$ avec $w = (3,1,-2)$. On a donc

$$p(x) = \frac{\langle x, w\rangle}{||w||^2}$$

et

$$s(x) = 2p(x) - x = \frac{\langle x, w\rangle}{7} w - x.$$

On en déduit que

$$Mat_B(s) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Correction 26 On a $F = \text{vect}(u)^\perp$ avec $u = (1,-1,1,-1)$ donc $F^\perp = \text{vect}(u)$. Pour tout x de E, on a $p(x) = x - q(x) = x - \dfrac{\langle x, u\rangle}{||u||^2} u$ avec $||u||^2 = 4$. On a donc

$$Mat_B(p) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Correction 27 On a $F = \text{vect}(u,v)^\perp$ avec $u = (1,2,-1)$ et $v = (2,-1,0)$ donc $\dim(F) = 1$. On trouve $F = \text{vect}(w)$ avec $w = (1,2,5)$. Pour tout x de E on a $s(x) = 2p(x) - x = \dfrac{1}{15}\langle x, w, w\rangle - x$ donc

$$Mat_B(s) = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -14 & 2 & 5 \\ 2 & -11 & 10 \\ 5 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

Correction 28 1. forme, symétrique, linéaire par rapport à la première coordonnée donc bilinéaire, positive. On suppose $\langle P, P\rangle = 0$ alors $P(a_k) = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ donc P admet $n+1$ racines distinctes. Or $P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $P = 0$.

2. (a) On a $P_j(a_k) = \delta_{jk}$

   (b) On a $\langle P_j, P_i\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \delta_{jk}\delta_{ik} = \delta_{ij}$ donc la famille est orthonormale.

3. On remarque que

$$H = \left\{ P \in E, \sum_{k=0}^{n} P(a_k) \right\} = \text{vect}(1)^\perp = \mathbb{R}^\perp,$$

si on note $A = 1$. On en déduit que

$$d(Q, H) = \frac{|\langle A, Q\rangle|}{||A||} = \frac{\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q(a_k)\right|}{\sqrt{n+1}}.$$

Correction 29 1. On raisonne par équivalence. Soit $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$. On a

$$M \in F^\perp \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M \right\rangle = 0 \text{ et } \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M \right\rangle = 0$$

donc

$$M \in F^\perp \Leftrightarrow m_{11} = m_{22} \text{ et } m_{12} = -m_{21} \Leftrightarrow M \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

2. On utilise l'expression de la projection orthogonale. On trouve que la projection de B sur F vaut $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Correction 30 1. Le supplémentaire orthogonal est l'ensemble des matrices antisymétriques c'est-à-dire les matrices vérifiant $^\perp = -M$ ou encore $m_{ij} = -m_{ji}$.

2. On peut remarquer qu'un BON de $S_3(\mathbb{R})^\perp$ est $(E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{2,3} - E_{32})$(on l'a vu ex18). On applique alors la formule du projeté orthogonal sur $S_3(\mathbb{R})^\perp$. On a $M(E_{31} - E13) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ donc

$$-1 = \text{Tr}\left(M^\perp E_{13} - E_{31})\right) = \text{Tr}\left(^\perp E_{13} - E_{31})M\right) = \langle E_{13} - E_{31}\rangle.$$

De même,

$$M(E_{21} - E_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\langle E_{12} - E_{21}, M\rangle = -2$.

Enfin,

$$M(E_{32} - E_{23}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

donc $\langle E_{23} - E_{32}, M\rangle = -2$.

On en déduit, on notant p la projection orthogonale sur $S_3(\mathbb{R})^\perp$, que

$$p(M) = -(E_{13} - E_{31}) - 2(E_{12} - E_{21}) - 2(E_{23} - E_{32}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

On a ensuite $||p(M)|| = \sqrt{18}$ car $||A||^2 = \sum_{ij} a_{ij}^2$ (cf cours lorsque l'on a montré que l'on définissait bien un produit scalaire.