Devoir surveillé 9, sujet 2.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1.

On admet que :

Si une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers l, alors, on a: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = l$ (théorème de Césaro). Dans toute la suite, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge. Pour tout entier naturel n non nul, on note:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k,\ T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} S_k \text{ et } y_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i x_i.$$

Partie 1: Résultats préliminaires

1. On souhaite montrer que pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positive, on a

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \text{ (inégalité arithmético-géométrique)}$$

   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.

   (b) On pose $A = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{a_k}{A} \leqslant exp\left(\frac{a_k}{A} - 1\right).$$

   (c) En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

2. On souhaite montrer le résultat suivant :
étant donné deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équivalentes et à termes positifs, telles que $\sum u_n$ diverge, on a

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \sim \sum_{k=1}^{n} v_k$$

   (a) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geqslant N, (1-\epsilon)v_k \leqslant u_k \leqslant (1+\epsilon)v_k.$$

   (b) En déduire qu'il existe deux constantes C et C' telles que $\forall n \geqslant N$,

$$C' + (1-\epsilon)\sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant C + (1+\epsilon)\sum_{k=1}^{n} v_k.$$

   (c) Montrer qu'il existe N_0 tel que $\forall n \geqslant N_0$,

$$C \leqslant \epsilon\sum_{k=1}^{n} v_k \text{ et } C' \geqslant -\epsilon\sum_{k=1}^{n} v_k.$$

(d) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} u_k \sim \sum_{k=1}^{n} v_k$.

3. (a) Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)x_i.$$

(b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a: $\sum_{k=1}^{n} y_k = T_n$.

(c) Établir que la série de terme général y_n converge et que:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

4. Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel n non nul:

$$z_n = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}.$$

On se propose de montrer que la série de terme général z_n converge et que sa somme vérifie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

(a) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a:

$$z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}}\left(\prod_{k=1}^{n} kx_k\right)^{1/n}.$$

(b) En déduire que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n \leqslant \frac{n+1}{(n!)^{1/n}}y_n.$$

(c) Montrer que, pour tout réel x positif, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.

(d) En déduire que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e.$$

(e) Établir que pour tout entier naturel n non nul, on a:

$$\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k.$$

(f) Montrer enfin que la série de terme général z_n converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

5. (a) En utilisant une comparaison séries/intégrales, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\, n \geqslant 2,\; -1 + \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}.$$

(b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$ puis un équivalent de $\displaystyle\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n}$

6. Soit N un entier naturel non nul quelconque. On considère une suite particulière que l'on note $(x_n(N))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par:

$$x_n(N) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \in [\![1, N]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose, comme à la deuxième question:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\; z_n(N) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k(N)\right)^{1/n}.$$

(a) Justifier que les séries $\sum x_n(N)$ et $\sum z_n(N)$ convergent et écrire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)$ sous forme de sommes finies.

(b) En déduire que:

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e.$$

7. Conclure que e est la plus petite des constantes λ telles que, pour toute suite (x_n) de réels positifs:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

8. **Bonus:** Démontrer le lemme de Cesaro admis en début de problème.

Exercice 2.

Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et t un endomorphisme non nul de E.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E, on note $Mat_{\mathcal{B}}(t)$ la matrice représentant t dans cette base.
On dit que t est une homothétie si c'est un multiple scalaire de l'identité, notée id_E.
On appelle projecteur un endomorphisme p de E idempotent, c'est-à-dire tel que $p^2 = p$.

Partie 1: Traces et projecteurs

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A le nombre réel suivant:

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

1. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

2. Montrer que la trace de la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(t)$ associée à t est indépendante de la base $\mathcal{B}$.

On appelle trace de t, notée $\mathrm{Tr}(t)$, la valeur commune des traces des matrices représentant t. On dit que la trace est un invariant de similitude.
Soit p un projecteur de E.

3. Démontrer que $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p)$.

4. En déduire que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$.

On pose $p' = id_E - p$.

5. Montrer que $\mathrm{Im}(p') = \ker(p)$ et que $\mathrm{Im}(p) = \ker(p')$.

6. Démontrer que la dimension de la somme de deux sous-espaces F et G de E est inférieure ou égale à la somme de leurs dimensions.

7. Montrer alors que si l'endomorphisme s est une somme finie de projecteurs p_i, $i = 1, \ldots, m$, alors $\mathrm{Tr}(s) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{Tr}(s) \geqslant \mathrm{rg}(s)$.

Partie 2: Projecteurs de rang 1

On suppose dans cette partie que le rang du projecteur p est égal à 1.

8. Démontrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $p \circ t \circ p = \mu p$.
   Soit $\mathcal{C} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une base de E adaptée à la décomposition
$$E = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p).$$

9. Montrer que
$$Mat_{\mathcal{C}}(t) = \left(\begin{array}{c|cc} \mu & * & * \\ \hline * & & \\ & B & \\ * & & \end{array}\right),$$
   où μ est le nombre réel dont l'existence découle de la question précédente et $B \in M_{n-1}(\mathbb{R})$.

10. Montrer que si $p' \circ t \circ p'$ n'est pas proportionnel à p', alors B, défini à la question précédente, n'est pas la matrice d'une homothétie. On rappelle que $p' = id_E - p$.

Partie 3: Endomorphismes différents d'une homothétie

On suppose dans cette partie que l'endomorphisme t n'est pas une homothétie.

11. Démontrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que $(x, t(x))$ est une famille libre.

12. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ dans laquelle la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(t)$ est de la forme suivante;
$$Mat_{\mathcal{B}}(t) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & * & * \\ \hline 1 & & \\ 0 & & \\ \vdots & A & \\ 0 & & \end{array}\right),$$
   où $A \in M_{n-1}(\mathbb{R})$.

13. En déduire que si $\mathrm{Tr}(t) = 0$, il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la diagonale de $Mat_{\mathcal{B}'}(t)$ est nulle.

Soit λ_i, $i = 1, \ldots, n$ une suite de n nombres réels vérifiant $\mathrm{Tr}(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

14. En dimension $n = 2$, démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}''}(t)$ a pour éléments diagonaux les λ_i, $i = 1, 2$.

On admettra qu'en dimension $n \geqslant 3$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe un projecteur ℓ de E de rang 1, tel que d'une part $\ell \circ t \circ \ell = \alpha \ell$ et d'autre part $\ell' \circ t \circ \ell'$ n'est pas proportionnel à $\ell' = id_E - \ell$.

15. En dimension $n \geqslant 3$, à l'aide des questions 9 et 10 de la partie 2, démontrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ dans laquelle la matrice représentant t s'écrit
$$Mat_{\mathcal{C}}(t) = \left(\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & * & * \\ \hline * & & \\ & B & \\ * & & \end{array}\right),$$
    où B n'est pas un multiple de I_{n-1}.

16. En dimension $n \geqslant 3$, démontrer par récurrence qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}''}(t)$ a pour éléments diagonaux les λ_i, $i = 1, \ldots, n$.

Indication: On pourra considérer l'endomorphisme de Vect$(e_2, \dots, e_n)$ associé à B.

Partie 4: Décomposition en somme de projecteurs

On suppose désormais que t est un endomorphisme de E vérifiant $\mathrm{Tr}(t) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{Tr}(t) \geqslant \mathrm{rg}(t)$. On pose $\rho = \mathrm{rg}(t)$ et $\theta = \mathrm{Tr}(t)$.

17. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(t)$ est de la forme suivante:

$$\left(\begin{array}{c|c} T_1 & 0 \\ \hline T_2 & 0 \end{array}\right),$$

où T_1 est une matrice de taille $\rho \times \rho$.

18. Supposons tout d'abord que T_1 ne soit pas la matrice d'une homothétie.

    (a) A l'aide de la question 16 de la partie 3, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle

$$Mat_{\mathcal{B}'}(t) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & * & \dots & \\ * & \ddots & \ddots & (0) \\ \vdots & \ddots & \lambda_\rho & \\ \hline \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & (0) \\ * & \dots & \dots & \end{array}\right),$$

    où les λ_i, $i = 1, \dots, \rho$ sont des entiers non nuls.

    (b) En déduire que t est la somme d'un nombre fini de projecteurs.

19. On suppose maintenant que T_1 est la matrice d'une homothétie.
    Démontrer que là encore, t est la somme d'un nombre fini de projecteurs.

Correction du DS n 9, sujet 2

Exercice 1 *Dans toute la suite, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs telle que la série de terme général x_n converge. Pour tout entier naturel n non nul, on note:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k,\ T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} S_k \text{ et } y_n = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i x_i.$$

Partie 1: Résultats préliminaires

1. *On souhaite montrer que pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positive, on a*

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_n\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \text{ inégalité arithmético-géométrique)}$$

   (a) *Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $e^x \geqslant 1+x$.*

   - L'inégalité est vraie pour $x=0$.
   - Si $x>0$, par le thm des accroissements finis, on sait qu'il existe $c_x \in]0,x[$ tel que
   $$\frac{e^x-1}{x} = e^{c_x} \geqslant 1.$$
   On a donc bien l'inégalité souhaitée en multipliant par x.
   - Si $x<0$, toujours par le thm des accroissements finis, il existe $d_x \in]x,0[$ tel que
   $$\frac{e^x-1}{x} = e^{d_x} \leqslant 1.$$
   On obtient l'inégalité souhaitée en multipliant par x négatif, ce qui inverse le sens des inégalités.

   Par disjonction de cas, on a montré que $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1+x$.

   On peut aussi dire que la fonction est convexe donc au-dessus de toutes ses tangentes. On peut aussi faire une étude de fonction avec un tableau de variations.
   Quelle que soit la méthode choisie, la réponse à cette question doit être succincte.

   (b) *On pose $A = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$. Montrer que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\frac{a_k}{A} \leqslant exp\left(\frac{a_k}{A}-1\right)$.*
   On applique la question précédente à $\frac{a_k}{A}-1$, on obtient l'inégalité souhaitée.

   (c) *En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.*
   On sait que
   $$\forall k\in[\![1,n]\!], \frac{a_k}{A} \leqslant exp\left(\frac{a_k}{A}-1\right),$$
   on fait le produit de ces inégalités (positives) pour k variant de 1 à n :
   $$\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{A} \leqslant \prod_{k=1}^{n} exp\left(\frac{a_k}{A}-1\right),$$
   ou encore
   $$\frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{A^n} \leqslant exp\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{A}-1\right)\right).$$

Or $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{A}-1\right)=\left(\frac{1}{A}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)-n=n-n=0$. On obtient donc $\prod_{k=1}^{n}a_k\leqslant A^n$, d'où le résultat souhaité en prenant la racine n-ième de l'inégalité.

2. *On souhaite montrer le résultat suivant :*
étant donné deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équivalentes et à termes positifs, telles que $\sum u_n$ diverge, on a

$$\sum_{k=1}^{n}u_k\sim\sum_{k=1}^{n}v_k$$

(a) *Montrer que pour tout $\epsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que*

$$\forall k\geqslant N, (1-\epsilon)v_k\leqslant u_k\leqslant(1+\epsilon)v_k.$$

Par hypothèse, $\frac{u_k}{v_k}\to 1$ donc pour tout $\epsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$, $\left|\frac{u_k}{v_k}-1\right|\leqslant\epsilon$. On a bien l'encadrement souhaité en multipliant par v_k qui est positif.

Là j'ai commencé à voir n'importe quoi.
Pour rappel, l'ordre des quantificateurs a une importance. Dans la définition de limite, on écrit $\forall\epsilon>0,\exists N$ et N dépend donc de ϵ puisqu'il arrive APRÈS avoir fixé ϵ.
Et dire que la limite vaut 1 " à partir d'un certain rang" m'interroge sur le sens que vous donnez à limite!

(b) *En déduire qu'il existe deux constantes C et C' telles que $\forall n\geqslant N$,*

$$C'+(1-\epsilon)\sum_{k=1}^{n}v_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}u_k\leqslant C+(1+\epsilon)\sum_{k=1}^{n}v_k.$$

On sait que $\forall k\geqslant N$, $(1-\epsilon)v_k\leqslant_k\leqslant(1+\epsilon)v_k$. Soit $n\geqslant N$, on somme pour k variant de N à n :

$$\sum_{k=N}^{n}(1-\epsilon)v_k\leqslant\sum_{k=N}^{n}u_k\leqslant\sum_{k=N}^{n}(1+\epsilon)v_k.$$

On ajoute $\sum_{k=1}^{N-1}u_k$:

$$\sum_{k=1}^{N-1}u_k+\sum_{k=N}^{n}(1-\epsilon)v_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}u_k\leqslant\sum_{k=1}^{N-1}u_k+\sum_{k=N}^{n}(1+\epsilon)v_k$$

puis on écrit $\sum_{k=N}^{n}v_k=\sum_{k=1}^{n}v_k-\sum_{k=1}^{N-1}v_k$, on a alors :

$$\sum_{k=1}^{N-1}u_k-\sum_{k=1}^{N-1}(1-\epsilon)v_k+\sum_{k=1}^{n}(1-\epsilon)v_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}u_k\leqslant\sum_{k=1}^{N-1}u_k-\sum_{k=1}^{N-1}(1-\epsilon)v_k+\sum_{k=1}^{n}(1+\epsilon)v_k$$

ou encore

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{N-1}(u_k+(1-\epsilon)v_k)}_{=C'}+(1-\epsilon)\sum_{k=1}^{n}v_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}u_k\leqslant\underbrace{\sum_{k=1}^{N-1}(u_k+(1+\epsilon)v_k)}_{=C}+(1+\epsilon)\sum_{k=1}^{n}v_k$$

Bien entendu, il ne fallait pas juste sommer les inégalités de la question précédente puisque celles-ci ne sont valables qu'à partir du rang N.

(c) *Montrer qu'il existe N_0 tel que $\forall n \geqslant N_0$,*

$$C \leqslant \epsilon \sum_{k=1}^{n} v_k \text{ et } C' \geqslant -\epsilon \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant positive, terme général d'une série divergente, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} v_k \right) = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{C}{\sum\limits_{k=1}^{n} v_k} = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{C'}{\sum\limits_{k=1}^{n}}$. En appliquant la définition de la limite, il existe N_1 tel que $\forall n \in \mathbb{N}_1$,

$$-\epsilon \leqslant \frac{C}{\sum\limits_{k=1}^{n} v_k} \leqslant \epsilon,$$

et il existe N_2 tel que $\forall n \geqslant N_2$,

$$-\epsilon \leqslant \frac{C'}{\sum\limits_{k=1}^{n} v_k} \leqslant \epsilon.$$

En multipliant par $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k$ (positif) et en posant $N_0 = \max(N_1, N_2)$, on a bien le résultat souhaité.

(d) *En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k \sim \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.*

Soit ϵ, alors en posant $N" = \max(N, N_0)$, avec N et N_0 comme dans les questions précédentes, on obtient

$$\forall n \geqslant N", (1-2\epsilon) \sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant (1+2\epsilon) \sum_{k=1}^{n} v_k,$$

donc

$$\left| \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} v_k} - 1 \right| \leqslant 2\epsilon.$$

On a bien montré

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \sim \sum_{k=1}^{n} v_k$$

Là encore, beaucoup trop m'écrivent " d'après les deux questions précédentes, on a : " sans me préciser pour quelles valeurs de n on a l'encadrement.

3. (a) *Montrer que:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) x_i.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} y_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{k} i x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} i x_i \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i x_i \sum_{k=i}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i x_i \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n+1-i}{n+1} x_i \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) x_i
\end{aligned}$$

On a bien l'égalité demandée.
Faites apparaître clairement la somme télescopique

(b) *En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k = T_n$.*

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} x_k \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=k}^{n} 1 \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} x_i (n+1-i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} y_k \text{ d'après la question précédente}
\end{aligned}$$

L'égalité vous est donnée donc faites apparaître qu'après permutation des deux sommes, vous obtenez une somme constante (et ne me dites pas, c'est évident parce que vu ce que vous j'avais déjà lu à ce stade là de vos copies, j'étais en droit de me demander si vous ne tentiez pas un coup de bluff !!!!)

(c) *Établir que la série de terme général y_n converge et que: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.*

On suppose que la série de terme général x_n converge, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente. Par le thm de Césaro, on sait donc que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de même limite. En utilisant l'égalité de la question précédente, on a donc que la série de terme général y_n converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} y_k = \lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k$$

4. *Dans cette question, on pose, pour tout entier naturel n non nul:*

$$z_n = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}.$$

On se propose de montrer que la série de terme général z_n converge et que sa somme vérifie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

(a) *Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a:*

$$z_n = \frac{1}{(n!)^{1/n}} \left(\prod_{k=1}^{n} k x_k \right)^{1/n}.$$

On part du membre de droite :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{(n!)^{1/n}} \left(\prod_{k=1}^{n} k x_k\right)^{1/n} &= \frac{1}{(n!)^{1/n}} \left(\prod_{k=1}^{n} k \prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{1/n} \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{1/n} \quad \text{car} \prod_{k=1}^{n} k = n! \\
&= z_k
\end{aligned}$$

(b) *En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \leqslant \frac{n+1}{(n!)^{1/n}} y_n$.*
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, alors

$$\begin{aligned}
z_n &= \tfrac{1}{(n!)^{1/n}} \left(\prod_{k=1}^{n} k x_k \right)^{1/n} \\
&\leqslant \frac{1}{(n!)^{1/n}} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k x_k \right) \\
&\text{en utilisant l'inégalité arithmético-géométrique avec } a_k = k x_k \\
&\leqslant \frac{1}{(n!)^{1/n}} (n+1) y_n
\end{aligned}$$

On a donc bien l'inégalité demandée.

(c) *Montrer que, pour tout réel x positif, on a $\ln(1+x) \leqslant x$.*
L'inégalité est vraie pour $x = 0$. Soit $x > 0$, alors il existe $c_x \in]0, x[$ d'après le théorème des accroissements finis tel que

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c_x} \leqslant 1$$

On obtient l'inégalité souhaitée en multipliant par x qui est positif. On peut, bien sûr, aussi utiliser la première question et dire que le résultat tombe par croissance de l'exponentielle.

(d) *En déduire que:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e.$$

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{n} \geqslant 0$ donc, d'après la question précédente,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n},$$

puis, $n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leqslant 1$, et enfin, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant e$, par croissance de l'exponentielle.

(e) *Établir que pour tout entier naturel n non nul, on a:*

$$\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On part du membre de droite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}\left(1+\tfrac{1}{k}\right)^k &= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k \\
&= \prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^k}{k^k} \\
&= \prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \\
&= \frac{(n+1)^{n+1}}{1}\times\frac{1}{(n+1)!} \\
&\text{car on reconnaît un produit télescopique} \\
&= \frac{(n+1)^n}{n!} \text{ car } (n+1)! = (n+1).n!
\end{aligned}$$

On a bien l'égalité donnée.

On attend de vous que vous fassiez apparaître un produit télescopique, pas que vous écriviez une grosse fraction avec des points.

(f) *Montrer enfin que la série de terme général z_n converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.* Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, alors

$$\begin{aligned}
0 \leqslant z_n &\leqslant \frac{n+1}{n^{1/n}}y_n \\
&\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^{1/n} y_n \\
&\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} e\right)^{1/n} y_n \\
&\leqslant e y_n
\end{aligned}$$

Par le thm de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum z_n$ converge et sa somme est inférieure la somme de ey_n:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

On obtient l'inégalité souhaitée en utilisant l'égalité démontrée ci-dessus : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} y_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

La notation avec $+\infty$ dans la somme est réservée à la limite des sommes partielles LORSQUE la série converge. Vous ne pouvez donc pas l'utiliser avant d'avoir montré que la série convergeait (et a fortiori pour montrer qu'elle converge)

5. (a) *En utilisant une comparaison séries/intégrales, montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ -1+\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant -1+\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n}.$$

Soit $n \geqslant 2$. Pour tout $k \geqslant 1$, et tout $x \in \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$, on a, par croissance de ln:

$$\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n}\ln x\,dx \leqslant \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

donc
On somme l'encadrement pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient, avec la relation de Chasles:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{1/n}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

puis en remarquant que le terme en $k = n$ est nul de la première somme est nul, et après changement d'indice dans la deuxième:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{1/n}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right),$$

ce qui implique :

$$\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \int_{1/n}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{1/n}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

Enfin, $\displaystyle\int_{1/n}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x) - x]_{1/n}^{1} = -1 - \frac{\ln(1/n)}{n} + \frac{1}{n}$, ce qui donne bien

$$-1 + \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant -1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}$$

Pour tous ceux de mauvais foi qui m'ont dit que la question était infaisable car "on intègre d'habitude entre k et $k+1$", ça marche aussi ici :

Pour tout $k \geqslant 2$, on a

$$\int_{k-1}^{k} \ln\left(\frac{x}{n}\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln\frac{x}{n}\,\mathrm{d}x$$

donc, en sommant de 2 à n:

$$\int_{1}^{n} \ln\left(\frac{x}{n}\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln\frac{k}{n},$$

puis

$$\ln\frac{1}{n} + \int_{1}^{n} \ln\left(\frac{x}{n}\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k}{n}.$$

On somme maintenant l'autre inégalité pour k variant de 1 à $n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln\frac{k}{n} \leqslant \int_{1}^{n} \ln\frac{x}{n}\,\mathrm{d}x,$$

puis, en remarquant que le terme en $k = n$ est nul :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k}{n} \leqslant \int_{1}^{n} \ln\frac{x}{n}\,\mathrm{d}x.$$

On retrouve bien l'encadrement

$$\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + \int_{1/n}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{1/n}^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

et il suffit de calculer l'intégrale comme ci-dessus.

(b) *En déduire* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$ *puis un équivalent de* $\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n}$

D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = -1$ donc, par continuité de l'exponentielle, $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{1/n} = \frac{1}{e}$. Or $\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{1/n} = \frac{(n!)^{1/n}}{n}$. On a donc

$$\frac{n}{(n!)^{1/n}} \sim e \text{ puis } \frac{1}{(n!)^{1/n}} \sim \frac{e}{n}.$$

6. *Soit N un entier naturel non nul quelconque. On considère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ particulière que l'on note $(x_n(N))_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par:*

$$x_n(N) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \in [\![1, N]\!] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose, comme à la deuxième question: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n(N) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k(N)\right)^{1/n}$.

(a) *Justifier que les séries $\sum x_n(N)$ et $\sum z_n(N)$ convergent et écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)$ sous forme de sommes finies.*

Les séries convergent car leurs termes généraux sont nuls à partir du rang $N+1$. On a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n},$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N) = \sum_{n=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^{1/n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n!)^{1/n}}.$$

(b) *En déduire que:*

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)} = e.$$

On sait que $\frac{1}{(n!)^{1/n}} \sim \frac{e}{n}$ et $\sum \frac{e}{n}$ diverge. D'après les résultats préliminaires, on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k!)^{1/k}} \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{e}{k},$$

donc

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n!)^{1/n}} \sim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{e}{n},$$

ou encore

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\sum_{n=1}^{n} z_n(N)}{\sum_{n=1}^{N} x_n(N)} = e.$$

En utilisant la question précédente, on obtient bien le résultat souhaité.

7. *Conclure que e est la plus petite des constantes λ telles que, pour toute suite (x_n) de réels positifs:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

On a vu que pour toute suite de réels positifs,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

l'ensemble

$$\{\lambda \in \mathbb{R}^+, \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}, \sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n\}$$

est donc non vide et minoré par 0. Si λ est un élément de cet ensemble, on a, pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N),$$

donc, en divisant par $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(N)$ et en faisant tendre N vers $+\infty$, $e \leqslant \lambda$. On en déduit que e minore cet ensemble. Comme c'est un élément de cet ensemble, c'est le minimum. On a montré que e est la plus petite des constantes λ telles que pour toute suite de réels positifs, $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leqslant \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$

Exercice 2

La majorité d'entre vous n'a pas compris ce qui se passait, reprenez donc la correction de cet exercice avec sérieux.

Partie 1

Cette partie est essentiellement constituée de questions de cours classiques.

1. Le coefficient d'indice (i,j) de AB est $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, celui de BA est $\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$. On a donc

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}}_{=[BA]_{kk}} = \mathrm{Tr}(BA)$$

J'ai vu beaucoup de $AB = \sum$ ce qui n'a aucun sens !

2. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soient Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a alors:

$$Mat_{\mathcal{B}'}(t) = Q^{-1}Mat_{\mathcal{B}}(t)Q$$

En appliquant la question précédente avec $A = Q^{-1}Mat_{\mathcal{B}}(t)$ et $B = Q$, on obtient: $\boxed{\mathrm{Tr}(Mat_{\mathcal{B}'}(t)) = \mathrm{Tr}(QQ^{-1}Mat_{\mathcal{B}}(t)) = \mathrm{Tr}(Mat_{\mathcal{B}}(t)).}$

3. Pour tout x, $p(x - p(x)) = 0$ puisque $p^2 = p$ ce qui prouve que $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$. Comme $p(x)$ est élément de $\mathrm{Im}(p)$, on vient de vérifier que $E = \ker(p) + \mathrm{Im}(p)$.
De plus par le théorème du rang:

$$\dim E = \dim(\mathrm{Ker}(p)) + \dim(\mathrm{Im}(p))$$

La dimension de la somme des deux sous-espaces étant la somme des dimensions des sous-espaces, cette somme est directe. Donc: $\boxed{E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)}$

4. Soit x appartenant à $\mathrm{Im}(p)$. Il existe y tel que $x = p(y)$ aussi

$$p(x) = p(p(y)) = p^2(y) = p(y) = x\cdot$$

Soit r le rang de p. Dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition précédente :

$$Mat_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{\mathrm{Tr}p = r = \mathrm{Tr}(Mat_{\mathcal{B}}(p)) = r = \mathrm{rg}p}$

5. On a vu précédemment que si $x \in \mathrm{Im}(p)$, $p(x) = x$ donc $p'(x) = 0$ aussi $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(p')$. Réciproquement, si x est élément de $\ker(p')$, $p(x) = x$ donc $x \in \mathrm{Im}(p =$. Aussi $\boxed{\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p')}$
On vérifie que p' est aussi un projecteur : comme p et id_E commutent,

$$p'^2 = (id_E - p)^2 = id_E - 2p + p^2 = id_E - p$$

En échangeant les rôles de p et de p' (puisque $p = id_E - p'$), on obtient $\boxed{\mathrm{Im}(p') = \mathrm{Ker}(p)}$

On peut aussi refaire le même raisonnement par double inclusion mais c'est une perte de temps.

Beaucoup d'entre vous ont tenté de raisonner par équivalence et ont notamment écrit une équivalence lorsque l'on applique p ce qui est faux. Pour rappel, $a = b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$ si f est injective. Ce n'est évidemment pas le cas d'un projecteur.

6. Par la formule de Grassman, on a $\boxed{\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \leqslant \dim F + \dim G}$

7. Pour généraliser le résultat précédent à la somme de p sous-espaces, on procède par récurrence sur le nombre de projecteurs m intervenant dans la somme.
Pour $m = 1$, $s = p_1$ donc $\mathrm{Tr}(s) = \mathrm{rg}(s)$ aussi $\mathrm{Tr}(s) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{Tr}(s) \geqslant \mathrm{rg}(s)$.
Supposons la propriété vraie au rang $m-1 \geqslant 1$. On pose $s' = \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} p_i$ donc $s = s' + p_m$. Par hypothèse de récurrence $\mathrm{Tr}(s') \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{Tr}(s') \geqslant \mathrm{rg}(s')$. La trace étant linéaire, $\mathrm{Tr}(s) = \mathrm{Tr}(s') + \mathrm{Tr}(p_m) \in N$ comme somme de deux entiers. De plus, pour tout x de E: $s(x) = s'(x) + p_m(x)$ donc $\mathrm{Im}(s) \subset \mathrm{Im}(s') + \mathrm{Im}(p_m)$.
On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(s) &= \dim \mathrm{Im}(s) \\ &\leqslant \dim \mathrm{Im}(s' + p_m) \\ &\leqslant \mathrm{rg}(s') + \mathrm{rg}(p_m) \text{ d'après la question précédente} \\ &\leqslant \mathrm{Tr}(s') + \mathrm{Tr}(p_m) \text{ car } \mathrm{Tr}(p_m) = \mathrm{rg}(p_m) \\ &= \mathrm{Tr}(s) \end{aligned}$$

On a donc prouvé par récurrence que pour tout entier naturel m : $\boxed{s = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i \Longrightarrow \mathrm{Tr}(s) \in \mathbb{N} \text{ et } \mathrm{Tr}(s) \geqslant \mathrm{rg}(s)}$

On accepte ici une récurrence plus rapide du style " on a $Im(s) \subset Im(p_1) + \ldots + Im(p_m)$" donc, d'après la question précédente et par une récurrence immédiate, $rg(s) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{m} rg(p_i)$. Évidemment, se contenter de me dire que l'on a $rg(s) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{m} rg(p_i)$ d'après la question précédente est totalement insuffisant.
Attention: on vous demandait aussi de montrer que la trace était un entier, certains n'ont sans doute pas bien lu la question et ont oublié de traiter ce point qui était pourtant facile

Partie 2

On suppose dans cette partie que le rang du projecteur p est égal à 1.
On ne suppose PAS DU TOUT que t est une homothétie !!! mais pourquoi avez-vous pensé ça ?

8. Soit f_1 un élément non nul de $\mathrm{Im}(p)$: c'est donc une base de $\mathrm{Im}(p)$ puisque $\mathrm{rg}(p) = 1$. Comme $p \circ t(f_1) = p(t(f_1))$, cet élément appartient à $Im(p)$. Aussi:
$$\exists \mu \in \mathbb{R}, p \circ t(f_1) = \mu f_1$$
Or pour tout x de E, $p(x)$ est colinéaire à f_1 donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $p(x) = \alpha f_1$. On a donc
$$p \circ t \circ p(x) = p \circ t(\alpha f_1) = \mu\alpha f_1 = \mu p(x)$$
ce qui prouve que: $\boxed{p \circ t \circ p = \mu p.}$

9. On sait que $p \circ t(f_1) = \mu f_1$. Comme $t(f_1) - p \circ t(f_1)$ est un élément de $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}(f_2, \cdots, f_n)$, cela justifie la forme de la première colonne de $Mat_{\mathcal{C}}(t)$, les autres colonnes étant quelconques.

10. On raisonne par contraposée. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B = \lambda I_{n-1}$, montrons qu'alors $p' \circ t \circ p' = \lambda p'$. On sait, par définition des f_i, que
    - $p'(f_1) = 0_E$ et
    - $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $p'(f_i) = f_i$

    On a donc
    - $p' \circ t \circ p'(f_1) = p' \circ t(0_E) = 0_E = \lambda p'(f_1)$ et
    - $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $p' \circ t \circ p'(f_i) = p' \circ t(f_i) = p'(\lambda f_i) = \lambda p'(f_i)$.

    Ainsi, par linéarité, on en déduit que pour tout $x \in E$, $p' \circ t \circ p'(x) = \lambda p'(x)$. Par contraposée, on a montré $\boxed{(B \text{ non proportionnelle à } I_{n-1})) \Rightarrow (p' \circ t \circ p' \text{ non proportionnel à } p')}$

Partie 3

On suppose dans cette partie que l 'endomorphisme t n'est pas une homothétie.

11. Prouvons le résultat demandé par contraposition. On suppose que pour tout x, $(x, t(x))$ est une famille liée ce qui équivaut à dire que pour tout x non nul, il existe α_x réel tel que $t(x) = \alpha_x x$.
    Soit u un vecteur non nul fixé et $\alpha = \alpha_u$.
    - Si x est colinéaire à u, il existe λ tel que $x = \lambda u$ et on a:
    $$t(x) = \lambda t(u) = \lambda\alpha u = \alpha x$$
    - Si x n'est pas colinéaire à u, $u + x$ est non nul et on a alors:
    $$t(x + u) = t(x) + t(u) = \alpha_x x + \alpha u = \alpha_{x+u}(u + x)$$
    La famille (u, x) étant libre, il y a unicité de l'écriture donc: $\alpha = \alpha_{x+u} = \alpha_x$

    Ainsi, pour tout $x \in E$, $t(x) = \alpha x$ donc t est une homothétie. On a montré:
    $$\forall x \in E,\ (x, t(x)) \text{ liés} \Longrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad t = \alpha id_E$$
    Par contraposition $\boxed{(t \text{ n'est pas une homothétie}) \Rightarrow (\exists x \in E,\ (x, t(x)) \text{ est libre.}}$

    Beaucoup de bêtises dues à des quantificateurs absents ou mal placés. Supposer que t n'est pas une homothétie se traduit par :
    $$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \exists x \in E, t(x) \neq \lambda x$$
    et non pas
    $$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, t(x) \neq \lambda x$$

12. Soit e_1 un élément tel que e_1 et $t(e_1)$ ne soient pas colinéaires (un tel vecteur existe par la question précédente). On peut compléter cette famille libre en $\boxed{\text{une base } \mathcal{B} = (e_1, t(e_1), e_3, \cdots, e_n) \text{ de } E}$ et dans cette base t est représenté par la matrice recherchée.

13. On suppose $\mathrm{Tr}(t) = 0$. Procédons par récurrence.
• Initialisation: $n = 2$. On a trouvé dans la question précédente une base $\mathcal{B}$ telle que:

$$Mat_{\mathcal{B}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

or $\mathrm{Tr}(t) = a$ donc $a = 0$. La base $\mathcal{B}$ convient.

• Supposons la propriété vérifiée au rang $n-1 \geqslant 1$.On a montré dans la question précédente l'existence d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ dans laquelle la matrice $Mat_{\mathcal{B}}(t)$ est de la forme suivante :

$$Mat_{\mathcal{B}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \star & \star & \cdots & \star \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & A & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

où $A \in M_{n-1}(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{Tr}(t) = \mathrm{Tr}(A)$, $\mathrm{Tr}(A) = 0$.
Si A est de la forme αI_{n-1}, $\alpha = 0$ et la base $\mathcal{B}$ convient.
Sinon soit t_1 l'endomorphisme de $E_1 = \mathrm{Vect}(e_2, \cdots, e_n)$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}_1 = (e_2, \cdots, e_n)$. Cet endomorphisme n'est pas une homothétie et est de trace nulle.
Par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{B}'_1 = (e'_2, \cdots, e'_n)$ de E_1 dans laquelle A_1 la matrice de t_1 a une diagonale de 0. Soit $\mathcal{B}' = (e_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ base de E.

Dans la base $\mathcal{B}'$, la matrice de t n'a que des 0 sur la diagonale. En effet, par la matrice précédente, $t(e_1) \in E_1$ ce qui justifie que dans $Mat_{\mathcal{B}'}(t)$ ait un 0 en ligne 1 colonne 1.
Si $x \in E$,$t(x) = \alpha_x e_1 + t_1(x)$; aussi, la composante de $t(e'_i)$ sur e'_i est la même que celle de $t_1(e'_i)$; elle est donc nulle. Tous les termes diagonaux de $Mat_{\mathcal{B}'}(t)$ sont donc nuls.

Ainsi
$\boxed{\text{Il existe une base dans laquelle la matrice de } t \text{ n'a que des 0 sur sa diagonale.}}$

14. Par hypothèse, $\mathrm{Tr}(t) = \lambda_1 + \lambda_2$. Soit $t' = t - \lambda_1 id_E$. Cet endomorphisme n'est ni une homothétie ni l'endomorphisme nul puisque t n'est pas colinéaire à id_E. Par la question 12, il existe $\mathcal{B}$ telle que

$$Mat_{\mathcal{B}}(t') = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

où $a = \mathrm{Tr}(t') = \mathrm{Tr}(t) - \lambda_1 \mathrm{Tr}(id_E) = (\lambda_1 + \lambda_2) - 2\lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_1$ d'où

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix} + \lambda_1 I_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b \\ 1 & \lambda_2 \end{pmatrix}}$$

Attention, certains m'ont écrit qu'il suffisait de prendre une base (e_1, e_2) de E telle que $t(e_i) = \lambda_i e_i$. Cela sous-entend que les sous-espaces $\ker(t - \lambda_i id_E)$ ne sont pas réduits au vecteur nul ce qui ne peut évidemment pas être vrai pour une infinité de réels. En effet, cela voudrait dire que $\det(t - \lambda id_E)$ s'annule pour une infinité de réels λ et on a vu sur les exemples traités que ce déterminant avait bien l'air d'être un polynôme.

15. Par la propriété admise, il existe un projecteur ℓ de E de rang 1, tel que d'une part $\ell \circ t \circ \ell = \lambda_1 \ell$ et d'autre part $\ell' \circ t \circ \ell'$ ne soit pas proportionnel à $\ell' = id_E - \ell$. Par la question 9, dans une base $\mathcal{C}$ adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}(\ell) \oplus \mathrm{Im}(\ell)$

$$Mat_{\mathcal{C}}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ \star & & & \\ \vdots & & B & \\ \star & & & \end{pmatrix}.$$

et par la question 10, comme $\ell' \circ t \circ \ell'$ n'est pas proportionnel à id_E, B n'est pas une matrice colinéaire à I_{n-1}.

16. La récurrence est suggérée et a été initialisée pour $n = 2$ en question 14. Supposons la propriété réalisée à l'ordre $n - 1 \geqslant 2$ et démontrons la à l'ordre n. Par la question précédente, il existe $\mathcal{C} = (e_1, \cdots, e_n)$ telle que:

$$Mat_{\mathcal{C}}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ \star & & & \\ \vdots & & B & \\ \star & & & \end{pmatrix}.$$

où B n'est pas une matrice d'homothétie et $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(t) - \lambda_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i$.

Soit t_1 l'endomorphisme de $\mathrm{Vect}(e_2, \cdots, e_n)$ de matrice B dans la base $\mathcal{C}_1 = (e_2, \cdots, e_n)$. Par hypothèse, B n'est pas un multiple de l'identité donc t_1 n'est pas une homothétie et par hypothèse de récurrence, il existe $\mathcal{C}'' = (e_2", \ldots, e"_n)$ telle que $Mat_{\mathcal{C}''}(t_1) = B'$ est une matrice de termes diagonaux $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

Soit $\mathcal{B}'' = (e_1, e_2", \ldots, e"_n)$. On sait déjà que $t(e_1)$ a pour coordonnée selon e_1 le réel λ_1. Pour $i \in [\![2, n]\!]$, on a $t(e"_i) = t_1(e"_i)$ et, par définition de $\mathcal{B}"$, la coordonnée de $\lambda_1(e"_i)$ selon $e"_i$ est λ_i. Ainsi, dans la base $\mathcal{B}"$, la matrice de t a bien comme éléments diagonaux $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Ainsi on a vérifié par récurrence que:

$$\boxed{\text{il existe une base } \mathcal{B}'' \text{ dans laquelle la diagonale de } Mat_{\mathcal{B}''}(t) \text{ a pour éléments diagonaux les } \lambda_i \text{ où } i \in [\![1, n]\!].}$$

Partie 4

On suppose désormais que t est un endomorphisme de E vérifiant $Tr(t) \in \mathbb{N}$ et $Tr(t) \geqslant rg(t)$. On pose $\rho = rg(t)$ et $\theta = Tr(t)$.

17. Par le théorème du rang, $\mathrm{dimKer}(t) = n - \rho$. Soit E_1 un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(t)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus \ker(t)$. $\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(t) \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} T_1 & (0) \\ T_2 & (0) \end{pmatrix}.}$

18. (a) Soit t_1 l'endomorphisme de E_1 de matrice T_1 dans la base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \cdots, e_\rho)$.
Comme $\mathrm{Tr}(t) = \mathrm{Tr}(Mat_{\mathcal{B}}(t)) = \mathrm{Tr}(T_1) = \mathrm{Tr}(t_1)$, $\mathrm{Tr}(t_1)$ est élément de $\mathbb{N}$ et $\mathrm{Tr}(t_1) \geqslant \rho$.
Soient $\lambda_i = 1$ pour $i \in [\![1, \rho-1]\!]$ et $\lambda_\rho = \mathrm{Tr}(t) - (\rho - 1) \geqslant 1$. Ces ρ nombres sont des entiers naturels non nuls dont la somme est égale à $\mathrm{Tr}(T_1)$. Par la question 16, t n'étant pas une homothétie, il existe $\mathcal{B}_1''$ une base de E_1 telle que $Mat_{\mathcal{B}_1"}(t_1)$ admet comme éléments diagonaux $\lambda_1, \cdots, \lambda_\rho$. Soit $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1'' \cup \{e_{\rho+1}, \cdots, e_n\}$.

$$\boxed{\text{Dans cette nouvelle base, la matrice de } t \text{ a la forme } \begin{pmatrix} T_1' & (O) \\ T_2' & (O) \end{pmatrix} \text{ où } T_1' \text{ a sur sa diagonale des entiers non nuls.}}$$

(b) Soient $C_1, \cdots, C_\rho$ les premières colonnes de $Mat_{\mathcal{B}'}(t)$. Soit p_i l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ est:

$$Mat_{\mathcal{B}'}(p_1) = \begin{pmatrix} (0) & \cdots & (0) & \dfrac{1}{\lambda_i} C_i & (0) & \cdots & (0) \end{pmatrix}$$

Cette matrice ayant un 1 en place (i, i), on a $Mat_{\mathcal{B}'}(p_1)^2 = Mat_{\mathcal{B}'}(p_1)$, ce qui prouve que les p_i sont des projecteurs. Ainsi $\boxed{t = \sum_{i=1}^{\rho} \lambda_i p_i \text{ et c'est bien une somme de projecteurs.}}$

Remarque: Si $m = \sum_{i=1}^{\rho} \lambda_i$, t est une somme de m projecteurs. En effet, si $\lambda_i \neq 1$, $\lambda_i p_i$ n'est pas un projecteur.

19. Comme $T_1 = \alpha I_\rho$, $\mathrm{Tr}(t) \geqslant \rho$ implique $\alpha \geqslant 1$.

- Si $\alpha = 1$, on peut utiliser la méthode précédente (on peut même l'utiliser si $\alpha \in \mathbb{N}$) en décomposant en somme de ρ projecteurs de rang 1 .
- Si $\alpha > 1$, soit p_0 de matrice $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Alors p_0 est un projecteur.

  De plus, $t - p_0$ a pour matrice: $Mat_{\mathcal{B}'}(t - p_0) = \begin{pmatrix} T_1'' & (0) \\ T_2' & (0) \end{pmatrix}$ où T_1'' est une matrice ayant pour éléments diagonaux $(\alpha - 1, \alpha, \cdots, \alpha)$: ce n'est donc pas une matrice d'homothétie. De plus, $t - p_0$ est de rang au plus ρ (sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$ a $n - \rho$ colonnes nulles). Ainsi $t - p_0$ vérifie

  $$tr(t - p_0) = \rho\alpha - 1 > \rho - 1 \Longrightarrow tr(t - p_0) \geqslant \rho \geqslant \mathrm{rg}(t - p_0)$$

  donc on peut appliquer la question précédente. $t' = t - p_0$ est une somme de projecteurs et comme $t = p_0 + (t - p_0)$:

$\boxed{t \text{ est une somme de projecteurs}}$ On a ainsi prouvé que T est une somme de projecteurs ssi sa trace est un entier naturel supérieur ou égal à son rang.