Correction du TD n 23

Correction 1 On a $P(Y=6)=1-P(Y>6)-P(Y<6)=\frac{1}{4}$ et $P(Y=2)+P(Y=4)+\frac{1}{4}=1$ donc $P(Y=2)=P(Y=4)=\frac{3}{8}$.

Correction 2 1. X prend ses valeurs dans $[\![1,6]\!]$.

Par hypothèse, il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $P(X=k)=ka$.

Puisque P_X est une loi de probabilité, on a : $\sum_{k=1}^{6}P(X=k)=1$ ce qui impose $a=\frac{1}{21}$. On a donc, pour tout $k\in[\![1,6]\!]$, $P(X=k)=\frac{k}{21}$.

2. On calcule l'espérance :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{6}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{6}\frac{k^2}{21}=\frac{6\times 7\times 13}{21\times 6}=\frac{13}{3}.$$

3. On applique le théorème de transfert :

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{k}P(X=k)=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{21}=\frac{2}{7}.$$

Correction 3 1. On considère qu'obtenir une fille est un succès (!), on compte donc le nb de succès parmi les 3 répétitions. X suit donc une loi binomiale de paramètres $\frac{1}{2}$ et 3.

2. On sait que X prend comme valeur $0,1$ ou 2. On a $P(X=0)=P(X=1)=P(X=2)=\frac{1}{3}$, X suit donc une loi uniforme.

Si on rajoute 15 moutons, on a alors $P(X=0)=\frac{1}{2}$ et $P(X=1)=P(X=2)=\frac{1}{4}$.

3. $X(\Omega)=[\![0,20]\!]$. Si on considère que mettre une cravate dans le premier tiroir est un succès, il a lieu avec une probabilité de $\frac{1}{3}$. On répète 20 fois cette expérience de Bernoulli, on obtient donc une loi binomiale de paramètres $\frac{1}{3}$ et 20.

4. On a $X(\Omega)=[\![1,78]\!]$. Pour chaque $i\in[\![1,20]\!]$, $X=i$ correspond à " l'excuse est en $i$ème position ce qui arrive avec une probabilité de $\frac{1}{78}$. On peut le retrouver avec les probas conditionnelles. Si on note E_i l'évènement "tirer l'excuse au i-ème tirage", alors

$$P(X=i)=P\left(\overline{E}_1\cap\overline{E}_2\cap\ldots\cap\overline{E}_{i-1}\cap E_i\right)$$

donc, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}P(X=i)&=P(\overline{E}_1)P_{\overline{E}_1}(\overline{E}_2)\ldots P_{\overline{E}_1\cap\overline{E}_2\cap\ldots\cap\overline{E}_{i-1}}(E_i)\\&=\frac{77}{78}\times\frac{76}{78}\times\ldots\frac{78-(i-1)}{78-(i-2)}\frac{1}{78-(i-1)}=\frac{1}{78}\end{aligned}$$

Correction 4 On a

$$E(Z)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+1=2$$

Correction 5 1. On a

$$E(Z)=\frac{1\ln(1)}{5}+\frac{3\ln(e)}{5}+\frac{\ln(e^2)}{5}=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1.$$

2. On raisonne par équivalence:

$$\frac{1+3e+5e^2}{5}=e\Leftrightarrow e^2-2e+1=0\Leftrightarrow(e-1)^2=0.$$

la dernière égalité est fausse donc, par équivalence, la première aussi. On a donc

$$\frac{1+3e+5e^2}{5}\neq e.$$

On a $E(X)=\frac{1+3e+5e^2}{5}$ donc $\ln(E(X))=\ln\left(\frac{1+3e+5e^2}{5}\right)$. Par ailleurs, on a $E\left(\ln(X)\right)=1$ d'après la première question. Comme on a $\frac{1+3e+5e^2}{5}\neq e$, on a $\ln\left(\frac{1+3e+5e^2}{5}\neq e\right)\neq 1$ donc $E\left(\ln(X)\right)\neq\ln\left(E(X)\right)$.

Correction 6 1. Ici, il n'est pas précisé que les dés sont distinguables (ou que le lancer s'effectue de manière successives). Si on considère que c'est, malgré tout, le cas, on a alors $\Omega = [\![1,6]\!]^2$. On note X la variable aléatoire égale au gain réalisé.

Le nombre de cas possibles est donc 36. Pour déterminer la probabilité pour que "X=1", on compte les cas favorables c'est-à-dire le nombre de paires donc la somme des coordonnées est strictement supérieure à 7 c'est-à-dire vaut $8, 9, 10, 11$ ou 12.

- Pour 8, on a 5 cas :$(2,6), (6,2), (3,5), (5,3)$ et $(4,4)$.
- Pour 9 on a 4 cas :$(3,6), (6,3), (4,5)$ et $(5,4)$.
- Pour 10 on a 3 cas :$(4,6), (6,4)$ et $(5,5)$.
- Pour 11 on a 2 cas :$(5,6)$ et $(6,5)$
- Pour 12 on a 1 cas : $(6,6)$

Ainsi, le nombre de cas favorables est 15, on a donc $P(X=1) = \dfrac{15}{36}$ et $P(X=-1) = \dfrac{19}{36}$.

L'espérance vaut

$$E(X) = -\frac{19}{36} + \frac{15}{36} = -\frac{1}{9},$$

le jeu n'est pas équitable.

2. Le nombre de cas possibles est toujours 36. On note encore X la variable aléatoire égale au gain réalisé.On compte le nombre de cas favorables pour avoir $X = 1$ c'est-à-dire les paires $(n, n+1)$ ou $(n, n+2)$ (et leurs symétriques!). Pour $(n, n+1)$, n peut varier de 1 à 5, il y a donc 5 telles paires (et 5 paires de la forme $(n+1, n)$. Pour les paires $(n, n+2)$, n varie de 1 à 4 il y a donc 8 paires en tout avec 2 d'écart.

   Ainsi, le nombre de cas favorables est 18. On a donc $P(X=1) = P(X=-1) = \dfrac{1}{2}$ et le jeu est équitable.

Correction 7 1. Quelle que soit l'urne tirée, il y a au moins une boule noire et les tirages sont effectués avec remise : X prend ses valeurs dans $\{0,1,2,3\}$.

On utilise le système complet d'évènements : U : ' ***on tire dans l'urne*** U ' et V : ' ***on tire dans l'urne*** V '.

Ainsi : $P(X=0) = P_U(X=0)\,P(U) + P_V(X=0)\,P(V) = \dfrac{1}{2}\left(P_U(X=0) + P_V(X=0)\right)$

Facilement, $P_U(X=0) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^2$ (il y a remise) et $P_V(X=0) = \left(\dfrac{1}{5}\right)^2$.

Ainsi, $P(X=0) = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{5}\right)^2\right]$.

2. La méthode est la même, ce qui change étant le calcul des probabilités $P_U(Y=3)$ et $P_V(Y=3)$:

   $P_U(Y=3) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{10}$ et $P_V(Y=3) = \dfrac{2}{5}$, ce qui donne $P(Y=3) = \dfrac{1}{4}$.

Correction 8 1. Z prend ses valeurs dans $\{0,1,2\}$. On a : $P(Z=2) = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{16}{25}$ (les deux voitures sont disponibles) puis $P(Z=0) = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{25}$ (aucune voiture n'est disponible). On en déduit $P(Z=1) = 1 - P(Z=0) - P(Z=2) = \dfrac{8}{25}$.

2. On a encore Y qui prend ses valeurs dans $\{0,1,2\}$. On calcule la loi de Y en utilisant le formule des probabilités totales : L'évènement $Y=0$ se produit si $X=0$ ou bien si $X \geqslant 1$ et $Z=0$ qui sont deux évènements incompatibles. D'où : $P(Y=0) = P(X=0) + P((X \geqslant 1) \cap (Z=0)) = P(X=0) + P(X \geqslant 1)\,P(Z=0) = 0.1 + 0.9\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = 0.136$ De même, l'évènement$Y=1$ se produit si ($X=1$ et $Z \geqslant 1$) ou ($X \geqslant 2$ et $Z=1$), ce qui donne : $P(Y=1) = P(X=1)\,P(Z \geqslant 1) + P(X=2)\,P(Z=1) = 0.48$ Enfin, l'évènement$Y=2$ est réalisé si $X \geqslant 2$ et $Z=2$, ce qui donne : $P(Y=2) = P(X \geqslant 2)\,P(Z=2) = 0.6 \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = 0.384$.

3. La marge brute vaut $300\,Y$ et donc, la marge brute moyenne est égale à $E(300\,Y) = 300\,E(Y) = 374.4$

Correction 9 L'univers des possibles Ω peut être identifié à l'ensemble des parties de $[\![0,2]\!]$ (ie les places possibles pour les boules blanches au cour du tirage successif des 5 boules.

1. On a $B(\Omega) = [\![0,2]\!]$.
   - $B=0$ est réalisé si on ne tire aucune boule blanche. On a $P(B=0) = \dfrac{8}{10} \cdot \dfrac{7}{9} \cdot \dfrac{6}{8} \cdot \dfrac{5}{7} \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{9}$.

- $B=1$ signifie que l'on a tiré une boule blanche. Il y a cinq positions possibles pour la boule blanche. Pour chacune de ces positions, la probabilité est de $\dfrac{8.7.6.5.2}{10.9.8.7.6}$ donc $P(B=1)=\dfrac{5}{9}$.
- On a donc $P(B=2)=\dfrac{2}{9}$.

On en déduit que
$$E(B)=\frac{5}{9}+\frac{4}{9}=1.$$

2. On a $B+N=5$.
3. On en déduit que pour tout $k\in[\![3,5]\!]$, $P(N=k)=P(X=5-k)$. Ainsi,
$$E(N)=E(5-B)=5-E(B)=4.$$

Correction 10 1. On sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}P(X=k)=1$, on en déduit que $\displaystyle\alpha\sum_{k=1}^{10}k=1$ donc $\alpha=\dfrac{1}{55}$.

2. On a $\displaystyle E(X)=\sum_{k=1}^{10}kP(X=k)=\alpha\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{21}{3}$.

   On calcule maintenant $E(X^2)$ pour déterminer sa variance. On a
$$E(X^2)=\alpha\sum_{k=1}^{10}k^2.k=55$$
   (pour rappel, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\sum_{k=1}^{n}\right)^2$).

   Ainsi,
$$V(X)=55-\frac{21}{3}=48.$$

3. On a $Y(\Omega)=[\![2,11]\!]$ et pour tout $k\in[\![2,11]\!]$, $P(Y=k)=P(X=k-1)=\dfrac{k-1}{55}$.

   On a
$$E(Y)=E(X)+1=49.$$

   On a $Z(\Omega)=\{0,1,4,9,16,25\}$ et

- $P(Z=0)=P(X=5)=\dfrac{1}{11}$.
- $P(Z=1)=P(X=6)+P(X=4)=\dfrac{2}{11}$.
- $P(Z=4)=P(X=7)+P(X=3)=\dfrac{2}{11}$.
- $P(Z=9)=P(X=8)+P(X=2)=\dfrac{2}{11}$.
- $P(Z=16)=P(X=9)+P(X=1)=\dfrac{2}{11}$.
- $P(Z=25)=P(X=10)=\dfrac{2}{11}$

On a donc
$$E(Z)=\frac{2}{11}(1+4+9+16+25)=10$$

On a $T(\Omega)=\{2p,p\in[\![1,10]\!]\}$. Pour tout $k\in[\![1,10]\!]$, on a $P(T=2k)=P(X=k)=\dfrac{k}{55}$. On a $E(T)=2E(X)=96$.

Correction 11 On écrit
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}P(X\geqslant k)&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}P(X=j)\\&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}P(X=j)\\&=\sum_{j=1}^{n}jP(X=j)\\&=E(X)\end{aligned}$$

On a bien montré l'égalité souhaitée.

Correction 12 1. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}P(X=k)=1$ donc $\displaystyle\alpha\sum_{k=1}^{2n}k=1$. On en déduit que $\alpha=\dfrac{1}{n(2n+1)}$.

2. On cherche à calculer $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n\\ k\text{ pair}}}P(X=k)$. On a
$$\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n\\ k\text{ pair}}}P(X=k)=\sum_{j=1}^{n}P(X=2j)=\sum_{j=1}^{n}\frac{2j}{n(2n+1)}=\frac{(n+1)}{3}.$$

Correction 13 1. On sait que X prend les valeurs entre 1 et $n+1$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $(X=k)$ est réalisé lorsque l'on obtient $k-1$ faces au cours des $k-1$ premiers lancers puis un pile. On a donc

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1}p.$$

On a $(X=n+1)$ si on a obtenu n fois "face", on a donc $P(X=n+1) = (1-p)^n$.

2. D'après la question précédente, on a

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}p + (n+1)(1-p)^n.$$

On écrit

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1}p + (n+1)(1-p)^n \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} (1-p)^{k-1}p + (n+1)(1-p)^n \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} (1-p)^{k-1}p + (n+1)(1-p)^n \\ &= \sum_{j=1}^{n} p(1-p)^{j-1}\frac{1-(1-p)^{n-j+1}}{p} + (n+1)(1-p)^n \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n}(1-p)^{j-1}\right) - n(1-p)^n + (n+1)(1-p)^n \\ &= \frac{1-(1-p)^n}{p} + (1-p)^n \\ &= \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p} \end{aligned}$$

On a bien le résultat souhaité.

Correction 14 L'ensemble des valeurs prises par X est $[\![2,n]\!]$. Pour $k \in [\![2,n-1]\!]$, l'évènement $(X>k)$ est réalisé lorsque l'on a obtenu une suite strictement décroissante au cours des k premiers tirages. Pour déterminer la probabilité de cet évènement, on compte les cas possibles. Si on effectue k tirages successifs et sans remise, il y a $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ cas possibles. Le nombre de cas favorables est égal au nombre de parties à k éléments de n (une fois que l'on a les k éléments distincts, il suffit de les mettre dans l'ordre décroissant).

On a donc $P(X>k) = \dfrac{\binom{n}{k}}{\frac{n!}{(n-k)!}} = \dfrac{1}{k!}$. On sait que $P(X>1)=1$, cette formule peut donc être étendue à $k \in [\![1,n-1]\!]$.

Soit maintenant $k \in [\![2,n]\!]$, alors $P(X=k) = P(X>k-1) - P(X>k)$. En effet, l'évènement $X=k$ est réalisé lorsque $(X>k-1)$ est réalisé mais pas l'évènement $(X>k)$. On peut aussi le voir en disant que l'évènement $(X>k-1)$ est la réunion disjointe de $(X=k)$ et $(X>k)$. On en déduit que

$$P(X=k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!}.$$

Correction 15 1. X_1 désigne la position du mobile à l'instant $t=1$, soit sa position après un seul déplacement. D'après la règle de déplacement du mobile, X_1 prend ses valeurs dans $\{0,1\}$. De plus, $P(X=0) = 1-p$ et $P(X=1) = p$.

2. On raisonne par récurrence sur l'entier naturel non nul n. Notons $\mathcal{P}_n : X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$. • On a prouvé à la question précédente que $\mathcal{P}_1$ était vraie. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et on montre qu'alors $\mathcal{P})n+1$ est vraie. Prouvons que X_{n+1} prend toutes les valeurs de $[\![0,n+1]\!]$. - Soit $k \in [\![1,n+1]\!]$: si à l'instant n le mobile est sur le point d'abscisse $k-1 \in [\![0,n]\!]$ et qu'il avance, alors il sera sur le point d'abscisse k. - Sinon, il se retrouve en O et donc, X_{n+1} prend aussi la valeur 0. Conclusion : $X_{n+1}(\Omega) = [\![0,n+1]\!]$ et par suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$. D'après la question précédente, la famille $[(X_{n-1}=j)]_{j\in[\![0,n-1]\!]}$ est un système complet d'évènements. Ainsi, $P(X_n=k) = {}_{j=0}^{n-1} P_{(X_{n-1}=j)}(X_n=k)\,P(X_{n-1}=j)$ (formule des probabilités totales) Toujours d'après la règle de déplacement du mobile, $P_{(X_{n-1}=j)}(X_n=k) = 0$ si $j \neq k-1$ et $P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n=k) = p$ On en déduit que : $P(X_n=k) = p\,P(X_{n-1}=k-1)$.

(b) On a :

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X_n = k) \\
&= p\sum_{k=1}^{n} pkP(X_{n-1} = k-1) \text{ d'après la question précédente} \\
&= p\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)P(X_{n-1} = j) \text{ en posant } j = k-1 \\
&= p\sum_{j=0}^{n-1} jP(X_{n-1} = j) + p\sum_{j=0}^{n-1} P(X_{n-1} = j) \\
&= pE(X_{n-1}) + p.
\end{aligned}$$

soit encore : $E(X_n) = p\,[E(X_{n-1}) + 1] = p\,E(X_{n-1}) + p$.

(c) Si l'on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = E(X_n)$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \gamma$ et on cherche le réel γ tel que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - \gamma \\
&= pu_n + p - \gamma \\
&= p(v_n + \gamma) + p - \gamma \\
&= pv_n + p\gamma + p - \gamma \\
&= pv_n + \gamma(p-1) + p
\end{aligned}$$

On a donc $v_{n+1} = pv_n \Leftrightarrow \gamma(p-1) + p = 0 \Leftrightarrow \gamma = \dfrac{p}{1-p}$.

On en déduit que $\left(u_n - \dfrac{p}{1-p}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison p. On calcule son premier terme : $u_1 - \dfrac{p}{1-p} = E(X_1) - \dfrac{p}{1-p} = p - \dfrac{p}{1-p} = \dfrac{-p^2}{1-p}$ donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \frac{p}{1-p} = -\frac{p^{n+1}}{1-p}$$

On en déduit que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, E(X_n) = \frac{p}{1-p}\,(1 - p^n)$$

Correction 16 Notons, A_i: " tirer une boule blanche au i-ième tirage".

La première bille noire peut apparaître entre le rang 1 et le rang $b+1$, on a donc

$$X(\Omega) = [\![1, b+1]\!].$$

1.
   - On a $P(X = 1) = P(\overline{A}_1) = \dfrac{n}{n+b}$ car au premier tirage, il y a n boules noires parmi les $n+b$ boules.
   - On a $X = 2 = \overline{A}_1 \cap A_2$ donc

   $$P(X = 2) = P(\overline{A}_1)P_{\overline{A}_1}(A_2) = \frac{b}{n+b} \times \frac{n}{n+b}.$$

   - De manière plus générale, pour $k \leqslant b$,

   $$\begin{aligned}
   P(X = k) &= P(\overline{A}_1)P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)P_{\overline{A}_1\cap\overline{A}_2}(\overline{A}_3)\dots P_{\overline{A_1\cap\dots\cap A_{k-1}}}(A_k) \\
   &= \frac{b}{n+b}.\frac{b-1}{n+b-1}.\dots.\frac{b-k+1}{b+n-k+1}.\frac{n}{b+n-k} \\
   &= \frac{b!(b-n-k-1)!n}{(b-k)!(b+n)!} \\
   &= \frac{b!n.(n-1)!}{(b+n)!}.\frac{(b+n-k-1)!}{(b-k)!(n-1)!} \\
   &= \frac{b!n!}{(b+n)!}\binom{b+n-k-1}{b-k}
   \end{aligned}$$

   - Pour $k = b+1$, on obtient :

   $$P(X = b+1) = \frac{b}{n+b}.\frac{b-1}{n+b-1}.\dots.\frac{1}{n+1}.\frac{n}{n} = \frac{b!n!}{(b+n)!}$$

2. On cherche maintenant à calculer la loi de Y où Y représente le rang d'apparition de la deuxième boule noire. On a $Y(\Omega) = [\![2, b+2]\!]$.
   - On a $(Y = 2) = A_1 \cap A_2$ donc $P(Y = 2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) = \dfrac{n}{n+b}.\dfrac{n-1}{n+b-1} = \dfrac{n!(n+b-2)!}{(n-2)!(n+b)!}$
   - On peut obtenir $Y = 3$ de deux façons différentes :

   $$(Y = 3) = \left(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3\right) \cup \left(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3\right).$$

   On remarque que les deux évènements ont la même probabilité, à savoir $\dfrac{n(n-1)b}{(n+b)(n+b-1)(n+b-2)}$ donc

   $$P(Y = 3) = \frac{2n(n-1)b}{(n+b)(n+b-1)(n+b-2)}.$$

- De manière plus générale, pour obtenir $Y = k$, cela signifie qu'il existe $i < k$ tel que A_i est réalisé et pour $j \neq i$, $\overline{A}_j$ est réalisé. Autrement dit, $Y = k$ est réalisé si un évènement de la forme :

$$\overline{A}_1 \cap \dots \overline{A}_{i-1} \cap A_i \cap \overline{A}_{i+1} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$$

est réalisé, avec $i \in [\![1, k-1]\!]$. La probabilité d'un tel évènement est

$$\frac{b \times \dots \times (b-k+3) \times n \times (n-1)}{(n+b) \times \dots \times (n+b-+1)} = \frac{b!n!}{(b+n)!} \cdot \frac{(n+b-k)!}{(b-k+2)!(n-2)!} = \frac{n!b!}{(b+n)!}\binom{n+b-k}{n-2}.$$

Correction 17 1. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\beta}{k+1}\binom{n}{k} = \beta\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Cette somme doit valoir 1. On calcule $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$. Pour cela, on considère, par exemple la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$. On l'intègre entre 0 et x, on obtient, d'une part :

$$\int_0^x (1+t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1},$$

et, d'autre part:

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} - 1.$$

(en 0, seul le terme correspondant à $k = 0$ est non nul). On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{(1+x)^{n+1}-n}{n+1}.$$

On peut aussi donner deux primitives de f puis calculer la constante d'intégration en prenant, par exemple, $x = 0$.

Pour $x = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{2^{n+1}-n}{n+1}.$$

On en déduit que :

$$\beta = \frac{n+1}{2^{n+1}-n}.$$

2. On a, par définition:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\beta k}{k+1}\binom{n}{k} \\ &= \beta\sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\binom{n}{k} \\ &= \beta\left(2^n - \frac{2^{n+1}-n}{n+1}\right) \\ &= \frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}-n} - 1. \end{aligned}$$

Correction 19 On a $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ donc $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$. De plus, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $(Y = k) = (n - X = k) = (X = n - k)$ donc

$$P(Y=k) = P(X=n-k) = \binom{n}{n-k}p^{n-k}(1-p)^k = \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k},$$

par symétrie du coefficient binomial. On en déduit que Y suit une loi binomiale de paramètres n et $1-p$.

Correction 20 On a schéma de Bernoulli de paramètres $= \frac{5}{5+3+7} = \frac{1}{3}$ donc X suit une loi de binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{3}$.

Correction 21 1. On a $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Pour tout $k < n$, on a $P(Y = k) = P(X = k-1) = \binom{n}{k-1}$ et $P(Y = n) = P(X = n-1) + P(X = n) = \binom{n}{n-1}p^{n-1}(1-p) + \binom{n}{n}p^n = p^{n-1}(n(1-p)+p)$.

2. On a

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=1}^{n} kP(Y=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} kP(Y=k) + nP(Y=n) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} kP(X=k-1) + nP(X=n-1) + nP(X=n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X=k-1) + nP(X=n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (i+1)P(X=i) + nP(X=n) \\
&= E(X) + \sum_{k=0}^{n} P(X=i) + nP(X=n) \\
&\geqslant E(X)
\end{aligned}$$

On a bien $E(Y) \geqslant E(X)$.

3. On a $Y \geqslant X$ donc par croissance de l'espérance, on aurait pu prévoir ce résultat.

Correction 22 D'après le théorème de transfert, on a :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{p^k(1-p)^{n-k}}{k+1}.$$

On écrit $(1-p)^{n-k} = \dfrac{(1-p)^n}{(1-p)^k}$ pour obtenir :

$$E(Y) = (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k.$$

Pour calculer cette somme, il faut se souvenir qu'on peut utiliser la formule du binôme de Newton:

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

On intègre les deux expressions, il existe donc $K \in \mathbb{R}$ (constante d'intégration) tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} + K = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Pour $x = 0$, la somme est nulle, on a donc $K = -\dfrac{1}{n+1}$, ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Ce n'est pas tout à fait la somme que l'on cherche à calculer (on a une puissance k et non pas $k+1$) donc on divise les deux membres par x:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{k+1} = \frac{1}{x}.\frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}.$$

Appliquons cette égalité à $x = \dfrac{p}{1-p}$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k = \frac{1-p}{p}.\frac{\left(1-\frac{p}{1-p}\right)^{n+1}}{n+1} = \frac{1-p}{p}.\frac{\left(\frac{1}{1-p}\right)^{n+1}}{n+1},$$

puis

$$E(Y) = (1-p)^n \frac{1-p}{p}.\frac{\left(\frac{1}{1-p}\right)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{p(n+1)}.$$

L'espérance de Y est donc $\dfrac{1}{p(n+1)}$.

Correction 23 1. On commence par réfléchir à savoir sur quel univers on travaille. On peut apparenter la vidange de l'urne à une succession de $2n$ tirage valant B ou R. Toutefois, un $2n$-uplet quelconque à valeur dans $\{B, R\}$ ne convient pas car on sait qu'il y a précisément n boules blanches et n boules rouges. On veut donc compter les $2n$-uplets dans lesquels apparaissent exactement n boules blanches et n boules rouges. Pour cela, il suffit de savoir à quelle place apparaissent les boules rouges, autrement dit se donner une partie à n éléments de $2n$.

On a $X(\Omega) = [\![n, 2n]\!]$. Soit $i \in [\![n, 2n]\!]$, déterminons $P(X = i)$.

Le nombre de cas possibles est $\binom{2n}{n}$. Pour le nombre de cas favorables, on sait qu'il y aura une boule rouge en position i et ensuite que des boules blanches. Les $n-1$ autres boules blanches ont donc été tirées entre les positions 1 et $i-1$. Il faut donc choisir les $n-1$ places parmi les $i-1$ premiers tirages où ont été tirées des boules rouges. Il y a donc $\binom{i-1}{n-1}$. On a donc $P(X = i) = \dfrac{\binom{i-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$.

2. (a) On commence par écrire $\binom{k}{p}=\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}$ comme suggéré, en remarquant que cette formule n'est pas valable lorsque $k=p$, il faut donc sortir le terme en $k=p$ de la somme :

$$\sum_{k=p}^{m}\binom{k}{p}=1+\sum_{k=1}^{p}\left(\binom{k}{p}=\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}\right)=1+\binom{m+1}{p+1}-1,$$

car on reconnaît une somme télescopique. On retrouve bien la formule souhaitée.

(b) On sait, par symétrie du triangle de Pascal, que $\binom{k}{p}=\binom{k}{k-p}$ donc on a

$$\sum_{k=p}^{m}\binom{k}{k-p}=\binom{m+1}{p+1}.$$

(c) On a

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{i=n}^{2n}\frac{\binom{i-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}\\&=\frac{1}{\binom{2n}{n}}\sum_{j=n-1}^{2n-1}\binom{j}{n-1}\\&=\binom{2n}{n}\end{aligned}$$

en appliquant la formule montrée à la question précédente avec $p=n-1$ et $m=2n-1$. On a donc:

$$E(X)=\frac{n.(n!)^2}{(2n)!}\binom{2n+1}{n+1}=\frac{n.(n!)^2}{(2n)!}\frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}=\frac{n\times(2n+1)}{n+1}.$$

3. Pour calculer la variance, on commence par calculer

$$E(X^2)=\frac{(n!)^2}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}(n+k)^2\binom{n+k-1}{k}.$$

On écrit $(n+k)^2=(n+k)(n+k+1)-(n+k)$, ainsi :

$$E(X^2)=\frac{(n!)^2}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}(n+k)(n+k+1)\binom{n+k-1}{k}-E(X).$$

On calcule cette somme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(n+k)(n+k+1)\binom{n+k-1}{k}&=\sum_{k=0}^{n}(n+k)(n+k+1)\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}\\&=n(n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+k+1)!}{k!(n+1)!}\\&=n(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1+k}{n+1}\\&=n(n+1)\sum_{j=n+1}^{2n+1}\binom{j}{n+1}=\binom{2n+2}{n+2}\end{aligned}$$

en utilisant, à nouveau, le lemme avec $p=n+1$ et $m=2n+1$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}V(X)&=\frac{n.(n!)^2(n+1)}{(2n)!}\binom{2n+2}{n+2}-\frac{n\times(2n+1)}{n+1}-\left(\frac{n\times(2n+1)}{n+1}\right)^2\\&=\frac{(2n+2)(2n+1)n}{(n+2)}-\frac{n\times(2n+1)}{n+1}-\left(\frac{n\times(2n+1)}{n+1}\right)^2\\&=\frac{2n(2n+1)(n+1)^3-(2n+1)(n+1)-(2n+1)^2(n+2)}{(n+2)(n+1)^2}\end{aligned}$$

Correction 24 1. oui, chaque issue arrive avec une probabilité de $\frac{1}{6}$.

2. La variable aléatoire prend comme valeur $0,1,2$ ou 3. Calculons les différentes probabilités. On modélise les trois lancers par la donnée d'un triplet ordonné de $[\![1,6]\!]$, il y a donc 6^3 cas possibles. $(X=0)$ correspond aux triplets à valeurs dans $[\![1,5]\!]$ donc $P(X=0)=\frac{5^3}{6^3}$. On a $4\times P(X=0)\neq 1$ donc la loi n'est pas uniforme.

3. On peut considérer que chaque date arrive avec la même probabilité donc la variable aléatoire suit une loi uniforme.

4. Dans le cas où on ne considère que le jour, la variable aléatoire prend ses valeurs entre 1 et 31 mais elle n'aura pas la même probabilité selon le mois de naissance.

Correction 25 La variable aléatoire sur une loi de Bernoulli de paramètre 0.4, on a donc $P(X=1)=0.4$ et $P(X=0)=0.6$. Comme X ne prend comme valeur que 0 ou 1, on a $P(X>1)=0$.

Correction 26 1. X peut prendre comme valeurs des entiers entre 0 et 3, donc $X(\Omega)=[\![0,3]\!]$.

Chaque naissance est une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

X est égal au nombre de " succès " au cours de la répétition d'expériences de Bernoulli de même paramètre, que l'on peut supposer mutuellement indépendantes : donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(3, \frac{1}{2}\right)$ de paramètres $(n, p) = \left(3, \frac{1}{2}\right)$.

2. X peut prendre des valeurs entières entre 0 et 2, 0 pour un lama, 1 pour un dromadaire et 2 pour un chameau :$X(\Omega) = [\![0, 2]\!]$

   Chaque animal, étant choisi au hasard, est équiprobable.

   Par exemple, la probabilité que X soit égal à 0 est la probabilité qu'un lama soit sorti du champ : par équiprobabilité, elle est égale au nombre de lamas divisé par le nombre total d'animaux : $P(X = 0) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

   Comme il y autant d'animaux de chaque type, $P(X = 1) = P(X = 2) = \frac{1}{3}$.

   Donc X suit une loi uniforme sur $[\![0, 2]\!]$.

3. Le nombre de cravates dans le premier tiroir peut varier entre 0 et 20 : donc$X(\Omega) = [\![0, 20]\!]$.

   Chaque cravate possède la même probabilité de se retrouver dans le premier tiroir, égale à $\frac{1}{3}$ par équiprobabilité. Il s'agit ici d'une expérience de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{3}$.

   On répète $n = 20$ fois ces expériences de Bernoulli, de même paramètre, mutuellement indépendantes, et X est égal au nombre de succès.

   Donc X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(20, \frac{1}{3}\right)$ de paramètres $(n, p) = \left(20, \frac{1}{3}\right)$

4. On peut retourner de 1 à 78 cartes avant de trouver l'Excuse.

   Donc $X(\Omega) = [\![1, 78]\!]$.

   Notons A_k l'évènement : " on trouve l'Excuse à la k-ieme tentative ". On trouve l'excuse à la k-ieme tentative si et seulement on ne l'a pas trouvée aux $(k - 1)$ tentatives précédentes, et on l'a trouvée au k-ieme essai.

   Donc $A_k = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$.

   D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k) \\ &= P(\overline{A_1}) P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}(\overline{A_3}) \ldots P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k) \end{aligned}$$

   Or :

   - $\overline{A_1}$ est réalisé lorsque l'on a choisit une 'mauvaise' carte, au nombre de 77 dans un total de 78 cartes. Chaque carte étant équiprobable, on a : $P(\overline{A_1}) = \frac{77}{78}$.
   - Pour $j \in [\![2, k - 1]\!]$, si $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{j-1}}$ est réalisé, on a déjà essayé $j - 1$ cartes, qui n'était pas l'excuse ; $\overline{A_j}$ est réalisé lorsque l'on choisit une mauvaise carte, au nombre de $78 - (j - 1) - 1 = 78 - j$ dans un total de $78 - (j - 1)$ cartes. Chaque carte étant équiprobable, on a : $P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{j-1}}}(\overline{A_j}) = \frac{78 - j}{78 - j + 1}$.
   - Enfin, si $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}}$ est réalisé, on a déjà essayé $k - 1$ cartes, qui n'étaient pas l'excuse ; A_k est réalisé lorsque l'on choisit l'excuse parmi un total de $78 - (k - 1)$ cartes. Chaque carte étant équiprobable, on a : $P_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{k-1}}}(A_k) = \frac{1}{78 - k + 1}$.

   On obtient alors

$$\begin{aligned} P(A_k) &= \frac{77}{78} \left(\prod_{j=2}^{k-1} \frac{78 - j}{78 - j + 1} \right) \frac{1}{78 - k + 1} \\ &= \frac{77}{78} \times \frac{76}{77} \times \frac{75}{76} \times \ldots \times \frac{78 - k + 2}{78 - k + 3} \times \frac{78 - k + 1}{78 - k + 2} \times \frac{1}{78 - k + 1}. \end{aligned}$$

   On reconnaît un produit télescopique, on obtient $P(A_k) = \frac{1}{78}$.

   Ainsi, X suit une loi uniforme sur $[\![1, 78]\!]$

Correction 27 1. Étant donné que le Gala accueille 2500 participants, le nombre de participants choisissant le vestiaire $V1$ peut varier entre 0 et 2500. Donc $X(\Omega) = [\![0, 2500]\!]$

2. On cherche la probabilité de l'événement $(X = 0)$.

   Pour tout $k \in [\![1, 2500]\!]$, on définit la variable aléatoire Y_k égale à :
   $\begin{cases} 1 \text{ si le } k\text{-ieme participant choisit le vestiaire } V1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

   Alors $(X = 0) = \bigcap_{k=1}^{2500} (Y_k = 0)$.

   Or, par hypothèse, les choix de chaque participant est indépendant du choix des autres participants. Les événements $(Y_k = 0)$ sont alors mutuellement indépendants. Donc :

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{2500}(Y_k=0)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{2500} P(Y_k=0) \text{ par indépendance mutuelle} \end{aligned}$$

Or chaque participant choisit son vestiaire de manière aléatoire : chaque vestiaire est donc équiprobable. Ainsi : $P(Y_k=0) = \dfrac{\text{Card}(\{V2,V3\})}{\text{Card}(\{V1,V2,V3\})} = \dfrac{2}{3}$. D'où :

$$P(X=0) = \prod_{k=1}^{2500} \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2500}$$

3. De même, on cherche la probabilité de l'événement $(X=2500)$:

$$\begin{aligned} P(X=2500) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{2500}(Y_k=1)\right) \\ &= \prod_{k=1}^{2500} P(Y_k=1) \text{ par indépendance mutuelle} \end{aligned}$$

Or comme $Y_k(\Omega)=\{0,1\}$, $P(Y_k=1) = 1-P(Y_k=0) = \dfrac{1}{3}$. D'où :

$$P(X=2500) = \prod_{k=1}^{2500} \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2500}$$

4. D'après les questions précédentes, pour tout $k \in [\![1,2500]\!]$, Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{3}$. Par hypothèse, les variables aléatoires $(Y_k)_{k\in[\![1,2500]\!]}$ sont mutuellement indépendantes.

Et $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{2500} Y_k$: X est la somme de $n=2500$ variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli, de même paramètre $p=\dfrac{1}{3}$, mutuellement indépendantes. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n=2500$ et $p=\dfrac{1}{3}$:

$$\forall\, k \in [\![0,2500]\!]\ ,\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \binom{2500}{k}\frac{2^{2500-k}}{3^{2500}}$$

Correction 28 1. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. $X_k(\Omega) = [\![0,1]\!]$, donc X_k suit une loi de Bernoulli.

Les chevaux se répartissant au hasard, chaque emplacement est équiprobable. Donc il y a une chance sur n que le cheval numéro k se retrouve dans l'emplacement numéro k : $P(X_k=1) = \dfrac{1}{n}$.

Donc X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$.

Par conséquent, $E(X_k) = \dfrac{1}{n}$ et $V(X_k) = \dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n-1}{n^2}$

2. Soit $(k,l) \in [\![0,n]\!]^2$ tel que $k \neq l$.

Le produit X_kX_l est à valeurs dans $\{0,1\}$, et est égal à 1 si et seulement si $X_k=1$ et $X_l=1$. D'où :

$$\begin{aligned} E(X_kX_l) &= 0\times P(X_kX_l=0) + 1\times P(X_kX_l=1) \\ &= P((X_k=1)\cap(X_l=1)) \\ &= P(X_k=1)P_{(X_k=1)}(X_l=1) \end{aligned}$$

$P_{(X_k=1)}(X_l = 1)$ est la probabilité que le cheval numéro l soit dans l'emplacement numéro l sachant que le cheval numéro k est dans son emplacement : il y a cette fois une chance sur $n-1$.

D'où : $E(X_kX_l) = \dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{n-1}$

3. Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]X_l)$

Donc X_k et X_l ne sont pas indépendantes

4. Remarquons que $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ est la somme de variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre, mais pas 2 à 2 indépendantes, donc pas mutuellement indépendantes. S ne suit donc pas une loi binomiale.

Or l'espérance est linéaire : $E(S) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} = n\times\frac{1}{n} = 1$: $E(S)=1$

D'après l'énoncé :

$$\begin{aligned}
V(S) &= \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} E(X_kX_l) - E(X_k)E(X_l)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-1}{n^2} + 2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n}\left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right)\\
&= n\times\frac{n-1}{n^2} + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{n-1}{n} + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left((n-(k+1)+1)\times\frac{1}{n(n-1)}\right)\\
&= \frac{n-1}{n} + \frac{2}{n^2(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\\
&= \frac{n-1}{n} + \frac{2}{n^2(n-1)}\times\frac{n(n-1)}{2}\\
&\text{somme des termes consécutifs de la suite arithmétique}(u_k)_k = (n-k)_k\\
&= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}\\
&= 1
\end{aligned}$$

D'où $V(S) = 1$

Correction 41 1. $X(\Omega) = [\![-2,3]\!]$ et $((X=k))_{k\in X(\Omega)}$ définit un système complet d'événements. En particulier (attention ce n'est ici qu'une implication) :

$$\sum_{k=-2}^{3} P(X=k) = 1 \iff 10a = 1 \iff a = \frac{1}{10}$$

2. $(X \leqslant 0) = (X=-2)\cup(X=-1)\cup(X=0)$.

   Ces 3 événements étant 2 à 2 incompatibles :

   $P(X\leqslant 0) = P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0) = 4a$

   D'après 1. $P(X\leqslant 0) = \dfrac{4}{10}$

   De même :

$$\begin{aligned}
P(|X|\leqslant 1) &= P(-1\leqslant X\leqslant 1)\\
&= P((X=-1)\cup(X=0)\cup(X=1))\\
&= P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)\\
&\ \text{par incompatibilité 2 à 2 des événements}\\
&= \frac{5}{10}
\end{aligned}$$

3. D'après la définition de l'espérance, $E(X) = \displaystyle\sum_{k=-2}^{3} kP(X=k) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

   $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (formule de Koenig-Huygens)

   Or d'après le théorème du transfert, $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=-2}^{3} k^2P(X=k) = \frac{34}{10} = \frac{17}{5}$

   D'où $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{17}{5} - \dfrac{9}{25} = \dfrac{76}{25}$.

4. D'après la linéarité de l'espérance, $E(Y) = E(X)+1 = \dfrac{8}{5}$.

   Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $V(aX+b) = a^2V(X)$. Avec $a=1$ et $b=1$, $Y = aX+b$ et $V(Y) = V(X)$

5. Comme $X(\Omega) = \{-2,-1,0,1,2,3\}$, on a $Z(\Omega) = [\![0,3]\!]$

$$\begin{aligned}
P(Z=0) &= P(X=1) = 3a\\
P(Z=1) &= P((X-1=1)\cup(X-1=-1))\\
&= P((X=2)\cup(X=0))\\
&= P(X=2)+P(X=0)\\
&= 2a
\end{aligned}$$

   De même :

$$\begin{aligned}
P(Z=2) &= P((X=-1)\cup(X=3)) = P(X=-1)+P(X=3) = 3a\\
P(Z=3) &= P(X=-2) = 2a
\end{aligned}.$$

   On obtient alors la loi de Z décrite par le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(Z=k)$	$3a$	$2a$	$3a$	$2a$

6. $T(\Omega) = \{0,1\}$ et $P(T=1) = \dfrac{1}{3}$, $P(T=0) = 1-\dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

   Comme X et T sont indépendantes :

   $\forall\ (i,j)\in T(\Omega)\times X(\Omega),\ P((T=i)\cap(X=j)) = P(T=i)P(X=j)$.

   On obtient alors la loi conjointe de (T,X) suivante :

(T,X)	-2	-1	0	1	2	3
0	$\frac{4}{3}a$	$\frac{2}{3}a$	$\frac{2}{3}a$	$2a$	$\frac{2}{3}a$	$\frac{4}{3}a$
1	$\frac{2}{3}a$	$\frac{1}{3}a$	$\frac{1}{3}a$	a	$\frac{1}{3}a$	$\frac{2}{3}a$

   Comme X et T sont indépendantes, $E(TX) = E(T)E(X) = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{5}$.

Correction 42 1. (a) Le tirage est successif avec remise, il est donc modélisé par un couple (i,j) de $[\![1,N]\!]$ donc $\Omega = [\![1,N]\!]^2$ et $\#\Omega = N^2$. On a $X(\Omega) = [\![1,N]\!]$. Déterminons la loi de X. On a :

- $(X = 1)$ si on tire $(1,1)$ il y a donc un unique cas favorable donc $P(X=1) = \dfrac{1}{N^2}$.
- $(X=2)$ si on tire $(1,2),(2,2)$ ou $(2,1)$, il y a donc trois cas favorables donc $P(X=2) = \dfrac{3}{N^2}$.
- De manière générale, pour avoir $(X = k)$ on doit avec (i,k) ou (k,i) avec $i < k$ (il y a $2\times(k-1)$ cas) ou bien (k,k) (1 cas) donc $2(k-1)+1 = 2k-1$ cas favorables. Ainsi $P(X=k) = \dfrac{2k-1}{N^2}$.

(b) Pour calculer l'espérance de X, on doit calculer :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(2k-1)k}{N^2} = \frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{N} k^2 - \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} k = \frac{1}{N^2}\left(\frac{N(N+1)(2N+1)}{3} - \frac{N(N+1)}{2}\right) = \frac{(N+1)(4N-1)}{6N}.$$

L'espérance de X est donc $\dfrac{(N+1)(4N-1)}{6N}$.

(c) On détermine la loi de Y :

- On a $Y = 1$ si on a un tirage de la forme $(1,i)$ ou $(i,1)$ avec $i > 1$ $(2(N-1)$ choix) ou bien $(1,1)$, on a donc $2N-1$ cas favorables donc $P(Y=1) = \dfrac{2N-1}{N^2}$.
- On a $Y = 2$ si on a un tirage de la forme $(2,i)$ ou $(i,2)$ avec $i > 2$ $(2(N-2)$ choix) ou bien $(2,2)$, on a donc $2N-3$ cas favorables donc $P(Y=2) = \dfrac{2N-3}{N^2}$.
- De manière générale, on a $Y = k$ si on a un tirage de la forme (k,i) ou (i,k) avec $i > k$ $(2(N-k)$ choix) ou bien (k,k), on a donc $2(N-k)+1$ cas favorables donc $P(Y=k) = \dfrac{2(N-k)+1}{N^2}$.

On remarque que $Y = \dfrac{2}{N} - X$ donc $E(Y) = \dfrac{2}{N} - E(X)$.

2. Ici, on a $\Omega = \{(i,j) \in [\![1,N]\!], i \neq j\}$. On a $\#\Omega = N(N-1)$.

On commence par déterminer la loi de X. Comme le tirage est sans remise, on a désormais $X(\Omega) = [\![2,N]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1,N-1]\!]$.

- On a $(X = 2)$ si on fait le tirage $(1,2)$ ou $(2,1)$ donc il y a deux cas favorables. On a donc $P(X=1) = \dfrac{2}{N(N-1)}$.
- De manière plus générale, on a $(X = k)$ si on a un tirage de la forme (i,k) ou (k,i) avec $i < k$, il y a donc $2(k-1)$ cas favorables donc $P(X=k) = \dfrac{2(k-1)}{N(N-1)}$

On calcule l'espérance de X, on a

$$E(X) = \sum_{k=2}^{N} \frac{2k(k-1)}{N(N-1)}.$$

On remarque que pour $k = 1$, on a 0, on va donc faire commencer la somme à 1 pour avoir les formules que l'on connaît. On a

$$E(X) = \frac{1}{N(N-1)}\left(\frac{N(N+1)(2N+1)}{3} - \frac{N(N+1)}{2}\right) = \frac{(N+1)(4N-1)}{6(N-1)}.$$

On détermine la loi de Y. On a :

- $(Y = 1)$ lorsque l'on a un tirage de la forme $(1,i)$ ou $(i,1)$ avec $i > 1$, il y a donc $2(N-1)$ cas favorables donc $P(Y=1) = \dfrac{2(N-1)}{N(N-1)}$.
- $(Y = k)$ lorsque l'on a un tirage de la forme (k,i) ou (i,k) avec $i > k$, il y a donc $2(N-k)$ cas favorables donc $P(Y=k) = \dfrac{2(N-k)}{N(N-1)}$.

On remarque que $Y = \dfrac{2}{N} - X$ donc $E(Y) = \dfrac{2}{N} - E(X)$.

3. On a $\Omega = \mathcal{P}_m([\![1,N]\!])$ (ensemble des parties à m éléments de $[\![1,N]\!]$), donc $\#\Omega = \binom{N}{m}$.

(a) Pour tout $k \in [\![1,N]\!]$, on a $X_k(\Omega) = \{0,k\}$ (deux valeurs possibles). On a $(X_k = 0)$ si la poignée a été prélevée dans l'ensemble des entiers différents de k, il y a donc $\binom{n-1}{m}$ cas favorables. Après simplification, on trouve

$$P(X_k = 0) = \frac{N-m}{N}.$$

On a $(X_k = k)$ si on a prélevé la boule numéro k et $m-1$ boules parmi les $N-1$ boules différentes de k, il y a donc $\binom{n-1}{m-1}$ cas favorables. Après simplification, on trouve $P(X_k = k) = \dfrac{m}{N}$. On a donc $E(X) = \dfrac{km}{N}$.

(b) On note maintenant S la somme des boules. On remarque que $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k$, on a donc

$$E(S) = \sum_{k=1}^{N} E(X_k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{km}{N} = \frac{m(N+1)}{2}.$$

Correction 43 1. (a) La longueur de la première série peut varier entre 1 et n par définition. Donc $L_1(\Omega_n) = [\![1, n]\!]$

(b) Pour obtenir $(L_1 = m)$, on a 2 cas possibles :

- m piles consécutifs puis face ;
- m faces consécutifs puis pile.

Ainsi :$(L_1 = m) = \left[\left(\bigcap_{i=1}^{m} P_i\right) \cap F_{m+1}\right] \cup \left[\left(\bigcap_{i=1}^{m} F_i\right) \cap P_{m+1}\right]$

D'où :

$$\begin{aligned}
P(L_1 = m) &= P\left(\left[\left(\bigcap_{i=1}^{m} P_i\right) \cap F_{m+1}\right] \cup \left[\left(\bigcap_{i=1}^{m} F_i\right) \cap P_{m+1}\right]\right) \\
\textit{or} \quad & \left[\left(\bigcap_{i=1}^{m} P_i\right) \cap F_{m+1}\right] \cap \left[\left(\bigcap_{i=1}^{m} F_i\right) \cap P_{m+1}\right] = \emptyset \\
P(L_1 = m) &= P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{m} P_i\right) \cap F_{m+1}\right) + P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{m} F_i\right) \cap P_{m+1}\right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{m} P(P_i)\right) P(F_{m+1}) + \left(\prod_{i=1}^{m} P(F_i)\right) P(P_{m+1}) \quad \textit{par indépendance mutuelle} \\
&= p^m q + q^m p
\end{aligned}$$

(c) Pour obtenir $(L_1 = n)$, on a 2 cas possibles :

- n piles consécutifs ;
- n faces consécutifs.

Ainsi : $(L_1 = n) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right)$

D'où :

$$\begin{aligned}
P(L_1 = n) &= P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right)\right) \\
\text{or} \quad & \left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) = \emptyset \\
P(L_1 = n) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} P_i\right) + P\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(P_i) + \prod_{i=1}^{n} P(F_i) \quad \textit{par indépendance mutuelle} \\
&= p^n + q^n
\end{aligned}$$

(d) $$\sum_{m=1}^{n} P(L_1 = m) = q\sum_{m=1}^{n-1} p^m + p\sum_{m=1}^{n-1} q^m + p^n + q^n$$

Or $\sum_{m=1}^{n-1} p^m$ est la somme des termes consécutifs de la suite géométrique $(p^m)_{m\geqslant 1}$ de raison $p \neq 1$ donc : $\sum_{m=1}^{n-1} p^m = \frac{p - p^n}{1-p} = \frac{p-p^n}{q}$

De même, $\sum_{m=1}^{n-1} q^m = \frac{q - q^n}{1-q} = \frac{q-q^n}{p}$

D'où : $$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n} P(L_1 = m) &= q\frac{p-p^n}{q} + p\frac{q-q^n}{p} + p^n + q^n \\
&= p + q \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. (a) On peut avoir $L_2 = 0$ s'il n'y a pas de deuxième série (dans le cas où $L_1 = n$).

Si $L_1 = m \in [\![1, n-1]\!]$, alors les longueurs maximales possibles sont $n - m$ avec $1 \leqslant n - m \leqslant n - 1$.

Donc $L_2(\Omega_n) = [\![0, n-1]\!]$

(b) Pour obtenir $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$, on a 2 cas possibles :

- m piles consécutifs puis k faces consécutifs puis pile ;
- m faces consécutifs puis k piles consécutifs puis face.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
(L_1 = m) \cap (L_2 = k) &= \left[\left(\bigcap_{i=1}^{m} P_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=m+1}^{m+k} F_i\right) \cap P_{m+k+1}\right] \\
&\cup \left[\left(\bigcap_{i=1}^{m} F_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=m+1}^{m+k} P_i\right) \cap F_{m+k+1}\right]
\end{aligned}$$

De même qu'en 1.b) :

$$\begin{aligned}
P((L_1=m)\cap(L_2=k)) &= P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{m} P_i\right)\cap\left(\bigcap_{i=m+1}^{m+k} F_i\right)\cap P_{m+k+1}\right)\\
&\quad +P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{m} F_i\right)\cap\left(\bigcap_{i=m+1}^{m+k} P_i\right)\cap F_{m+k+1}\right)\\
&\quad \textit{par incompatibilité des 2 événements}\\
&\quad \textit{correspondant aux 2 cas possibles}\\
&= \left(\prod_{i=1}^{m} P(P_i)\right)\left(\prod_{i=m+1}^{m+k} P(F_i)\right)P(P_{m+k+1})\\
&\quad +\left(\prod_{i=1}^{m} P(F_i)\right)\left(\prod_{i=m+1}^{m+k} P(P_i)\right)P(F_{m+k+1})\\
&\quad \textit{par indépendance mutuelle}\\
&= p^m q^k p + q^m p^k q\\
&= p^{m+1}q^k + q^{m+1}p^k
\end{aligned}$$

(c) Pour obtenir $(L_1=m)\cap(L_2=k)$ avec $m+k=n$, on a 2 cas possibles :

- m piles consécutifs puis k faces consécutifs ;
- m faces consécutifs puis k piles consécutifs.

Ainsi :

$$(L_1=m)\cap(L_2=k) = \left[\left(\bigcap_{i=1}^{m} P_i\right)\cap\left(\bigcap_{i=m+1}^{n} F_i\right)\right]\cup\left[\left(\bigcap_{i=1}^{m} F_i\right)\cap\left(\bigcap_{i=m+1}^{n} P_i\right)\right]$$

De même qu'en 1.b), en notant $a_{m,k}=P((L_1=m)\cap(L_2=k))$:

$$\begin{aligned}
a_{m,k} &= P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{m} P_i\right)\cap\left(\bigcap_{i=m+1}^{n} F_i\right)\right)+P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{m} F_i\right)\cap\left(\bigcap_{i=m+1}^{n} P_i\right)\right)\\
&\quad \textit{par incompatibilité des 2 événements}\\
&\quad \textit{correspondant aux 2 cas possibles}\\
&= \left(\prod_{i=1}^{m} P(P_i)\right)\left(\prod_{i=m+1}^{n} P(F_i)\right)+\left(\prod_{i=1}^{m} P(F_i)\right)\left(\prod_{i=m+1}^{n} P(P_i)\right)\\
&\quad \textit{par indépendance mutuelle}\\
&= p^m q^{n-m} + q^m p^{n-m}
\end{aligned}$$

Correction 44 1. Il y aura toujours au moins une case non vide, et au plus n après n lancers, sachant toutefois qu'on ne peut dépasser N cases non vides dans le cas où $N<n$ donc :

$$T_n(\Omega)=\{1;2;\ldots;\min(n,N)\}.$$

2. Après 1 lancer, il y aura toujours exactement une case non vide (celle dans lequel on a lancé la boule), donc $T_1=1$ (variable aléatoire constante).
   Au deuxième lancer, soit on relance dans la même case qu'au premier, et on a alors $T_2=1$, soit on lance dans une autre et $T_2=2$. La probabilité de lancer dans la même case étant $\frac{1}{N}$, on a :
   $$P(T_2=1)=\tfrac{1}{N},\text{ et } P(T_2=2)=\tfrac{N-1}{N}.$$
3. Pour avoir $T_n=1$, il faut avoir obtenu à chaque lancer à partir du deuxième la même case qu'au premier lancer, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{N}$ à chaque lancer, soit $P(T_n=1)=\left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}$.
   Le nombre de tirages donnant $T_n=2$ est obtenu en choisissant deux cases parmi les N, puis en se laissant deux possibilités à chaque tirage, et en supprimant à la fin les 2 tirages où on a tiré toujours dans la même case, soit $\binom{N}{2}\times(2^n-2)=(2^{n-1}-1)N(N-1)$. Ceci est à diviser par le nombre total de tirages, qui vaut N^n, donc :
   $$P(T_n=2)=\tfrac{(N-1)(2^{n-1}-1)}{N^{n-1}}.$$
4. Si $n\leqslant N, T_n=n$ si on tombe dans une nouvelle case à chaque tirage, ce qui correspond à $N(N-1)\ldots(N-n+1)$ tirages, soit :
   $$P(T_n=n)=\tfrac{N(N-1)\ldots(N-n+1)}{N^n}=\tfrac{N!}{(N-n)!N^n}.$$
   Si $n>N$, on ne peut pas avoir n cases non vides, donc $P(T_n=n)=0$.
5. Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Les évènements $(T_n=i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ forment un système complet d'évènements, donc d'après la formule des probabilités totales :
   $$P(T_{n+1}=k)=\sum_{i=1}^{n}P(T_n=i)\,P_{T_n=i}(T_{n+1}=k).$$
   Parmi les probabilités conditionnelles apparaissant dans cette formule, seules deux sont non nulles :
   - soit on avait déjà k cases non vides après n tirages et on a à nouveau tiré dans une de ces k cases (probabilité $P_{T_n=k}(T_{n+1}=k)=\frac{k}{N}$).
   - soit on en avait $k-1$ non vides et on a tiré dans une des $N-(k-1)$ cases restantes :
     $$P_{T_n=k-1}(T_{n+1}=k)=\frac{N-k+1}{N}$$
     .

6. (a) Notons pour commencer que la formule de la question 6 reste en fait valable pour $k = n + 1$, puis sommons ces égalités :

$$G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} P(T_{n+1})x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\tfrac{k}{N} P\left(T_n = k\right) + \tfrac{N-k+1}{N} P\left(T_n = k-1\right)\right) x^k$$

$$= \tfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{n+1} kP\left(T_n = k\right) x^k + (N-k+1)P\left(T_n = k-1\right) x^k$$

$$= \tfrac{x}{N} \sum_{k=1}^{n} kP\left(T_n = k\right) x^{k-1} + \tfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{n} (N-k)P\left(T_n = k\right) x^{k+1}$$

$$= \tfrac{x}{N} G_n'(x) + \tfrac{x}{N} \textstyle\sum_{k=1}^{n} NP\left(T_n = k\right) x^k - \tfrac{x^2}{N} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP\left(T_n = k\right) x^{k-1}$$

$$= \tfrac{x}{N} G_n'(x) + xG_n(x) - \tfrac{x^2}{N} G'n(x)$$

On peut aussi enlever le terme en $k + 1$ et constater qu'il correspond au terme manquant de la somme après changement d'indice.

(b) Dérivons donc :

$$G_{n+1}'(x) = \tfrac{1}{N}(1 - 2x)G_n'(x) + \tfrac{1}{N}\left(x - x^2\right) G_n''(x) + G_n(x) + xG_n'(x).$$

En prenant $x = 1$ (ce qui a le bon goût d'annuler le terme faisant intervenir la dérivée seconde) et en réutilisant les résultats précédents, on a

$$\mathbb{E}\left(T_{n+1}\right) = -\tfrac{1}{N}\mathbb{E}\left(T_n\right) + 1 + \mathbb{E}\left(T_n\right) = \left(1 - \tfrac{1}{N}\right)\mathbb{E}\left(T_n\right) + 1$$

car $\mathbb{E}\left(T_n\right) = G_n'(1)$.

(c) Posons $u_n = \mathbb{E}(T_n)$ alors (u_n) est une suite vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$. On sait calculer son terme général :

$$\mathbb{E}(T_n) = N - \tfrac{(N-1)^n}{N^{n-1}} = N(1 - (1 - \tfrac{1}{N})^n)$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = N$.

(d) X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^n$.

On sait que $T_n = \sum_{k=1}^{N} X_i$ donc :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{k=1}^{N} 1 - \left(\tfrac{N-1}{N}\right)^n = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$$