Maths - DS n^{o} 11

Consignes : rendre sur ***trois copies séparées*** *chacun des trois exercices du sujet.*
L'usage de tout appareil électronique est interdit.

Exercice 1 : (Fonction, suite, série)

On pose, pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{\ln(x)}\right)$.

Partie I : étude de f

1. Montrer qu'il existe un unique réel $x \in]0,1[$ qu'on précisera tel que $f(x) = 0$.
2. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x \to 0^+$.
3. Déduire de cet équivalent que la fonction f est prolongeable par continuité en 0, et que la fonction prolongée obtenue est dérivable en 0. On donnera l'équation de la tangente en 0.
4. Justifier que la fonction f est dérivable sur $]0,1[$, et exprimer $f'(x)$, pour tout $x \in]0,1[$, en fonction de $y = \frac{1}{\ln(x)}$ seulement.
5. En déduire l'existence et l'unicité d'un réel $x_0 \in]0,1[$ que l'on précisera tel que $f'(x_0) = 0$.
6. Déterminer les variations de f sur $[0,1[$ et dresser le tableau des variations de f en faisant apparaître les valeur/limite aux bords de $[0,1[$, ainsi que les valeurs d'annulation de f.
7. Justifier que pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) \leqslant x$.

Partie II : étude d'une suite récurrente

Dans cette partie, on considère une suite u vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 \in \left]0, \frac{1}{e}\right[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On admettra le théorème suivant (sa démonstration est l'objet de la partie III) :

Si v et w sont deux suites réelles strictement positives à partir d'un certain rang, vérifiant $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$, et si la série $\sum v_n$ diverge, alors : $$\sum_{k=0}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} w_k$$

II.A - Résultat préliminaire

8. Soit $\alpha \in]0,1[$. A l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer qu'on a (lorsque $n \to +\infty$) :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim a n^b$$

pour a, b deux réels que l'on précisera.

II.B - Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

9. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et à valeurs dans $\left]0, \frac{1}{e}\right[$.
10. Étudier sa monotonie.
11. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

II.C - Convergence de la série $\sum u_n$

12. Montrer que lorsque $n \to +\infty$, $\ln^2(u_{n+1}) - \ln^2(u_n)$ tend vers une constante β strictement positive que l'on déterminera.
13. En déduire que pour $n \to +\infty$: $\ln^2(u_n) \sim \beta n$.
14. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 u_n) = 0$, et en déduire que la série $\sum u_n$ converge.

II.D - Recherche d'un équivalent de u_n

Dans cette sous-partie, on pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $t_n = \ln^2(u_n) - 2n$.

15. Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, et trouver un équivalent de $t_{n+1} - t_n$ lorsque $n \to +\infty$ sous la forme $\frac{A}{n^\gamma}$, avec A et γ deux réels à déterminer.
16. En déduire un développement asymptotique de $\ln(u_n)$ lorsque $n \to +\infty$ de la forme :

$$\ln(u_n) \;=\; c\sqrt{n} + d + o(1)$$

où c et d sont des réels à déterminer.

17. En déduire un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Partie III : démonstration du théorème encadré

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème encadré. On considère donc v et w deux suites réelles strictement positives à partir d'un certain rang, vérifiant $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$ et on suppose que la série $\sum v_n$ diverge.

18. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant p$:

$$(1-\varepsilon)w_n \;\leqslant\; v_n \;\leqslant\; (1+\varepsilon)w_n$$

19. Conclure.