132 Lemme des noyaux (cas général avec 2 noyaux)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ deux scalaires distincts.

1. Soit $\delta \in \mathbb{K}^*$. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes tels que $X^pU + (X-\delta)^qV = 1$.
   Utiliser la formule de Bernoulli.
2. En déduire qu'il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes tels que $(X-\alpha)^pU + (X-\beta)^qV = 1$.
3. Montrer que $\operatorname{Ker}\Big((f-\alpha\,\mathrm{id})^p\Big)$ et $\operatorname{Ker}\Big((f-\beta\,\mathrm{id})^q\Big)$ sont en somme directe.
4. Ici, on suppose que $(X-\alpha)^p(X-\beta)^q$ est un polynôme annulateur de f.
   Montrer que
   $$E \;=\; \operatorname{Ker}\Big((f-\alpha\,\mathrm{id})^p\Big) \;\oplus\; \operatorname{Ker}\Big((f-\beta\,\mathrm{id})^q\Big)$$
5. Traiter la réciproque :
   Si $E = \operatorname{Ker}\Big((f-\alpha\,\mathrm{id})^p\Big) \oplus \operatorname{Ker}\Big((f-\beta\,\mathrm{id})^q\Big)$, alors $(X-\alpha)^p(X-\beta)^q$ est un polynôme annulateur de f.
6. Rappeler pourquoi, pour un endomorphisme φ, on a la chaîne d'inclusion :
   $$\{0_E\} \subset \operatorname{Ker}(\varphi) \subset \operatorname{Ker}(\varphi^2) \subset \cdots \subset \operatorname{Ker}(\varphi^k)$$
   Quand la dimension de E est finie, on a vu lors d'un exercice de TD que cette chaîne de noyaux itérés stagne.
7. Ici, on suppose que E est de dimension finie, donc f admet un polynôme annulateur (rappeler la preuve).
   On suppose que ce polynôme annulateur précis admet deux racines distinctes α et β.
   On suppose que $(X-\alpha)^p(X-\beta)^q$ est le polynôme minimal de f.
   Essayer de comprendre pourquoi p et q sont les indices de stagnation :
   $$\{0_E\} \subsetneq \operatorname{Ker}(f-\alpha\,\mathrm{id}) \subsetneq \operatorname{Ker}(f-\alpha\,\mathrm{id})^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker}(f-\alpha\,\mathrm{id})^p = \operatorname{Ker}(f-\alpha\,\mathrm{id})^{p+1}$$
   $$\{0_E\} \subsetneq \operatorname{Ker}(f-\beta\,\mathrm{id}) \subsetneq \operatorname{Ker}(f-\beta\,\mathrm{id})^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker}(f-\beta\,\mathrm{id})^q = \operatorname{Ker}(f-\beta\,\mathrm{id})^{q+1}$$
   On rappelle que
   $$\forall\, i, j \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Ker}\Big((f-\alpha\,\mathrm{id})^i\Big) \text{ et } \operatorname{Ker}\Big((f-\beta\,\mathrm{id})^j\Big) \text{ sont en somme directe}$$
8. Ici, on suppose que E est de dimension finie, donc f admet un polynôme annulateur (rappeler la preuve).
   Parmi ces polynômes, on peut également considérer *le* polynôme minimal de f (à votre avis, quelle est la définition de cette notion ?).
   On suppose que $(X-\alpha)^p(X-\beta)^q$ est le polynôme minimal de f.
   Essayer de comprendre pourquoi p et q sont les indices de stagnation :
   $$\{0_E\} \subsetneq \operatorname{Ker}(f-\alpha\,\mathrm{id}) \subsetneq \operatorname{Ker}(f-\alpha\,\mathrm{id})^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker}(f-\alpha\,\mathrm{id})^p = \operatorname{Ker}(f-\alpha\,\mathrm{id})^{p+1}$$
   $$\{0_E\} \subsetneq \operatorname{Ker}(f-\beta\,\mathrm{id}) \subsetneq \operatorname{Ker}(f-\beta\,\mathrm{id})^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Ker}(f-\beta\,\mathrm{id})^q = \operatorname{Ker}(f-\beta\,\mathrm{id})^{q+1}$$
   On rappelle que
   $$\forall\, i, j \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Ker}\Big((f-\alpha\,\mathrm{id})^i\Big) \text{ et } \operatorname{Ker}\Big((f-\beta\,\mathrm{id})^j\Big) \text{ sont en somme directe}$$