Entraînement DS n^{o} 10 - Produits scalaires, probabilités, analyse

---

Exercice 1 : (★★ Urnes de Polya et fonction génératrice)

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On pose $X_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après n tirages.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $g_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(X_n = k)\, t^k$

La fonction g_n est appelée fonction génératrice de X_n.

1. Dans cette question, on respecte le protocole suivant : à chaque tirage, on prend une boule dans l'urne, puis on la remet dans l'urne en ajoutant en plus une boule de la même couleur que la boule tirée.

   (a) Déterminer les lois de X_1, X_2, X_3, ainsi que g_1, g_2, g_3.

   (b) Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$. Etablir :
   $$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{k-1}{n+1}\,\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1) + \frac{n+1-k}{n+1}\,\mathbb{P}(X_{n-1} = k)$$

   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$g_n(t) = \frac{t^2 - t}{n+1}\,(g_{n-1})'(t) + g_{n-1}(t)$$

   (d) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g_n(t) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} t^k$.

   (e) En déduire la loi de X_n et donner son espérance.

2. Dans cette question, on respecte le protocole suivant : à chaque tirage, on prend une boule dans l'urne, puis on la remet dans l'urne en ajoutant en plus une boule de l'autre couleur (ainsi, si on prend une boule blanche, on rajoute une boule noire dans l'urne).

   (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n = n+2-k)$.

   (b) Déterminer la loi de X_3.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = 2)$ (on obtiendra une somme que l'on ne cherchera pas à simplifier).

   (d) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n)$ à l'aide de $(g_n)'(1)$.

   (e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $2g_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(X_n = k)\left(t^k + t^{n+2-k}\right)$.

   (f) En déduire $\mathbb{E}(X_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 : (★★ Sur le produit vectoriel)

NB : l'exercice propose une façon d'introduire mathématiquement le produit vectoriel. On le considérera donc comme une notion nouvelle, ce qui exclut l'utilisation de propriétés utilisées dans les autres matières scientifiques.

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel : $(x, y) \mapsto (x \mid y) = x^T.y$

Définition : Pour tous vecteurs $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, on note $a \wedge b = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$.

On fixe $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur **non nul**, et on note f l'application de $\mathbb{R}^3$ de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad f(x) = a \wedge x$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a $f(x) = A.x$ pour une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à préciser. En déduire que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. En remarquant que $A^T = -A$, montrer que :
   (a) $\det(A) = 0$
   (b) $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$, $(f(x) \mid y) = -(x \mid f(y))$. *Indication : se souvenir que* $(u \mid v) = u^T.v$
3. L'objectif de cette question est de montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(a)$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Vect}(a) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
   (b) Justifier que $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.
   (c) Conclure.
4. Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, puis montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(a)^\perp$.
   Conseil : calculer le produit scalaire entre a et chacune des colonnes de A.
5. Justifier qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. *On ne demande pas d'expliciter cette base.*
6. Á l'aide de 2.(b), montrer que les produits scalaires $(f(e_2) \mid e_1)$ et $(f(e_2) \mid e_2)$ sont nuls. En déduire que le vecteur $[f(e_2)]_{\mathcal{E}}$ des coordonnées de $f(e_2)$ dans la base $\mathcal{E}$ est du type $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
7. Montrer que la matrice qui représente f dans la base $\mathcal{E}$ est égale à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$.
8. On admet (c'est une simple vérification calculatoire) que pour tous vecteurs $x, y, z \in \mathbb{R}^3$:
   $$x \wedge (y \wedge z) = (x \mid z)y - (x \mid y)z$$
   Montrer que $|\lambda| = \|a\|$.

Interprétation du résultat des deux dernières questions : f peut être étudié par ses restrictions sur deux sous-espaces supplémentaires :

— *Sur Vect(a), c'est* 0.
— *Sur le plan orthogonal au vecteur a (c-à-d Vect(e_2, e_3)), il s'agit de la composée d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'une homothétie de rapport $\|a\|$.*

Exercice 3 : (★★ Fonction, suite, série)

On pose, pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{\ln(x)}\right)$.

Partie I : étude de f

1. Montrer qu'il existe un unique réel $x \in]0,1[$ qu'on précisera tel que $f(x) = 0$.
2. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x \to 0^+$.
3. Déduire de cet équivalent que la fonction f est prolongeable par continuité en 0, et que la fonction prolongée obtenue est dérivable en 0. On donnera l'équation de la tangente en 0.
4. Justifier que la fonction f est dérivable sur $]0,1[$, et exprimer $f'(x)$, pour tout $x \in]0,1[$, en fonction de $y = \frac{1}{\ln(x)}$ seulement.
5. En déduire l'existence et l'unicité d'un réel $x_0 \in]0,1[$ que l'on précisera tel que $f'(x_0) = 0$.
6. Déterminer les variations de f sur $[0,1[$ et dresser le tableau des variations de f en faisant apparaître les valeur/limite aux bords de $[0,1[$, ainsi que les valeurs d'annulation de f.
7. Justifier que pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) \leqslant x$.

Partie II : étude d'une suite récurrente

Jusqu'à la fin de ce problème, on considère une suite u vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 \in \left]0, \frac{1}{e}\right[\\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

On admettra le théorème suivant :

> *Si v et w sont deux suites réelles positives vérifiant $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$, et si la série $\sum v_n$ diverge, alors :*
>
> $$\sum_{k=0}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} w_k$$

II.A - Résultat préliminaire

8. Soit $\alpha \in]0,1[$. A l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer qu'on a (lorsque $n \to +\infty$) :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim a n^b$$

pour a, b deux réels que l'on précisera.

II.B - Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

9. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et à valeurs dans $\left]0, \frac{1}{e}\right[$.
10. Étudier sa monotonie.
11. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

II.C - Convergence de la série $\sum u_n$

12. Montrer que lorsque $n \to +\infty$, $\ln^2(u_{n+1}) - \ln^2(u_n)$ tend vers une constante β strictement positive que l'on déterminera.
13. En déduire que pour $n \to \infty$: $\ln^2(u_n) \sim \beta n$.
14. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 u_n) = 0$, et en déduire que la série $\sum u_n$ converge.

II.D - Recherche d'un équivalent de u_n

Dans cette sous-partie, on pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \ln^2(u_n) - 2n$.

15. Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, et trouver un équivalent de $v_{n+1} - v_n$ lorsque $n \to +\infty$ sous la forme $\frac{A}{n^\gamma}$, avec A et γ deux réels à déterminer.
16. En déduire un développement asymptotique de $\ln(u_n)$ lorsque $n \to +\infty$ de la forme :

$$\ln(u_n) \; = \; c\sqrt{n} + d + o(1)$$

où c et d sont des réels à déterminer.

17. En déduire un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Partie III : démonstration du théorème encadré

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème encadré. On considère donc v et w deux suites réelles positives vérifiant $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$ et on suppose que la série $\sum v_n$ diverge.

18. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant p$:

$$(1-\varepsilon)w_n \; \leqslant \; v_n \; \leqslant \; (1+\varepsilon)w_n$$

19. Conclure.

Exercice 4 : (★★★ Un endomorphisme symétrique)

Soit n un entier, $n \geqslant 1$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Pour $P, Q \in E$, on pose :

$$\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad f(P) = ((X^2-1)P')'.$$

1. Démontrer que φ définit un produit scalaire sur E.

   On considère dans la suite l'espace euclidien E associé au produit scalaire φ. Si $P, Q \in E$, le nombre $\varphi(P,Q)$ est désormais noté $\langle P, Q\rangle$, et la norme euclidienne de P est notée $\|P\|$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace euclidien E. On dit que u est **symétrique** si

   $$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x \mid u(y)\rangle\,.$$

   A l'aide d'intégrations par parties, montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
3. Déterminer $\ker(f)$ et en déduire le rang de f.
4. A l'aide de la propriété de symétrie, montrer que $\operatorname{Im}(f) \subset (\ker f)^{\perp}$, puis montrer que $\operatorname{Im}(f) = (\ker f)^{\perp}$.
5. On suppose, dans cette question seulement, que $n = 2$ et on définit le polynôme $P_0 = 1 + X$.
   (a) Calculer $f(X)$ et $f(X^2)$ et montrer que $(f(X), f(X^2))$ est une base orthogonale de $\operatorname{Im}(f)$. En déduire une base orthogonale (la plus simple possible) adaptée à la somme $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$.
   (b) Déterminer le projeté orthogonal de P_0 sur $\operatorname{Im}(f)$.
   (c) Déterminer $m = \inf\limits_{P \in \mathbb{R}_2[X]} \|P_0 - f(P)\|$.
   (d) (Question bonus) Résoudre l'équation $\|P_0 - f(P)\| = m$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}_2[X]$.
6. On définit une suite $(L_k)_{k\geqslant 0}$ de polynômes en posant $L_0 = 1$ et :

   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad L_k = \left((X^2-1)^k\right)^{(k)}$$

   (c'est-à-dire : L_k est la dérivée k-ième de $(X^2-1)^k$).
   (a) Calculer les polynômes L_1, L_2 et L_3.
   (b) Déterminer le degré de L_k.
   (c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

   $$A_k = ((X^2-1)(X^2-1)^k)^{(k+2)}$$
   $$B_k = (X(X^2-1)^k)^{(k+1)}.$$

   A l'aide de la formule de Leibniz, exprimer les polynômes A_k et B_k à l'aide des polynômes L_k, L_k' et L_k''.
   Indication : pour A_k par exemple, les dérivées successives de X^2-1 font vite 0...
   (d) Montrer, en revenant à la définition de A_k et B_k, la relation $A_k = 2(k+1)B_k$.
   Indication : dériver $k+2$ fois revient à dériver une fois, puis $k+1$ fois.
   (e) Déduire des deux questions précédentes que pour $k \in \mathbb{N}$ on a

   $$(X^2-1)L_k'' + 2XL_k' - k(k+1)L_k = 0.$$

   (f) À l'aide de la relation précédente, démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $f(L_k) = \lambda_k L_k$. (on précisera la valeur de λ_k).
   (g) Démontrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base orthogonale de E, et donner la matrice représentative de f dans cette base.
   Indication : on peut montrer l'orthogonalité sans faire de calcul technique, en utilisant la question précédente et la formule de symétrie sur la quantité $\langle f(L_i), L_j\rangle$.

Correction entr DS n° 10

Corrigé exercice 1 :

1. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k : « la k-ème boule tirée est blanche ».

   ► On a $X_1(\Omega) = \{1,2\}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(B_1) = \dfrac{1}{2}$, donc $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

   Donc X_1 suit une loi uniforme sur $\{1,2\}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\boxed{g_1(t) = \dfrac{1}{2}\left(t + t^2\right)}$.

   ► On a $X_2(\Omega) = \{1,2,3\}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 3) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(B_2 \mid B_1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

   De plus, $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B_2} \mid \overline{B_1}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$,

   et $\mathbb{P}(X_2 = 2) = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

   Donc X_2 suit une loi uniforme sur $\{1,2,3\}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\boxed{g_2(t) = \dfrac{1}{3}\left(t + t^2 + t^3\right)}$.

   ► $X_3(\Omega) = \{1,2,3,4\}$ et avec la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X_3 = 4) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(B_2 \mid B_1)\,\mathbb{P}(B_3 \mid B_1 \cap B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

   De plus,

$$\mathbb{P}(X_3 = 1) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3}\right) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B_2} \mid \overline{B_1}\right)\mathbb{P}\left(\overline{B_3} \mid \overline{B_1} \cap \overline{B_2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_3 = 3) &= \mathbb{P}\left(B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}\right) + \mathbb{P}\left(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3\right) + \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap B_2 \cap B_3\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

   Enfin, $\mathbb{P}(X_3 = 2) = 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$. Donc X_3 suit une loi uniforme sur $\{1,2,3,4\}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\boxed{g_2(t) = \dfrac{1}{4}\left(t + t^2 + t^3 + t^4\right)}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $k \leqslant n$. La famille $(X_{n-1} = i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements. Donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_n = k \mid X_{n-1} = i)\,\mathbb{P}(X_{n-1} = i)$$

   Or :
   - pour $i \notin \{k-1, k\}$,
$$\mathbb{P}(X_n = k \mid X_{n-1} = i) = 0$$
   - Pour $i = k - 1$:
$$\mathbb{P}(X_n = k \mid X_{n-1} = k-1) = \frac{k-1}{n+1}$$

     (En effet, il y a alors $n+1$ boules dans l'urne car on en a rajouté $n-1$ et on doit prendre une boule blanche alors qu'il y en a $k-1$)

- Pour $i = k$:
$$\mathbb{P}\left(X_n = k \mid X_{n-1} = k\right) = \frac{n+1-k}{n+1}$$
(En effet, on prend une boule noire alors qu'il y en a $n+1-k$)

On a donc bien, pour tout $k \in [\![1;n]\!]$,
$$\mathbb{P}\left(X_n = k\right) = \frac{k-1}{n+1}\,\mathbb{P}\left(X_{n-1} = k-1\right) + \frac{n+1-k}{n+1}\,\mathbb{P}\left(X_{n-1} = k\right)$$
Enfin, le résultat reste vrai si $k = n+1$, car
$$\mathbb{P}\left(X_n = n+1\right) = \mathbb{P}\left(X_n = n+1 \mid X_{n-1} = n\right)\mathbb{P}\left(X_{n-1} = n\right) = \frac{n}{n+1}\mathbb{P}\left(X_{n-1} = n\right)$$
Et, si $k > n+1$, on obtient $0 = 0$. La formule est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $t \in \mathbb{R}$.
$$g_n(t) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}\left(X_n = k\right) t^k = \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{k-1}{n+1}\mathbb{P}\left(X_{n-1} = k-1\right) + \frac{n+1-k}{n+1}\,\mathbb{P}\left(X_{n-1} = k\right)\right) t^k$$
Donc, en posant dans la première somme le changement d'indice $m = k-1$, et en réordonnant les sommes :
$$\begin{aligned} g_n(t) = &\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}\left(X_{n-1} = k\right) t^{k+1} - \sum_{k=1}^{n+1} k\mathbb{P}\left(X_{n-1} = k\right) t^k\right) \\ &+ \frac{n+1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}\left(X_{n-1} = k\right) t^k\right)\end{aligned}$$
Or, $\mathbb{P}\left(X_{n-1} = n+1\right) = 0$, donc les deux dernières sommes écrites peuvent n'aller que jusqu'au terme $k = n$. De plus, la fonction g_{n-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left(g_{n-1}\right)'(t) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left(X_{n-1} = k\right) kt^{k-1}$. En remplaçant dans l'expression ci-dessus, on en déduit :
$$g_n(t) = \frac{t^2 - t}{n+1}\left(g_{n-1}\right)'(t) + g_{n-1}(t)$$

(d) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour prouver $H(n)$: "$\forall t \in \mathbb{R},\ g_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} t^k$".

- $H(1)$ est vraie avec la question 1a.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $H(n-1)$ est vraie. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors, d'après la question 1c,
$$g_n(t) = \frac{t^2 - t}{n+1}\left(g_{n-1}\right)'(t) + g_{n-1}(t)$$
Or, d'après l'hypothèse de récurrence $H(n-1)$,
$$g_{n-1}(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t^k, \qquad \text{donc :} \quad \left(g_{n-1}\right)'(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} kt^{k-1}$$
On en déduit
$$\begin{aligned} g_n(t) &= \frac{1}{n(n+1)}\left(\sum_{k=1}^{n} kt^{k+1} - \sum_{k=1}^{n} kt^k + (n+1)\sum_{k=1}^{n} t^k\right) \\ &= \frac{1}{n(n+1)}\left(\sum_{k=2}^{n+1}(k-1)t^k - \sum_{k=1}^{n} kt^k + (n+1)\sum_{k=1}^{n} t^k\right) \leftarrow \left(\begin{array}{c}\text{chgt d'indice} \\ \text{somme de gauche}\end{array}\right) \\ &= \frac{1}{n(n+1)}\left(\left(\sum_{k=2}^{n}(k-1-k+n+1)t^k\right) + nt^{n+1} + (n+1-1)t\right)\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien

$$g_n(t) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} n t^k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} t^k$$

La propriété $H(n)$ est donc vraie.

- On en déduit que la propriété $H(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(e) On a ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} t^k = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}\left(X_n = k\right) t^k$$

Or, g_n et $t \mapsto \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}\left(X_n = k\right) t^k$ sont deux fonctions polynomiales, donc par identification des coefficients, il vient :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n+1\}, \ \mathbb{P}\left(X_n = k\right) = \frac{1}{n+1}$$

On en déduit que X_n suit la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n+1\}$ et l'on a :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n+1} k \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} \times k = \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n+2}{2}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Avoir $n+2-k$ boules blanches après n tirages revient à avoir k boules noires dans l'urne. Or, boules blanches et noires jouent des rôles symétriques (il y en a une de chaque au départ, et le protocole est le même par la suite). On a donc bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $\mathbb{P}\left(X_n = k\right) = \mathbb{P}\left(X_n = n+2-k\right)$.

(b) Ici $n = 3$ et $X_3(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$. et avec la question précédente,

$$\mathbb{P}\left(X_3 = 4\right) = \mathbb{P}\left(X_3 = 1\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(X_3 = 2\right) = \mathbb{P}\left(X_3 = 3\right)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X_3 = 1\right) = \mathbb{P}\left(X_3 = 4\right) = \mathbb{P}\left(B_1 \cap B_2 \cap B_3\right) &= \mathbb{P}\left(B_1\right) \mathbb{P}\left(B_2 \mid B_1\right) \mathbb{P}\left(B_3 \mid B_1 \cap B_2\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

De plus, $\mathbb{P}\left(X_3 = 2\right) + \mathbb{P}\left(X_3 = 3\right) = 1 - \frac{1}{24} - \frac{1}{24}$, donc $\mathbb{P}\left(X_3 = 2\right) = \mathbb{P}\left(X_3 = 3\right) = \frac{11}{24}$.

(c) $\mathbb{P}\left(X_n = 1\right) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \ldots \cap \overline{B_n}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \ldots \times \frac{1}{n+1}$ (En effet, on ne prend que des boules noires, donc à chaque fois il n'y a qu'une boule noire dans l'urne). Donc $\mathbb{P}\left(X_n = 1\right) = \frac{1}{(n+1)!}$.

On a ensuite :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X_n = 2\right) = \mathbb{P}\left(B_1 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \ldots \cap \overline{B_n}\right) &+ \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap B_2 \cap \overline{B_3} \cap \ldots \cap \overline{B_n}\right) \\ &+ \ldots + \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \ldots \overline{B_{n-1}} \cap B_n\right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X_n = 2\right) = & \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \ldots \times \frac{2}{n+1} \\ & + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} \times \ldots \times \frac{2}{n+1} \\ & + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{5} \times \ldots \times \frac{2}{n+1} \\ & \vdots \\ & + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \ldots \times \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

(En effet, si l'on prend la boule blanche au k-ème tirage, il y a alors juste avant $k-1+1=k$ boules blanches dans l'urne et à partir du moment où l'on a pris la boule blanche, il y a 2 boules noires dans l'urne).

On trouve donc

$$\mathbb{P}\left(X_n=2\right)=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n}k2^{n-k}$$

On constate au passage que la formule est valable pour $n=3$.

(d) Pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$g_n(t)=\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}\left(X_n=k\right)t^k$$

Donc $\left(g_n\right)'(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k\mathbb{P}\left(X_n=k\right)t^{k-1}$. On a donc bien $\left(g_n\right)'(1)=\mathbb{E}\left(X_n\right)$.

(e) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\mathbb{R}$. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}\left(X_n=k\right)\left(t^k+t^{n+2-k}\right)=\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}\left(X_n=k\right)t^k+\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}\left(X_n=k\right)t^{n+2-k}$$

On change d'indice dans la seconde somme en posant $p=n+2-k$, avec $-(n+1)\leqslant -k\leqslant -1$, donc $1\leqslant p\leqslant n+1$. On obtient alors

$$\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}\left(X_n=k\right)\left(t^k+t^{n+2-k}\right)=\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}\left(X_n=k\right)t^k+\sum_{p=1}^{n+1}\mathbb{P}\left(X_n=n+2-p\right)t^p$$

Donc avec 2a, on conclut :

$$\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}\left(X_n=k\right)\left(t^k+t^{n+2-k}\right)=2g_n(t)$$

(f) On dérive cette dernière relation pour $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}\left(X_n\right)=\left(g_n\right)'(1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}\left(X_n=k\right)\left(k+(n+2-k)\right)=\frac{n+2}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}\left(X_n=k\right)$$

On obtient alors $\mathbb{E}\left(X_n\right)=\dfrac{n+2}{2}$.

Corrigé exercice 2 :

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = A.x$.
   f est donc l'application linéaire canoniquement associée à A (donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$).
2. (a) On a :
   $$\det(A) \ = \ \det(A^T) \ = \ \det(-A) \ = \ (-1)^3 \det(A) \ = \ -\det(A)$$
   Donc $\det(A) = 0$.

   (b) Soit $x, y \in \mathbb{R}^3$. On écrit :
   $$(f(x) \mid y) = (Ax \mid y) = (Ax)^T y = x^T A^T y = x^T(-A)y = -x^T(Ay) = -(x \mid f(y))$$
3. (a) Soit $x \in \mathrm{Vect}(a)$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $x = \lambda a$. Donc $f(x) = \lambda f(a)$. Or :
   $$f(a) \ = \ \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} -a_2a_3 + a_2a_3 \\ a_1a_3 - a_1a_3 \\ -a_1a_2 + a_1a_2 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   Donc $f(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$, et $x \in \ker(f)$.

   (b) Le vecteur a est non nul, donc au moins l'un des nombres a_1, a_2 ou a_3 est non nul. Or :
   — si $a_1 \neq 0$, les colonnes 2 et 3 sont libres, car $\begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont libres ;
   — si $a_3 \neq 0$, les colonnes 1 et 2 sont libres ;
   — si $a_2 \neq 0$, les colonnes 1 et 3 sont libres.
   Dans tous les cas, $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$.

   (c) D'après la question 3a, $\dim(\ker f) \geqslant 1$, et d'après la question 3b et le théorème du rang :
   $$\dim(\ker f) \ = \ 3 - \mathrm{rg}(A) \ \leqslant \ 1.$$
   Donc $\dim(\ker f) = 1$.
   On a donc $\begin{cases} \mathrm{Vect}(a) \subset \ker(f) \\ \dim(\mathrm{Vect}(a)) = \dim(\ker f) \end{cases}$, d'où $\boxed{\mathrm{Vect}(a) = \ker(f)}$.
4. $\dim(\ker f) = 1$ donc par théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}\ f) = 3 - 1 = 2$.
   On note C_1, C_2, C_3 les colonnes de A. On remarque que
   $$(a \mid C_1) \ = \ (a \mid C_2) \ = \ (a \mid C_3) \ = \ 0$$
   donc $C_1, C_2, C_3 \in (\ker f)^{\perp}$. Or, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3)$, donc $\mathrm{Im}(f) \subset (\ker f)^{\perp}$.
   Or, ces deux sev ont même dimension. En effet, comme $(\ker f)^{\perp}$ est un supplémentaire de $\ker(f)$, sa dimension est $3 - \dim(\ker f) = 3 - 1 = 2$.
   Donc $\boxed{\mathrm{Im}(f) = (\ker f)^{\perp}}$.
5. Par théorème, tout sev de dimension finie admet une base orthonormée (BON). Il suffit donc de poser (e_1) une BON de $\ker(f)$ et (e_2, e_3) une BON de $\mathrm{Im}(f)$ de sorte que les vecteurs de la famille $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ soient unitaires et orthogonaux deux à deux. Cette famille est donc une BON de $\mathbb{R}^3$, adaptée à $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, par construction.
   Pour l'obtenir en pratique, on peut poser $e_1 = \frac{a}{\|a\|}$ et obtenir (e_2, e_3) en orthonormalisant n'importe quelle base de $\mathrm{Im}(f)$.
6. Comme $\mathcal{E}$ est une BON, la décomposition de $f(e_2)$ dans cette base est :
   $$f(e_2) \ = \ (f(e_2) \mid e_1)\, e_1 \ + \ (f(e_2) \mid e_2)\, e_2 \ + \ (f(e_2) \mid e_3)\, e_3$$
   Or :
   - $(f(e_2) \mid e_1) = -(e_2 \mid \underbrace{f(e_1)}_{=0}) = 0$

- $(f(e_2) \mid e_2) = -(e_2 \mid f(e_2)) = -(f(e_2) \mid e_2)$, donc $(f(e_2) \mid e_2) = 0$.

   Donc si on pose $\lambda := (f(e_2) \mid e_3)$, on a $f(e_2) = \lambda e_3$, d'où $[f(e_2)]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}$.

   Enfin, $\lambda \neq 0$, car sinon $e_2 \in \ker(f)$, ce qui est faux (e_2 est $(\ker f)^{\perp}$, et $e_2 \neq 0$).

7. De même que pour $f(e_2)$, on a pour $f(e_3)$:

$$(f(e_3) \mid e_1) = (f(e_3) \mid e_3) = 0$$

   Donc : $f(e_3) = (f(e_3) \mid e_2)e_2 = -(e_3 \mid f(e_2))e_2 = -\lambda e_2$, c'est-à-dire $[f(e_3)]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda \\ 0 \end{bmatrix}$.

   Enfin, $f(e_1) = 0$, donc $[f(e_1)]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Finalement, $(f)_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$.

8. D'après la formule, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$:

$$f^2(x) = a \wedge (a \wedge x) = (a \mid x)a - \|a\|^2 x$$

   Donc pour $x = e_2$, qui est orthogonal à a, on a :

$$f^2(e_2) = -\|a\|^2 e_2$$

   Or, en mettant au carré la matrice obtenue à la question précédente, on obtient :

$$(f^2)_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

   ce qui donne : $f^2(e_2) = -\lambda^2 e_2$.

   D'où $-\|a\|^2 e_2 = -\lambda^2 e_2$, et comme $e_2 \neq 0$, $-\|a\|^2 e_2 = -\lambda^2 e_2$, et donc $|\lambda| = \|a\|$.

Corrigé exercice 3 :

Partie I : étude de f

1. Soit $x \in]0,1[$. $f(x)=0$ si et seulement si $1+\frac{1}{\ln(x)}=0$ (car $x \neq 0$) c'est-à-dire si $\ln(x)=-1$.

   Ainsi $f(x)=0$ ssi $\boxed{x=\frac{1}{e}}$.

2. Lorsque x tend vers 0^+ :

   $$\begin{aligned} \ln(x) \to -\infty \text{ donc } & \frac{1}{\ln(x)} \to 0 \\ \text{donc } & 1+\frac{1}{\ln(x)} \to 1 \\ \text{donc } & 1+\frac{1}{\ln(x)} \sim 1 \\ \text{donc par produit } & \boxed{f(x) \sim x}. \end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, $f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$, donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=0$.
   D'autre part, $f(x) \sim x$ signifie $f(x)=x+o(x)$. Cette égalité peut s'interpréter comme un $\mathrm{DL}_1(0)$, donc par théorème, f (prolongée) est dérivable en 0, et $f'(0)=1$. Sa tangente en 0 est la droite d'équation $y=x$.

4. La fonction f est dérivable sur $]0,1[$ par opérations. Pour tout $x \in]0,1[$:

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \left(1+\frac{1}{\ln(x)}\right)+x\left(\frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2(x)}\right) \\ &= 1+\frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{\ln^2 x} \\ &= 1+y-y^2. \end{aligned}$$

5. Soit $x \in]0,1[$. $f'(x)=0$ équivaut à $-y^2+y+1=0$ avec $y=\dfrac{1}{\ln x}<0$.

   Or, les racines de $-X^2+X+1$ sont $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}>0$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0$.

   Ainsi $f'(x)=0$ ssi $\dfrac{1}{\ln x}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, c'est-à-dire $\boxed{x=\underbrace{\exp\left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)}_{:=x_0}}$.

6. Soit $x \in]0,1[$. Déterminons le signe de $f'(x)$.

   Pour $y \in \mathbb{R}$, la quantité $-y^2+y+1$ est positive ssi y est compris entre les deux racines $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   On a donc les équivalences suivantes :

   $$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\ln x} \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\ln x} \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right[\quad \text{car} \quad \frac{1}{\ln x}<0 \\ &\Leftrightarrow \ln x \leqslant \frac{2}{1-\sqrt{5}} \\ &\Leftrightarrow x \leqslant x_0. \end{aligned}$$

   Avec égalité ssi $x=x_0$.
   On en déduit que f est strictement croissante sur $[0,x_0]$ (f' est strictement positive sur cet intervalle et ne s'annule qu'en un nombre fini de points) et strictement décroissante sur $[x_0,1[$.

De plus, lorsque $x \to 1$:
$\ln x \to 0^-$ donc $\dfrac{1}{\ln x} \to -\infty$ et $f(x) \to -\infty$ par opérations.
On a donc le tableau de variations suivant :

0		x_0		$\frac{1}{e}$		1
	$\nearrow$		$\searrow$			
0				0	$\searrow$	$-\infty$

7. Soit $x \in]0,1[$: $\dfrac{1}{\ln(x)} < 0$ donc $1 + \dfrac{1}{\ln(x)} < 1$ et donc $f(x) < x$.
De plus pour $x = 0$, on a $f(0) = 0$ donc l'inégalité est également vraie.

Ainsi pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) \leqslant x$.

Partie II : étude d'une suite récurrente

II.A - Résultat préliminaire

8. Soit $n \geqslant 2$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante et continue sur $[1,+\infty[$.
Ainsi pour $2 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

En sommant et par relation de Chasles on a :

$$\underbrace{\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}}_{\widehat{=} A_n} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \underbrace{\int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}}_{\widehat{=} B_n}$$

Et donc en rajoutant le terme en $k=1$:

$$A_n + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant B_n + 1$$

Or $A_n = \left[\dfrac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_2^{n+1} = \dfrac{(n+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

$(n+1)^{1-\alpha} \sim n^{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (car $1-\alpha > 0$) et $A_n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

De la même manière, $B_n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

Ainsi par théorème d'encadrement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.}$$

II.B - Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{H}(n)$: "u_n est bien défini, et appartient à $\left]0, \frac{1}{e}\right[$". Démontrons que les $\mathcal{H}(n)$ sont vraies par récurrence.

   ▶ **Initialisation** : $\mathcal{H}(0)$ signifie que u_0 est bien défini, et appartient à $\left]0, \frac{1}{e}\right[$, ce qui est vrai.

- ▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{H}(n)$. Montrons $\mathcal{H}(n+1)$.

  $u_n \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$ par hypothèse de récurrence, ainsi $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini (car $u_n \in [0,1[$).

  De plus d'après les variations de f, $u_{n+1} \in]0, f(x_0)]$.

  Par ailleurs $f(x_0) \leqslant x_0$ d'après la question 7 et $x_0 < \dfrac{1}{e}$.

  Ainsi $u_{n+1} \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$. $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.
- ▶ **Conclusion** : d'après le principe de récurrence, $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10. D'après la question 7, pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) \leqslant x$. A fortiori, cette inégalité est vraie pour tout $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$.
    Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$, donc $f(u_n) = u_{n+1} \leqslant u_n$.
    Ceci étant vrai pour tout n, la suite u est donc décroissante.
11. La suite u est décroissante et minorée (par 0), elle est donc convergente par théorème de convergence monotone. Notons $\ell \in \left[0, \frac{1}{e}\right]$ sa limite. La fonction f étant continue sur $\left[0, \frac{1}{e}\right]$, on a $\ell = f(\ell)$.
    Or on a montré à la question 7 que $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in [0,1[$, avec égalité ssi $x = 0$.
    Ainsi
    $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}.$$

II.C - Convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$

12. Lorsque $n \to +\infty$:
    $$\begin{aligned}\ln^2(u_{n+1}) - \ln^2(u_n) &= \ln^2\left(u_n\left(1 + \frac{1}{\ln(u_n)}\right)\right) - \ln^2(u_n)\\ &= \left(\ln(u_n) + \ln\left(1 + \frac{1}{\ln(u_n)}\right)\right)^2 - \ln^2(u_n)\\ &= \ln^2(u_n) + 2\ln(u_n)\ln\left(1 + \frac{1}{\ln(u_n)}\right) + \ln^2\left(1 + \frac{1}{\ln(u_n)}\right) - \ln^2(u_n)\\ &= 2\ln(u_n)\ln\left(1 + \frac{1}{\ln(u_n)}\right) + \ln^2\left(1 + \frac{1}{\ln(u_n)}\right)\end{aligned}$$
    On a $u_n \to 0$, donc $\ln(u_n) \to -\infty$ et $\dfrac{1}{\ln(u_n)} \to 0$.
    Ainsi : $\ln\left(1 + \frac{1}{\ln(u_n)}\right) \sim \frac{1}{\ln(u_n)} \to 0$.
    On en déduit que $2\ln(u_n)\ln\left(1 + \frac{1}{\ln(u_n)}\right) \sim \dfrac{2\ln(u_n)}{\ln(u_n)} = 2$ et $\ln^2\left(1 + \frac{1}{\ln(u_n)}\right) \sim \dfrac{1}{\ln^2(u_n)} \to 0$.
    Finalement :
    $$\ln^2(u_{n+1}) - \ln^2(u_n) \to 2$$
13. Lorsque $n \to \infty$:
    $\ln^2(u_{n+1}) - \ln^2(u_n) \sim 2$, donc en utilisant le résultat de l'encadré admis on a :
    $$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\ln^2(u_{k+1}) - \ln^2(u_k)\right) \sim \sum_{k=0}^{n-1} 2 = 2n.$$
    Or par télescopage, on a :
    $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\ln^2(u_{k+1}) - \ln^2(u_k)\right) = \ln^2(u_n) - \ln^2(u_0) \sim \ln^2(u_n)$ (car $\ln^2(u_n) \to +\infty$). Ainsi :
    $$\boxed{\ln^2(u_n) \sim 2n.}$$
14. Pour $n \to +\infty$:
    $$\ln(n^2 u_n) = 2\ln(n) + \ln(u_n).$$

Or $\ln^2(u_n) \sim 2n$ et $\ln(u_n) < 0$ (car $u_n \in \left[0, \frac{1}{e}\right]$), donc $\ln(u_n) \sim -\sqrt{2n}$.
Ainsi $\ln(n^2 u_n) = 2\ln(n) - \sqrt{2}\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) = -\sqrt{2}\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$ (car $\ln(n) = o(\sqrt{n})$).
Finalement $\ln(n^2 u_n) \sim -\sqrt{2}\sqrt{n} \longrightarrow -\infty$ et donc $n^2 u_n \longrightarrow 0$ en composant par l'exponentielle.

Ainsi $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge par critère de Riemann, donc par comparaison asymptotique de séries à termes positifs : la série $\sum u_n$ converge.

II.D - Recherche d'un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
Dans le reste du problème, on pose, si $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \ln^2(u_n) - 2n$.

15. Pour $x \to 0$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Pour $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \ln^2(u_{n+1}) - 2(n+1) - \ln^2(u_n) + 2n \\ &= 2\ln(u_n)\ln\left(1 + \frac{1}{\ln(u_n)}\right) + \ln^2\left(1 + \frac{1}{\ln(u_n)}\right) - 2 \end{aligned}$$

En appliquant le développement limité précédent à la quantité $X = \dfrac{1}{\ln(u_n)}$ qui vérifie $\dfrac{1}{\ln(u_n)} \to 0$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 2\ln(u_n)\left(\frac{1}{\ln(u_n)} - \frac{1}{2\ln^2(u_n)} + o\left(\frac{1}{\ln^2(u_n)}\right)\right) \\ &\qquad + \left(\frac{1}{\ln(u_n)} - \frac{1}{2\ln^2(u_n)} + o\left(\frac{1}{\ln^2(u_n)}\right)\right)^2 - 2 \\ &= 2 - \frac{1}{\ln(u_n)} + o\left(\frac{1}{\ln(u_n)}\right) + o\left(\frac{1}{\ln(u_n)}\right) - 2 \\ &= -\frac{1}{\ln(u_n)} + o\left(\frac{1}{\ln(u_n)}\right). \end{aligned}$$

Donc $v_{n+1} - v_n \sim -\dfrac{1}{\ln(u_n)}$, or $\ln(u_n) \sim -\sqrt{2n}$ donc

$$\boxed{v_{n+1} - v_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}}.$$

16. En utilisant le résultat de l'encadré admis, on a lorsque $n \to +\infty$:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) \sim \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2k}}.$$

Or par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1$.

De plus d'après la question 8, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2k}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{n-1}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2(n-1)} \sim \sqrt{2n}$.

Ainsi, $v_n - v_1 = \sqrt{2n} + o(\sqrt{n})$ et donc $\ln^2(u_n) - 2n = v_1 + \sqrt{2n} + o(\sqrt{n}) = \sqrt{2n} + o(\sqrt{n})$.
On a donc $\ln^2(u_n) = 2n + \sqrt{2n} + o(\sqrt{n})$, par ailleurs $\ln(u_n) < 0$, donc :

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= -\sqrt{2n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^{1/2} \\ &= -\sqrt{2n}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \qquad \left(\text{avec } (1+X)^{1/2} \underset{X\to 0}{=} 1 + \frac{X}{2} + o(X)\right) \\ &= -\sqrt{2n} - \frac{1}{2} + o(1). \end{aligned}$$

17. Lorsque $n \to +\infty$:

$$u_n = \exp(-\sqrt{2n}) \underbrace{\exp\left(-\frac{1}{2} + o(1)\right)}_{\sim \frac{1}{\sqrt{e}}} \sim \frac{\exp(-\sqrt{2n})}{\sqrt{e}}.$$

18. $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$ signifie que $v_n \underset{+\infty}{=} w_n(1 + o(1))$, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_n = w_n.\alpha_n \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

D'après la définition de la limite, il existe un rang $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant p$:

$$1 - \varepsilon \leqslant \alpha_k \leqslant 1 + \varepsilon$$

d'où (en multipliant par $w_k \geqslant 0$) :

$$(1 - \varepsilon)w_k \leqslant v_k \leqslant (1 + \varepsilon)w_k \qquad\qquad (*)$$

19. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$$

Tout revient à montrer que $\frac{V_n}{W_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ce quotient $\frac{V_n}{W_n}$ a bien du sens à partir d'un certain rang puisque $V_n \to +\infty$ (par hypothèse), et comme $w_n \sim v_n$, on a aussi $W_n \to +\infty$ par théorème de comparaison sur les séries à termes positifs.

Pour tout $n \geqslant p$, on obtient, en sommant l'encadrement $(*)$ sur $k \in [\![p, n]\!]$:

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=p}^{n} w_k \leqslant \sum_{k=p}^{n} v_k \leqslant (1 + \varepsilon) \sum_{k=p}^{n} w_k$$

Les sommes ci-dessus sont V_n et W_n à une constante près, car :

$$\sum_{k=p}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} v_k - \sum_{k=0}^{p-1} v_k = V_n - V_{p-1} \quad \text{et de même} \quad \sum_{k=p}^{n} w_k = W_n - W_{p-1}$$

D'où :

$$(1 - \varepsilon)(W_n - W_{p-1}) \leqslant V_n - V_{p-1} \leqslant (1 + \varepsilon)(W_n - W_{p-1})$$

et en divisant par W_n (prenons n suffisamment grand pour que W_n soit strictement positif) :

$$(1 - \varepsilon)\left(1 - \frac{W_{p-1}}{W_n}\right) \leqslant \frac{V_n}{W_n} - \frac{V_{p-1}}{W_n} \leqslant (1 + \varepsilon)\left(1 - \frac{W_{p-1}}{W_n}\right)$$

d'où l'encadrement suivant de $\frac{V_n}{W_n}$:

$$\underbrace{(1 - \varepsilon)\left(1 - \frac{W_{p-1}}{W_n}\right) + \frac{V_{p-1}}{W_n}}_{a_n} \leqslant \frac{V_n}{W_n} \leqslant \underbrace{(1 + \varepsilon)\left(1 - \frac{W_{p-1}}{W_n}\right) + \frac{V_{p-1}}{W_n}}_{b_n}$$

Comme $W_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a :

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \varepsilon \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + \varepsilon$$

Donc :

- à partir d'un certain rang n_1, on a

$$(1-\varepsilon)-\varepsilon \leqslant a_n \leqslant (1-\varepsilon)+\varepsilon \qquad \text{et donc en particulier} \qquad 1-2\varepsilon \leqslant a_n$$

- à partir d'un certain rang n_2, on a

$$(1+\varepsilon)-\varepsilon \leqslant b_n \leqslant (1+\varepsilon)+\varepsilon \qquad \text{et donc en particulier} \qquad b_n \leqslant 1+2\varepsilon$$

et donc à partir du rang $n_0 := \max(n_1, n_2)$, on a par transitivité :

$$1-2\varepsilon \leqslant \frac{V_n}{W_n} \leqslant 1+2\varepsilon$$

Ce raisonnement étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien démontré que $\frac{V_n}{W_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Corrigé exercice 4 :

1. On remarque que $\forall (P,Q)\in E^2$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est bien définie car P et Q (fonctions polynomiales) sont continues sur $[-1,1]$. φ est donc une fonction bien définie de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$.
   Montrons que φ est un produit scalaire. Soient $P,Q,R\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
   — $\varphi(P+\lambda Q,R) = \displaystyle\int_{-1}^{1}(P+\lambda Q)(t)R(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}P(t)R(t)\,\mathrm{d}t + \lambda\int_{-1}^{1}Q(t)R(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(P,R)+\lambda\varphi(Q,R)$. **linéaire**
   — $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}Q(t)P(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(Q,P)$. **symétrique**
   — $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_{-1}^{1}P^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale et par théorème, $\varphi(P,P)=0$ si et seulement si la fonction P^2 est nulle sur $[-1,1]$, c-à-d $P(t)=0\ \forall t\in[-1,1]$. Or un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul. Donc $\varphi(P,P)=0 \Leftrightarrow P=0$. **définie positive**
2. On remarque tout d'abord que $\deg\big((X^2-1)P'\big)\leqslant n+1$ et que donc $\deg\big(((X^2-1)P')'\big)\leqslant n$. Par conséquent f est bien une application de E dans E.
   Montrons maintenant que f est linéaire : soient $P,Q\in E$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(\lambda P+\mu Q) &= \big((X^2-1)(\lambda P+\mu Q)'\big)'\\
&= \big((X^2-1)(\lambda P'+\mu Q')\big)'\\
&= \lambda\big((X^2-1)P'\big)' + \mu\big((X^2-1)Q'\big)'\\
&= \lambda f(P)+\mu f(Q).
\end{aligned}$$

   Donc f est bien un endomorphisme de E.

   Montrons maintenant qu'il est symétrique. Soit $P,Q\in E$. On va faire des intégrations par parties (les fonctions polynomiales étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^1$ cela est possible).
   On pose $\begin{cases} u(t)=Q(t) & ;\quad u'(t)=Q'(t)\\ v'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big((t^2-1)P'(t)\big) & ;\quad v(t)=(t^2-1)P'(t)\end{cases}$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\langle f(P),Q\rangle &= \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big((t^2-1)P'(t)\big)\,Q(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \big[(t^2-1)P'(t)Q(t)\big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t\\
&= -\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

   De façon symétrique (IPP avec $u(t)=P(t)$ et $v'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big((t^2-1)Q'(t)\big)$), on obtient :

$$\langle P,f(Q)\rangle \;=\; -\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Donc $\langle f(P),Q\rangle = \langle P,f(Q)\rangle\ \forall (P,Q)\in E^2$, donc f est un endomorphisme symétrique.
3. Pour tout $P\in E$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
f(P)=0 &\iff \big((X^2-1)P'\big)'=0\\
&\iff (X^2-1)P'\in\mathbb{R}_0[X].
\end{aligned}$$

   Or cette dernière phrase est vraie si et seulement si $P'=0$ (c-à-d P constant) car sans cela le degré de $(X^2-1)P'$ est $\geqslant 2$.
   Donc $\boxed{\ker(f)=\mathbb{R}_0[X]}$.
   Grâce au théorème du rang on en déduit que $\mathrm{rg}(f)=n+1-1=n$.

4. Montrons $\mathrm{Im}(f) \subset (\ker f)^{\perp}$.
Fixons $P \in \mathrm{Im}(f)$. Par définition, il existe $R \in E$ tel que $P = f(R)$. Pour tout $Q \in \ker(f)$, on a alors par symétrie :

$$\langle P, Q\rangle \;=\; \langle f(R), Q\rangle \;=\; \langle R, f(Q)\rangle \;=\; \langle R, 0_E\rangle \;=\; 0.$$

Cela montre que $P \in (\ker f)^{\perp}$.
On a donc $\mathrm{Im}(f) \subset (\ker f)^{\perp}$. Par ailleurs, on sait par la question précédente que $\dim(\mathrm{Im}\, f) = n$. D'autre part, $(\ker f)^{\perp}$ est un supplémentaire de $\ker(f)$ donc sa dimension est $\dim(E) - \dim(\ker f) = n$.
On a donc $\mathrm{Im}(f) \subset (\ker f)^{\perp}$ et $\dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim((\ker f)^{\perp})$ donc par théorème, ces deux sev sont égaux.

5. (a) On calcule $f(X) = 2X$ et $f(X^2) = 6X^2 - 2$. Il s'agit, par construction, de deux vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$. Ils sont libres, et $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2, donc c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
D'autre part, $\big\langle 2X, 6X^2 - 2\big\rangle = 4\big\langle X, 3X^2 - 1\big\rangle = 4\int_{-1}^{1}(3x^3 - x)\mathrm{d}x = 0$ (intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0). Ces deux vecteurs sont donc orthogonaux.
On sait par ailleurs que (1) est une base de $\ker(f)$, donc finalement, la famille $(1, X, 3X^2 - 1)$ est une base orthogonale adaptée à la somme $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

(b) On note p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$ et $q = \mathrm{Id} - p$ le projecteur orthogonal sur $\ker(f)$. Il s'agit de déterminer $p(P_0)$.

Note du professeur : plusieurs méthodes sont possibles. Par exemple utiliser la BO de $\mathrm{Im}(f)$ *:*

$$p(P_0) = \frac{\langle P_0, X\rangle}{\langle X, X\rangle}X + \frac{\big\langle P_0, 3X^2 - 1\big\rangle}{\langle 3X^2 - 1, 3X^2 - 1\rangle}(3X^2 - 1)$$

ou encore (mieux), celle de $\ker(f)$ *:*

$$p(P_0) = P_0 - q(P_0) = P_0 - \frac{\langle P_0, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1$$

mais la plus efficace dans notre exemple semble être la suivante.

On a par linéarité : $p(P_0) = p(1) + p(X)$. Or, $1 \in \ker(f) = (\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$ donc $p(1) = 0$. D'autre part, on sait que $X \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $p(X) = X$. Finalement, $\boxed{p(P_0) = X}$.

(c) On remarque que $\inf_{P \in \mathbb{R}_2[X]} \|P_0 - f(P)\| = \mathrm{d}(P_0, \mathrm{Im}(f))$ et on sait que la distance à un sous-espace F est

$$\mathrm{d}(P_0, F) = \|p_{F^{\perp}}(P_0)\| = \|P_0 - p_F(P_0)\|.$$

Dans notre cas on obtient $\|P_0 - X\| = \|1\| = \left(\int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \sqrt{2}$.

(d) $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) \in \mathrm{Im}(f)$. Or on sait qu'il existe un unique vecteur $Q \in \mathrm{Im}(f)$ qui réalise $\|P_0 - Q\| = m$ et ce vecteur est la projection orthogonale de P_0 sur $\mathrm{Im}(f)$, c-à-d $Q = X$.
L'équation à résoudre est donc équivalente à $f(P) = X$.
Il s'agit d'une équation linéaire. Une solution particulière est $P_{\mathrm{sol}} = \frac{X}{2}$ car $f(X) = 2X$, donc $f(\frac{X}{2}) = X$. D'autre part, le noyau de f est $\mathbb{R}_0[X]$.

Finalement, les polynômes solutions sont les polynômes du type $\boxed{P = \dfrac{X}{2} + \lambda}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. (a) Par le calcul on obtient :

$$L_1 = 2X \quad ; \quad L_2 = 12X^2 - 4 \quad ; \quad L_3 = 120X^3 - 72X.$$

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le degré de $(X^2 - 1)^k$ est $2k$, ainsi le degré de la dérivée k-ème de ceci est $2k - k = k$.

(c) ▶ Pour A_k.
Les dérivées i-ièmes de X^2-1 sont X^2-1 pour $i=0$, puis $2X$ pour $i=1$, puis 2 pour $i=2$, puis 0 pour $i \geqslant 3$. Donc :

$$\begin{aligned}
A_k &= \sum_{i=0}^{k+2} \binom{k+2}{i} \left((X^2-1)\right)^{(i)} \left((X^2-1)^k\right)^{(k+2-i)} \\
&= \sum_{i=0}^{2} \binom{k+2}{i} \left((X^2-1)\right)^{(i)} \left((X^2-1)^k\right)^{(k+2-i)} \\
&= (X^2-1)\left((X^2-1)^k\right)^{(k+2)} + (k+2)2X\left((X^2-1)^k\right)^{(k+1)} \\
&\qquad + \frac{(k+2)(k+1)}{2} \times 2\left((X^2-1)^k\right)^{(k)} \\
&= \boxed{(X^2-1)L_k'' + (k+2)2XL_k' + (k+2)(k+1)L_k}
\end{aligned}$$

▶ Pour B_k.
Les dérivées i-ièmes de X sont X pour $i=0$, puis 1 pour $i=1$, puis 0 pour $i \geqslant 2$. Donc :

$$\begin{aligned}
B_k &= \sum_{i=0}^{1} \binom{k+1}{i} X^{(i)} \left((X^2-1)^k\right)^{(k+1-i)} \\
&= X \times \left((X^2-1)^k\right)^{(k+1)} + (k+1)\left((X^2-1)^k\right)^{(k)} \\
&= \boxed{XL_k' + (k+1)L_k}.
\end{aligned}$$

(d) On a :

$$\begin{aligned}
A_k &= ((X^2-1)^{k+1})^{(k+2)} \\
&= \left(\left((X^2-1)^{k+1}\right)'\right)^{(k+1)} \\
&= \left((k+1)(X^2-1)^k \times 2X\right)^{(k+1)} \\
&= 2(k+1)\ \left((X^2-1)^k \times X\right)^{(k+1)} \\
&= 2(k+1)B_k.
\end{aligned}$$

(e) On combinant les deux questions, on obtient

$$(X^2-1)L_k'' + (k+2)2XL_k' + (k+2)(k+1)L_k = 2(k+1)\left(XL_k' + (k+1)L_k\right)$$

ce qui donne, après regroupement des termes en L_k, L_k' et L_k'' :

$$(X^2-1)L_k'' + 2XL_k' - k(k+1)L_k = 0.$$

(f) Soit $k \in \mathbb{N}$. On calcule

$$f(L_k) \ = \ \left((X^2-1)L_k'\right)' \ = \ (X^2-1)L_k'' + 2XL_k$$

et cette dernière quantité vaut $k(k+1)L_k$ d'après la question précédente.
On a donc $f(L_k) = \lambda_k L_k$ pour $\lambda_k = k(k+1)$.

(g) Montrons que les L_k sont orthogonaux. Soit $i \neq j$ deux entiers de $[\![0,n]\!]$. On a d'une part

$$\langle f(L_i), L_j\rangle \ = \ \langle \lambda_i L_i, L_j\rangle \ = \ \lambda_i \langle L_i, L_j\rangle$$

et d'autre part par symétrie

$$\langle f(L_i), L_j\rangle \ = \ \langle L_i, f(L_j)\rangle \ = \ \lambda_j \langle L_i, L_j\rangle.$$

D'où $\lambda_i \langle L_i, L_j \rangle = \lambda_j \langle L_i, L_j \rangle$ c-à-d $\langle L_i, L_j \rangle (\lambda_i - \lambda_j) = 0$.
Or, $\lambda_i \neq \lambda_j$ (les λ_k sont strictement croissants, donc tous distincts), donc $\boxed{\langle L_i, L_j \rangle = 0}$.

La famille $\mathcal{L} = (L_0, \ldots, L_n)$ est donc une famille orthogonale de vecteurs tous non nuls. C'est par conséquent une famille libre. Elle comporte de plus $n+1$ vecteurs, et $n+1$ est la dimension de E, ce qui nous permet de conclure que c'est une base orthogonale de E.

Enfin, comme $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $f(L_k) = \lambda_k L_k$, on a $(f)_{\mathcal{L},\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.
