# Problèmes de révisions

**Exercice 1.**
Dans cet exercice, on cherche à montrer que la distance d'un point à un sous-espace vectoriel n'est pas forcément atteinte. Autrement dit, étant donnés un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ et $g \in E$, il n'existe pas $f_0 \in F$ tel que $d(g, F) = ||g - f_0||$.

Pour trouver ce contre-exemple, on se place dans l'espace $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$ et on considère le sous-espace $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$. On se donne $g \in E \backslash F$ et on suppose par l'absurde qu'il existe $f_0 \in F$ tel que $d(g, F) = ||g - f_0||$.

1. Montrer que si $g - f_0 \in F^\perp$, alors on a une contradiction.

2. Supposons par l'absurde que $g - f_0$ n'appartient pas à $F^\perp$ afin d'obtenir également une contradiction. Il existe donc $h_0 \in F$ tel que $< g - f_0, h_0 > \neq 0$. On peut le supposer strictement positif sans nuire à la généralité.

   (a) Montrer qu'on peut choisir $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $||g - (\alpha h_0 + f_0)||^2 < ||g - f_0||^2$.

   (b) Conclure.

**Exercice 2.**
Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$$

On a déjà montré que pour tout entier $p$, $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}.\dfrac{\pi}{2}$ puis $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ .

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ et la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définie pour $n \geqslant 2$ par $v_n = \ln u_n - \ln u_{n-1}$.

1. Exprimer simplement $v_n$ en fonction de $n$.

2. Donner un développement limité à l'ordre 2 de $v_n$.

3. Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} v_k$ est convergente.

4. Montrer alors que les suites $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et donc qu'il existe un réel $K > 0$ tel que
$$n! \sim K \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

5. En utilisant cet équivalent, donner un équivalent simple de la suite $(W_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$. En déduire que $K = \sqrt{2\pi}$ et, par suite, que
$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \text{ ( formule de Stirling)}$$

**Exercice 3.**

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. L'objectif du problème est d'étudier les endomorphismes $u$ de $E$ tels que :

$$\langle u(x), x\rangle = 0 \quad \text{pour tout } x \text{ dans } E \qquad (\star)$$

Les éléments $u$ de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifient $(\star)$ sont appelés ***endomorphisme antisymétrique***.

**Partie 1**: *Etude d'un exemple*

Dans cette partie $E = \mathbb{R}_2[X]$ espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à 2. On considère l'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=-1}^{1} P(k)Q(k)$$

1. Vérifier que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$. *Dans la suite on considérera que $E$ est muni de ce produit scalaire que l'on notera $\langle\ ,\ \rangle$.*
2. Soit $u$ l'endomorphisme de $E$ défini par :

$$u(P) = 2P'(0)X^2 - (P(1) + P(-1))X$$

   (a) Vérifier que pour tout $P$ dans $E$ on a $2P'(0) - P(1) + P(-1) = 0$.

   (b) En déduire que $u$ est un endomorphisme antisymétrique de l'espace euclidien $E$.

3. Soient $P_1 = \dfrac{1}{2}(X^2 + X)$ et $P_2 = \dfrac{1}{2}u(P_1)$.

   (a) Déterminer $u^2(P_1)$ et montrer que $(P_1, P_2)$ est une famille orthonormale.

   (b) Déterminer une base de $\ker u$.

   (c) Trouver une base orthonormale $\beta$ de $E$ et $a$ réel tels que : $Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Partie 2**: *Caractérisations des endomorphismes antisymétriques*

Soit $u$ dans $\mathcal{L}(E)$.

4. Pour tout $(x, y)$ dans $E^2$ calculer $\langle u(x+y), x+y\rangle$. En déduire que $u$ est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si :

$$\left(\forall (x, y) \in E^2\right) \left(\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle\right)$$

5. Soient $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $E$ et $M = [m_{ij}]$ la matrice de $u$ dans $\beta$. Démontrer que $u$ est un endomorphisme antisymétrique de $E$ si et seulement si $M$ est une matrice antisymétrique i.e. vérifie $\mathrm{Tr}M = -M$.

**Partie 3**: *Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques*

Soit $u$ un endomorphisme antisymétrique de $E$.

6. Démontrer que si $\lambda$ est telle que $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$, alors $\lambda = 0$

7. Démontrer que $E = \mathrm{Im} u \oplus^{\perp} \ker u$. En déduire que $\ker u = \ker u^2$.

8. Démontrer que pour tout $(x, y)$ dans $E^2$ on a :

$$\langle u^2(x), y \rangle = \langle x, u^2(y) \rangle$$

puis que si $\lambda$ vérifie $\ker(u^2 - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$, alors $\lambda$ est négatif.

*Dans la suite de cette partie, on suppose $n \geqslant 2$ et on* ***admet*** *qu'il existe $\lambda$ non nul tel que* $\ker(u^2 - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}$ *et on note $x_0$ un élément non nul de* $\ker(u^2 - \lambda Id_E)$. *On note encore $F = Vect(x_0, u(x_0))$.*

9. (a) Montrer que $F$ est stable par $u$.
   (b) Démontrer que $F^{\perp}$ est stable par $u$.
   (c) On munit $F^{\perp}$ du produit scalaire induit par celui de $E$. On définit $u_1 \in \mathcal{L}(F^{\perp})$ par

$$u_1(x) = u(x) \quad \text{pour } x \text{ dans } F^{\perp}$$

Autrement dit $u_1 = u\,|_{F^{\perp}}^{F^{\perp}}$ (double restriction au but et à la source de $u$).
Démontrer que $u_1$ est un endomorphisme antisymétrique de $F^{\perp}$ puis que $\mathrm{Im} u = F \oplus \mathrm{Im}(u_1)$.

10. Démontrer que le rang d'un endomorphisme antisymétrique est pair.
**Indication :** *on pourra faire une récurrence sur la dimension de $E$.*

**Partie 4**: *Une application*

Dans cette partie $E$ est un espace vectoriel euclidien de dimension 4.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthonormale de $E$. On considère l'endomorphisme $u$ de $E$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Démontrer que $u$ est un endomorphisme antisymétrique de $E$ et vérifier que le vecteur $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ est appartient à un noyau de la forme $\ker(u^2 - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

12. Soit $F = \mathrm{Vect}(f_1, u(f_1))$. Déterminer une base orthonormale de $F$ ainsi qu'une base orthonormale de $F^{\perp}$.

13. En déduire une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ de $E$ et deux nombres réels $a$ et $b$ tels que la matrice de $u$ dans $\mathcal{B}_0$ soit :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 4.**

Soit $n$ un entier naturel non nul. On considère une matrice $A$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^\top = 3\,A^2 - A - I_n$ où $A^\top$ désigne la transposée de la matrice $A$.

1. Démontrer que la matrice $B = 3\,A^3 - A^2 - A$ est symétrique réelle.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Ker}(B - \lambda I_n) \neq \{(0)\}$. Montrer $\lambda \geqslant 0$.

   *On pourra étudier le signe de $Y^\top B Y$ pour un vecteur $Y$ de $\mathbb{R}^n$.*
3. Montrer que l'on a : $A = 3\left(A^\top\right)^2 - A^\top - I_n$.
4. En déduire que le polynôme $P(X) = (3\,X^2 - X - 1)^2 - X^2$ est annulateur de la matrice $A$.
5. Déterminer un polynôme unitaire annulateur de $A^\top$.
6. Factoriser $P$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $V$ un vecteur non nul tel que $AV = \lambda V$. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ que l'on précisera tel que $A^\top V = \mu V$.
8. On note $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les racines du polynôme $P$.

   On appelle $\mathcal{L} = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ la famille des polynômes de Lagrange associée à cette famille de scalaires, c'est-à-dire les polynômes $(L_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ de $\mathbb{R}_3[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels, tels que :

   $$\forall\,(i,j) \in [\![1,4]\!]^2,\quad L_i(\alpha_j) = \delta_{ij} \text{ où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{(symbole de Kronecker).}$$

   (a) Déterminer $L_1$ sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

   (b) Vérifier que $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

   (c) Soit $R \in \mathbb{R}_3[X]$, . Déterminer les coordonnées du polynôme $R$ dans la base $\mathcal{L}$.
9. **Étude des puissances de** $A$

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

   i. Exprimer le reste de la division euclidienne de $X^k$ par le polynôme $P$ dans la base $\mathcal{L}$.

   ii. En déduire une expression de $A^k$.

   (b) Démontrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice de projection.

   Exprimer cette matrice à l'aide de la matrice $A$ et des $(L_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$.

**Exercice 5.**

On note $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On rappelle que pour tout $(x,t) \in [0,1]^2$, on note $\min(x,t) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant t \\ t & \text{sinon} \end{cases}$.

**Questions préliminaires**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$, suivant les valeurs de $\alpha$, l'équation différentielle $y'' + \alpha y = 0$.
2. Soient $h \in E$ et $a \in [0,1]$. Justifier que la fonction $H : x \mapsto \int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et déterminer sa dérivée.

*****

3. **Cas particuliers**
   (a) Tracer la courbe représentative de la fonction $t \mapsto \min\left(\frac{1}{3}, t\right)$ sur l'intervalle $[0,1]$.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right)\,\mathrm{d}t$.
   (c) Soit $x$ un réel de $[0,1]$, exprimer $\displaystyle\int_0^1 \min(x,t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de $x$.
4. Soit $f \in E$.
   (a) Justifier que $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$, calculer $F'(x)$.
   (b) Calculer $F(0)$ et $F'(1)$.
   (c) Démontrer alors que $F$ est de classe $C^2$ sur $[0,1]$ et montrer que $F'' = -f$.

À toute fonction $f$ de $E$, on associe $T(f)$ définie par :

$$\forall\, x \in [0,1], \quad T(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t)\, f(t)\,\mathrm{d}t.$$

5. Montrer que $T$ est un endomorphisme de $E$.
6. L'application $T$ est-elle injective ?
7. On pose $A = \{G \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}), G(0) = G'(1) = 0\}$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(T) \subset A$.
   (b) Soit $G \in A$. Calculer $T(G'')$.
   (c) Déterminer $\mathrm{Im}(T)$.
8. **Recherche des éléments propres de** $T$ On appelle valeur propre de $T$ un réel $\lambda$ tel que $\mathrm{Ker}(T - \lambda id_E) \neq \{(0)\}$.
   (a) Démontrer par l'absurde que, si $\lambda$ est une valeur propre de $T$, alors $\lambda$ est strictement positive. *On pourra utiliser la question 4.*
   (b) Déterminer les valeurs propres de $T$. *On pourra aussi utiliser la question 4.*
   (c) Pour chaque valeur propre $\lambda$ de $T$, déterminer la dimension et une base de $\mathrm{Ker}(T - \lambda id_E)$.

**Exercice 6.**

*On appelle valeur propre d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ un réel $\lambda$ tel que $\ker(A - \lambda I_n) \neq \{(0)\}$ et sous espace propre associé à $\lambda$ ce noyau. On appelle spectre de $A$ l'ensemble des valeurs propres de $A$.*
Soit $n$ un entier naturel non nul.

**Questions de cours**

1. Soit $p$ une projection vectorielle de rang $r \in \mathbb{N}$.

   (a) Donner, en fonction de $r$, une matrice $W$ de $p$ dans une base adaptée.
   (b) Donner les spectres possibles de $W$.
   (c) Comparer $\mathbf{rg}(W)$ et $\mathbf{tr}(W)$.
   (d) Calculer $\mathbf{det}(W)$.

*****

On considère la famille $X_1, ..., X_n$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ toutes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0,1[$.

Soit $M$ une variable aléatoire discrète de $\Omega$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\omega$ dans $\Omega$, $M(\omega)$ est semblable à $\Delta(\omega) = \mathrm{diag}(X_1(\omega), ..., X_n(\omega))$.

2. On note $T$ la variable aléatoire $\mathbf{tr}(M)$.

   (a) Déterminer $T(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire $T$.
   (b) Donner la loi de probabilité de $T$ et l'espérance de la variable aléatoire $T$.

3. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire $R = \mathbf{rg}(M)$.

4. On note $D$ la variable aléatoire $\mathbf{det}(M)$.

   (a) Déterminer $D(\Omega)$.
   (b) Donner la loi de probabilité de $D$ et calculer l'espérance de la variable aléatoire $D$.

5. On se propose de déterminer la probabilité de l'évènement $Z$:

   " tous les espaces propres de $M$ ont même dimension ".

   (a) On note $V$ l'évènement : " $M$ ne possède qu'une seule valeur propre ". Calculer $P(V)$.
   (b) On suppose $n$ impair. Déterminer $P(Z)$.
   (c) On suppose $n$ pair et on pose $n = 2r$. Calculer $P(T = r)$. En déduire $P(Z)$.

6. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A(\omega) = U(\omega) \times (U(\omega))^\top = (a_{ij}(\omega))_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$.

   (a) Soit $\omega \in \Omega$. Déterminer, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{ij}(\omega)$.
   (b) Donner la loi de probabilité de chaque variable aléatoire $a_{ij}$.
   (c) Montrer que $\mathbf{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
   (d) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire $\mathbf{rg}(A)$.
   (e) Pour tout $\omega$ dans $\Omega$, donner les valeurs propres de la matrice $A(\omega)$.
   (f) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathbf{rg}(A)$.

# Correction des problèmes de révisions

***Exercice 1*** 1. On a montré que $F^\perp = \{0\}$ donc si $g - f_0 \in F^\perp$, on a $g = f_0$ ce qui implique $g \in F$ et c'est une contradiction avec notre hypothèse de départ.

2. (a) On a

$$||g-(\alpha h_0+f_0)||^2 = ||g-f_0||^2 - 2 < g-f_0, \alpha h_0 > + ||\alpha h_0||^2 = ||g-f_0||^2 - 2\alpha < g-f_0, h_0 > + \alpha^2 ||h_0||^2$$

Il faut donc montrer qu'on peut trouver $\alpha$ tel que $-2\alpha < g - f_0, h_0 > + ||\alpha h_0||^2 < 0$. Si $\alpha > 0$, il suffit de choisir $\alpha$ tel que $\alpha ||h_0||^2 < 2 < g, f_0 >$ ce qui est possible car, par hypothèse, $2 < g, f_0 >> 0$.

(b) En choisissant un réel $\alpha$ comme à la question précédente, on a un élément $\alpha h_0 + f_0 \in F$ qui vérifie $||g - (\alpha h_0 + f_0) < d(g, F)$ ce qui est une contradiction donc $g - f_0 \in F$.
Or, d'après la première question, cela n'est pas possible donc $f_0$ n'existe pas.

***Exercice 2*** On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}$ et la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ définie pour $n \geqslant 2$ par $v_n = \ln u_n - \ln u_{n-1}$.

1. Exprimer simplement $v_n$ en fonction de $n$.
On a

$$v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) = \ln\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} e\sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) = (n-1)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 + \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

ou encore $v_n = (n - \frac{1}{2}) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1$.

2. Donner un développement limité à l'ordre 2 de $v_n$.
Pour avoir un développement limité à l'ordre 2 de $(n-\frac{1}{2})\ln(1-\frac{1}{n})$, il faut faire un développement limité de $\ln(1 - \frac{1}{n})$ à l'ordre 3. On a

$$\ln(1 - \frac{1}{n}) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})$$

donc

$$(n - \frac{1}{2})\ln(1 - \frac{1}{n}) + 1 = (n - \frac{1}{2})\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})\right) + 1$$
$$= -1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o(\frac{1}{n^2}) + 1 = -\frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

3. Montrer que $V_n = \sum\limits_{k=2}^{n} v_k$ est convergente. On sait que $v_k$ est équivalent à $-\dfrac{1}{12k^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. Par le thm de comparaison des séries à termes positifs, on sait que $\sum(-v_k)$ donc $\sum v_k$ converge.

4. Montrer alors que les suites $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et donc qu'il existe un réel $K > 0$ tel que
$$n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

Comme $\sum_{k\geqslant 2}$ est une série télescopique, sa convergence implique que $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente, donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(u_n) \to k$ ce qui implique $u_n \to e^k$. On pose $K := e^k$, on a bien $K > 0$.

On obtient l'équivalent demandé en écrivant que $\frac{u_n}{K} \to 1$ lorsque $n \to +\infty$ et en revenant à l'expression de $u_n$.

5. En utilisant cet équivalent, donner un équivalent simple de la suite $(W_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$. En déduire que $K = \sqrt{2\pi}$ et, par suite, que
$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \text{ ( formule de Stirling)}$$

On sait que $W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}.\frac{\pi}{2}$ donc
$$W_{2p} \sim \frac{K(2p/e)^{2p}\sqrt{2p}}{2^{2p}\left(K(p/e)^p\sqrt{p}\right)^2}.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{2p}}{K2p} = \frac{\pi}{K\sqrt{2p}}$$

or on a montré à la question 7 de la partie précédente que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ donc $W_{2p} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}}$.
Cela implique $\sqrt{\frac{\pi}{4p}} \sim \frac{\pi}{K\sqrt{2p}}$ donc le quotient tend vers 1, or $\frac{\sqrt{\pi/4p}}{\pi/K\sqrt{2p}} = \frac{K}{\sqrt{2\pi}}$ donc cela impose $K = \sqrt{2\pi}$. En injectant la valeur de $K$ dans l'équivalent de $n!$ trouvé à la question précédente, on obtient la formule de Stirling.

***Exercice 3*** Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. L'objectif du problème est d'étudier les endomorphismes $u$ de $E$ tels que :
$$\langle u(x), x\rangle = 0 \text{ pour tout } x \text{ dans } E \qquad (\star)$$

Les éléments $u$ de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifient $(\star)$ sont appelés ***endomorphisme antisymétrique***.

**Partie 1**: *Etude d'un exemple*

Dans cette partie $E = \mathbb{R}_2[X]$ espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à 2. On considère l'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\varphi(P,Q) = \sum_{k=-1}^{1} P(k)Q(k)$$

1. Vérifier que $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$. *Dans la suite on considérera que $E$ est muni de ce produit scalaire que l'on notera $\langle\ ,\ \rangle$.*

---

On doit montrer que $\varphi$ est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive.

- symétrique: clair par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$.
- On a $\varphi(\lambda P + Q, R) = \lambda\varphi(P,R) + \varphi(Q,R)$, $\forall P, Q, R \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La forme $\varphi$ est donc linéaire par rapport à la première variable et par symétrie, elle est bilinéaire.

- $\forall P \in E$, $\varphi(P,P) = \sum\limits_{k=-1}^{1} P(k)^2 \geqslant 0$, elle est positive
- Si $\varphi(P,P) = 0$, alors $\sum\limits_{k=-1}^{1} P^2(k) = 0$ ce qui impose $P(-1) = P(0) = P(1) = 0$ or $P$ est de degré au plus 2 et il admet au moins trois racines, il est donc nul.

$\varphi$ est donc une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est un produit scalaire.

2. Soit $u$ l'endomorphisme de $E$ défini par :

$$u(P) = 2P'(0)X^2 - (P(1) + P(-1))X$$

(a) Vérifier que pour tout $P$ dans $E$ on a $2P'(0) - P(1) + P(-1) = 0$.

---

par le calcul en posant $P = aX^2 + bX + c$.

(b) En déduire que $u$ est un endomorphisme antisymétrique de l'espace euclidien $E$.

---

Soit $P \in E$. On a

$$\begin{aligned}
&< u(P), P >= u(P)(-1)P(-1) + u(P)(0)P(0) + u(P)(1)P(1) \\
&= (2P'(0) - (P(1) + P(-1)))\, P(-1) + (2P'(0) + P(1) + P(-1))\, P(1) \\
&= 2P'(0)\,(P(1) + P(-1)) - P(1)^2 + P(-1)^2 = (P(1) + P(-1))\,(2P'(0) - P(1) + P(-1)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

L'endomorphisme $E$ est donc bien antisymétrique.

3. Soient $P_1 = \dfrac{1}{2}(X^2 + X)$ et $P_2 = \dfrac{1}{2}u(P_1)$.

(a) Déterminer $u^2(P_1)$ et montrer que $(P_1, P_2)$ est une famille orthonormale.

---

On a $u(P_1) = X^2 - X = 2P_2$ et $u^2(P_1) = -X^2 - X = -2P_1$.
Par ailleurs, on a

- $\varphi(P_1, P_2) = P_1(-1)P_2(-1) + P_1(0)P_2(0) + P_1(1)P_2(1) = 0 + 0 + 0 = 0$.
- $\varphi(P_1, P_1) = 1 + 0 + 0 = 1$
- $\varphi(P_2, P_2) = 0 + 0 + 1 = 1$.

la famille est bien orthonormale.

(b) Déterminer une base de $\ker u$.

---

Soit $P = aX^2 + bX + c$, alors $u(P) = 0 \Leftrightarrow 2bX^2 - 2(a+c)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \end{cases}$ Le noyau est donc engendré par $X^2 - 1$ qui est non-nul, c'est donc une base de $\ker u$.

(c) Trouver une base orthonormale $\beta$ de $E$ et $a$ réel tels que : $Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

---

Posons $Q = X^2 - 1$, alors on a

- $\varphi(P_1, Q) = 0 + 0 + 0 = 0$
- $\varphi(P_2, Q) = 0 + 0 + 0 = 0$
- $\varphi(Q, Q) = 2$

On pose $P_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}Q$, alors la famille $(P_1, P_2, P_3)$ est orthonormale, de cardinal 3 donc c'est une bon de $E$. D'après la question 3a), on sait que $u(P_1) = 2P_2, u(P_2) = u^2(P_1) = -2P_1$ et $u(P_3) = 0$ puisque $P_3 \in \ker u$. On a donc la matrice souhaitée dans cette base.

**Partie 2**: *Caractérisations des endomorphismes antisymétriques*

Soit $u$ dans $\mathcal{L}(E)$.

4. Pour tout $(x, y)$ dans $E^2$ calculer $\langle u(x+y), x+y\rangle$. En déduire que $u$ est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si :

$$\left(\forall (x,y) \in E^2\right) \left(\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle\right)$$

---

On remarque que pour $x, y \in E$, on a

$$< u(x+y), x+y >=< u(x), x > + < u(y), x > + < u(x), y > + < u(y), y >$$

Supposons $u$ antisymétrique, alors $< u(x+y), x+y >= 0$ pour tout $x, y$ donc $< u(x), y > + < u(y), x >= 0$ d'où le résultat par symétrie du produit scalaire.

Réciproquement, supposons que $< u(x), y >= - < x, u(y) >$ pour tout $x, y$, alors en particulier, pour $x = y$, on a $< u(x), x >= - < x, u(x) >$ donc $2 < x, u(x) >= 0$ et $u$ est antisymétrique.

5. Soient $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $E$ et $M = [m_{ij}]$ la matrice de $u$ dans $\beta$. Démontrer que $u$ est un endomorphisme antisymétrique de $E$ si et seulement si $M$ est une matrice antisymétrique i.e. vérifie $\text{Tr}M = -M$.

---

On note $m_{ij}$ les coefficients de $M$. On a montré que $u$ est un endomorphisme symétrique si et seulement si, pour tout $x, y$, $< u(x), y >= - < u(y), x >$. On a $< u(x), y >= - < x, u(y) >, \forall x, y \in E \Leftrightarrow < u(e_i), e_j >= - < e_i, u(e_j) >, \forall (i,j) \in [|1,n|]^2$. Or $u(e_i) = \sum_{k=1}^{n} m_{ki} e_k$ donc $< u(e_i), e_j >= m_{ij}$. On a donc $< u(x), y >= - < x, u(y) >, \forall x, y \in E \Leftrightarrow m_{ji} = m_{ij} \Leftrightarrow {}^tM =_M$.

On a donc montré que $u$ est antisymétrique si et seulement si $M$ est symétrique.

**Partie 3**: *Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques*

Soit $u$ un endomorphisme antisymétrique de $E$.

6. Démontrer que si $\lambda$ est telle que $\ker(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$, alors $\lambda = 0$

---

On suppose $\ker(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$, alors il existe $x \neq 0_E$ tel que $u(x) = \lambda x$. On a alors $0 =< u(x), x >=< \lambda x, x >= \lambda ||x||^2$ or $||x||^2 \neq 0$ donc nécessairement $\lambda = 0$.

**Attention:** Il ne suffit pas de dire $\ker(u - \lambda \text{Id}_E)$ pour conclure, vous devez choisir $x \neq 0_E$.

7. Démontrer que $E = \text{Im}u \oplus^{\perp} \ker u$. En déduire que $\ker u = \ker u^2$.

---

Soient $x \in \ker u$ et $y \in \text{Im}u$ alors il existe $a \in E$ tel que $y = u(a)$, on a

$$< x, y >=< x, u(a) >= - < u(x), a >= - < 0, a >= 0$$

donc $\ker u$ et $\text{Im}u$ sont orthogonaux, ils sont donc en somme directe. Comme la somme de leurs dimensions est celle de $E$ par le théorème du rang, on a $E = \ker u \oplus^{\perp} \text{Im}u$.

**Remarque:** Il est inutile de montrer que les espaces sont en somme directe car ils sont orthogonaux.

Par ailleurs, on sait que $\ker u \subset \ker u^2$, montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \ker u^2$, alors $u(x) \in \mathrm{Im} u$ et $u^2(x) = 0$ donc $u(x) \in \ker u$, on a donc $u(x) \in \ker u \cap \mathrm{Im} u$ ce qui impose $u(x) = 0$ et par suite $x \in \ker u$. On conclut par double inclusion.

8. Démontrer que pour tout $(x, y)$ dans $E^2$ on a :

$$\left\langle u^2(x), y \right\rangle = \left\langle x, u^2(y) \right\rangle$$

puis que si $\lambda$ vérifie $\ker(u^2 - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$, alors $\lambda$ est négatif.

---

On a

$$\left\langle u^2(x), y \right\rangle = -\left\langle u(x), u(y) \right\rangle = -(-\left\langle x, u^2(y) \right\rangle = \left\langle x, u^2(y) \right\rangle$$

Par ailleurs, si $\ker(u^2 - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$ alors il existe $x \neq 0$ tel que $u^2(x) = \lambda x$. On a alors

$$-||u(x)||^2 = -\left\langle u(x), u(x) \right\rangle = \left\langle u^2(x), x \right\rangle = \lambda ||x||^2$$

d'où $\lambda < 0$.

*Dans la suite de cette partie on suppose $n \geqslant 2$ et on* ***admet*** *qu'il existe $\lambda$ non nul tel que $\ker(u^2 - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}$ et on note $x_0$ un élément non nul de $\ker(u^2 - \lambda Id_E)$. On note encore $F = Vect(x_0, u(x_0))$.*

9. (a) Montrer que $F$ est stable par $u$.

---

Il suffit de montrer que l'image d'une base de $F$ appartient encore à $F$. Par hypothèse, $(x_0, u(x_0))$ est libre, c'est donc une base de $F$. On a $u(x_0) =\in F$ et $u(u(x_0)) = \lambda x_0 \in F$ donc $u(F) \subset F$ et $F$ est stable par $u$.

(b) Démontrer que $F^\perp$ est stable par $u$.

---

Soit $y \in F^\perp$, alors $y$ est orthogonal à la base $(x_0, u(x_0)$ de $F$, autrement dit, $< y, x_0 >= 0 =< y, u(x_0) >$. Montrons que $< u(y), x_0 >= 0 =< u(y), u(x_0) >$ ce qui montrera que $u(y)$ appartient à $F^\perp$.

On a $< u(y), x_0 >= - < y, u(x_0) >= 0$ et $< u(y), u(x_0) >= - < y, u^2(x_0) >= -\lambda < y, x_0 >= 0$ donc $u(y) \in F^\perp$ et par suite $F^\perp$ est stable par $u$.

(c) On munit $F^\perp$ du produit scalaire induit par celui de $E$. On définit $u_1 \in \mathcal{L}(F^\perp)$ par

$$u_1(x) = u(x) \text{ pour } x \text{ dans } F^\perp$$

Autrement dit $u_1 = u \mid_{F^\perp}^{F^\perp}$ (double restriction au but et à la source de $u$).
Démontrer que $u_1$ est un endomorphisme antisymétrique de $F^\perp$ puis que $\mathrm{Im} u = F \oplus \mathrm{Im}(u_1)$.

---

Les propriétés d'antisymétrie sont encore valables pour la restriction du produit scalaire à $F^\perp$ donc $u_1$ est un endomorphisme antisymétrique.
On a $\mathrm{Im} u_1 \subset F^\perp$ donc $F$ et $\mathrm{Im} u_1$ sont orthogonaux donc en somme directe. Par ailleurs, si $y \in \mathrm{Im} u$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On écrit $x = a + b$ avec $a \in F, b \in F^\perp$, on a alors $u(x) = y = u(a) + u(b)$ avec $u(a) \in u(F) \subset F$ et $u(b) \in \mathrm{Im} u_1$ donc on a l'inclusion $\mathrm{Im} u \subset \mathrm{Im} u_1 \oplus F$.

Il reste à montrer l'inclusion réciproque. Soit donc $a+b \in F \oplus \mathrm{Im}u_1$, alors il existe $b' \in F^\perp$ tel que $b = u(b')$ et il existe $\alpha, \beta$ réels tels que $a = \alpha x + \beta u(x)$; on écrit $a = \frac{\alpha}{\lambda}\lambda x + \beta u(x) = u\left(\frac{\alpha}{\lambda}u(x) + \beta x\right)$. Posons $a' = \frac{\alpha}{\lambda}u(x) + \beta x$, alors $x = u(a') + u(b') = u(a'+b') \in \mathrm{Im}u$ d'où l'inclusion réciproque.

10. Démontrer que le rang d'un endomorphisme antisymétrique est pair.
**Indication :** *on pourra faire une récurrence sur la dimension de E.*

---

On suit l'indication et on procède par récurrence forte sur la dimension de l'espace. On suppose tout d'abord $\dim E = 2$. Si $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$, le rang de $u$ est nul, il est pair. Sinon, la famille $(x_0, u(x_0))$ construite comme ci-dessus est libre, c'est donc une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\lambda \neq 0$ on a donc $\mathrm{rg}u = 2$.

Si $\dim(E) = 3$, le cas où $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$ est simple. Sinon, on choisit $x_0$ comme ci-dessus et on a $(x_0, u(x_0))$ libre. La famille est orthogonale, on peut donc la normaliser puis la compléter en une BON de $E$ par le thm de la base incomplète. Notons $e_1' = \dfrac{x_0}{||x_0||}$, $e_2' = \dfrac{u(x_0)}{||u(x_0)||}$ et $(e_1', e_2', e_3')$ la BON obtenue. Dans cette base la matrice de $u$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & a \\ \star & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

où les $\star$ sont des réels non nuls. Comme la base est orthonormée, la matrice doit être antisymétrique donc la dernière colonne est nulle et, comme les coefficients des deux premières colonnes sont non nuls, le rang est 2.

On peut aussi raisonner avec la trace ( en admettant le DS9 sujet 2 où on a montré que la trace d'un endomorphisme est la trace de toute matrice le représentant). On complète $(x_0, u(x_0))$ en une base $B$ de $E$ dans laquelle

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

On a $\mathrm{Tr}(u) = c$. Or, dans une BON la matrice de $u$ est anti-symétrique donc de trace nulle (tous ses coefficients diagonaux sont nuls). On en déduit que $\mathrm{Tr}(u) = 0$ donc $c = 0$ et la matrice est bien de rang 2.

On suppose que pour tout endomorphisme antisymétrique $v$ d'un espace de dimension strictement inférieure à $n$ (et supérieure à 2), on a $\mathrm{rg}v$ pair, montrons que $u$, endomorphisme antisymétrique de $E$, avec $\dim E = n$, est pair. On sait que $\dim F^\perp < n$ et $u|_{F^\perp}$ et un endomorphisme antisymétrique d'un espace de dimension $n-2$, on sait donc que $\mathrm{rg}u|_F^\perp = \mathrm{rg}u_1$ est pair. Comme on a montré que $\mathrm{Im}u_1 \oplus F = \mathrm{Im}u$, on a $\mathrm{rg}u = \mathrm{rg}u_1 + \dim F = \mathrm{rg}u_1 + 2$. On a donc la même parité pour $\mathrm{rg}u$ et $\mathrm{rg}u_1$ ce qui achève de montrer le résultat par récurrence.

**Remarque:** On a besoin que $n-2 \geqslant 2$ pour utiliser l'initialisation donc $n \geqslant 4$, c'est pourquoi il est nécessaire d'initialiser aussi au rang 3.

**Partie 4**: *Une application*

Dans cette partie $E$ est un espace vectoriel euclidien de dimension 4.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthonormale de $E$. On considère l'endomorphisme $u$ de $E$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Démontrer que $u$ est un endomorphisme antisymétrique de $E$ et vérifier que le vecteur $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ est appartient à un noyau de la forme $\ker(u^2 - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

---

La matrice est symétrique, d'après la question 5, on en déduit que $u$ est antisymétrique. On a $u(f_1) = 3e_1 - 3e_2 - 3e_4$ et $u^2(f_1) = 3(-3e_1 - 3e_2 + 3e_3) = -9f_1$, $f_1$ appartient bien à un noyau de la forme $\ker(u^2 - \lambda \mathrm{Id}_E)$ avec $\lambda = -9$.

12. Soit $F = \mathrm{Vect}(f_1, u(f_1))$. Déterminer une base orthonormale de $F$ ainsi qu'une base orthonormale de $F^\perp$.

---

On a $< f_1, f_1 >= 3$, on pose $f_1' = \frac{1}{\sqrt{3}} f_1$. On a $u(f_1) = 3e_1 - 3e_2 - 3e_4$ et on sait que $< u(f_1), f_1 >= 0$ puisque $u$ est antisymétrique. Par ailleurs, $< u(f_1), u(f_1) >= 27$, on pose $f_2' = \frac{1}{3\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_4)$, alors $(f_1', f_2')$ est une bon de $F$.

Déterminons $F^\perp$. Soit $X(x, y, z, t) \in F^\perp$, alors

$$X \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} < xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4, e_1 + e_2 - e_3 >= 0 \\ < xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4, e_1 - e_2 - e_4 >= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - t = 0 \end{cases}$$

On a donc $F^\perp = \mathrm{Vect}\left((e_1 + e_3 + e_4), (e_2 + e_3 - e_4)\right)$. On remarque que les deux vecteurs sont orthogonaux, il suffit donc de les normaliser. Une BON de $F^\perp$ est: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_3 + e_4), \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2 + e_3 - e_4)\right) = (f_3', f_4')$.

13. En déduire une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ de $E$ et deux nombres réels $a$ et $b$ tels que la matrice de $u$ dans $\mathcal{B}_0$ soit :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

---

Les espaces $F$ et $F^\perp$ étant supplémentaires orthogonaux, la famille $(f_1', f_2', f_3', f_4')$ est une bon de $E$. Calculons les images de ces vecteurs par $u$.

- On a $u(e_1 + e_2 - e_3) = 3e_1 - 3e_2 - 3e_4 = 3(e_1 - e_2 - e_4)$ donc $u(f_1') = 3f_2'$.
- $u(e_1 - e_2 - e_4) = -3e_1 - 3e_2 + 3e_3 = -3(e_1 + e_2 - e_3)$ donc $u(f_2') = -3f_1'$.
- $u(e_1 + e_3 + e_4) = -6(e_2 + e_3 - e_4)$ d'où $u(f_3') = -6f_4'$
- $u(e_2 + e_3 - e_4) = 6(e_1 + e_3 + e_4)$ d'où $u(f_4') = 6f_3'$

On a bien la matrice de la forme souhaitée avec $a = 3$ et $b = -6$.

***Exercice 4*** 1. *Démontrer que la matrice $B = 3\,A^3 - A^2 - A$ est symétrique réelle.*

On remarque que : $B = A(3\,A^2 - A - I_n) = A\,A^\top$ et donc, $B^\top = (A\,A^\top)^\top = A\,A^\top$, ce qui prouve bien que la matrice $B$ est symétrique réelle.

Il en résulte que la matrice $B$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ puisque symétrique réelle.

2. *Montrer que si $Ker(B - \lambda I) \neq \{0\}$, alors $\lambda \leqslant 0$..*

On suit l'indication de l'énoncé : soit $Y$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

$Y^\top BY = Y^\top A^\top AY = (AY)^\top(AY) = \|AY\|^2$.

Si $Y$ est un vecteur propre (donc non nul) de $B$ pour une valeur propre $\lambda$, on a : $BY = \lambda Y$ et donc, $Y^\top BY = \lambda\,\|Y\|^2$.

Finalement : $\lambda\,\|Y\|^2 = \|AY\|^2$, ce qui prouve ainsi que $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

3. *Montrer que l'on a :* $A = 3\left(A^\top\right)^2 - A^\top - I_n$.

   Évident d'après les hypothèses de l'énoncé.

4. *En déduire que le polynôme* $P(X) = (3\,X^2 - X - 1)^2 - X^2$ *est annulateur de la matrice* $A$.

   On en déduit que $A = 3\,(A^\top)^2 - A^\top - I_n = 3(3\,A^2 - A - I_n)^2 - (3\,A^2 - A - I_n) - I_n$

   soit $(3\,A^2 - A - I_n)^2 - A^2 = O_n$ ou encore $(3\,A^2 - 2\,A - I_n)(3\,A^2 - I_n) = O_n$.

   Il en résulte que le polynôme $P(X) = (3\,X^2 - X - 1)^2 - X^2$ est annulateur de la matrice $A$.

5. *Déterminer un polynôme unitaire annulateur de* $A^\top$.

   Si un polynôme $Q$ annule $A$, alors par transposition, il annule $A^\top$.

   Comme $P$ annule $A$, $\dfrac{1}{9}\,P$ est unitaire et annule $A^\top$.

6. *Factoriser* $P$ *en produit de polynômes irréductibles dans* $\mathbb{R}[X]$.

   Le polynôme $P$ se décompose de la façon : $P(X) = (X-1)(3X+1)(X\sqrt{3}+1)(X\sqrt{3}-1)$.

7. *Soit* $\lambda$ *une valeur propre de* $A$ *et* $V$ *un vecteur propre associé. Montrer que* $V$ *est aussi vecteur propre de* $A^\top$.

   On a : $A\,V = \lambda\,V$ et par suite, $A^2\,V = \lambda^2\,V$.

   Ainsi, puisque $A^\top = 3\,A^2 - A - I_n$, il vient : $A^\top\,V = 3\,A^2\,V - A\,V - V = (3\lambda^2 - \lambda - 1)\,V$, ce qui prouve que $V$ est aussi un vecteur propre de $A^\top$ pour la valeur propre $3\lambda^2 - \lambda - 1$.

8. *On note* $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *les racines du polynôme* $P$.

   *On appelle* $\mathcal{L} = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ *la famille des polynômes de Lagrange associée à cette famille de scalaires, c'est-à-dire les polynômes* $(L_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ *de* $\mathbb{R}_3[X]$ *tels que :*

   $$\forall\,(i,j) \in [\![1,4]\!]^2,\quad L_i(\alpha_j) = \delta_{ij} \text{ où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{(symbole de Kronecker).}$$

   (a) *Déterminer* $L_1$ *sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de* $\mathbb{R}[X]$.

   Le polynôme $L_1$ vérifie : $L_1(1) = 1, L_1\left(-\dfrac{1}{3}\right) = L_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = L_1\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$, ce qui donne, après calculs : $L_1(X) = \dfrac{\left(X+\frac{1}{3}\right)\left(X-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(X+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \dfrac{9}{8}\left(X-\frac{1}{3}\right)\left(X-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(X+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

   (b) *Vérifier que* $\mathcal{L}$ *est une base de* $\mathbb{R}_3[X]$.

   Soit $(\beta_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ des scalaires tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \beta_i\,L_i = 0$.

   Alors, pour tout $j \in [\![1,4]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \beta_i\,L_i(\alpha_j) = 0$, soit $\beta_j = 0$ et la famille $\mathcal{L}$ est libre.

   Comme son cardinal vaut $4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$, la famille $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

   (c) *Soit* $R \in \mathbb{R}_3[X]$. *Déterminer les coordonnées du polynôme* $R$ *dans la base* $\mathcal{L}$.

   Comme la famille $\mathcal{L}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, il existe une unique famille $(\zeta_i)_{i\in[\![1,4]\!]}$ de scalaires tels que : $R = {}_{i=1}^{4}\zeta_i\,L_i$.

   Alors, pour tout $j \in [\![1,4]\!]$, on peut écrire : $R(\alpha_j) = {}_{i=1}^{4}\zeta_i\,L_i(\alpha_j) = \zeta_j$.

   On en déduit que $R = {}_{i=1}^{4}R(\alpha_i)\,L_i$.

9. **Étude de $A^k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$**

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

      i. *Exprimer le reste de la division euclidienne de $X^k$ par le polynôme $P$ dans la base $\mathcal{L}$.*
      Soient $Q$ et $R$ le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^k$ par le polynôme $P$ : $X^k = Q\,P + R$ avec $R \in \mathbb{R}_3[X]$.

      On en déduit immédiatement : $\begin{cases} R(1) = 1 \\ R\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^k \\ R\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^k \\ R\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^k \end{cases}$

      et donc, $R = L_1 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^k L_2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^k L_3 + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^k L_4$.

      ii. *En déduire une expression de $A^k$.*
      Comme $P(A) = O_n$, on en déduit en appliquant à la matrice $A$ :
      $A^k = L_1(A) + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^k L_2(A) + \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^k L_3(A) + \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^k L_4(A)$

   (b) *Démontrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice de projection.*
   *Exprimer cette matrice à l'aide de la matrice $A$.*

   On fait alors tendre $k$ vers l'infini, ce qui donne :

   $$\lim_{k\to+\infty} A^k = L_1(A) = \frac{9}{8}\left(A + \frac{1}{3}I_n\right)\left(A - \frac{\sqrt{3}}{3}I_n\right)\left(A + \frac{\sqrt{3}}{3}I_n\right).$$

   On a $(L_1(A))^2 = \lim\limits_{k\to+\infty} A^{2k} = L_1(A)$ puisque la suite $(A^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite convergente $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers $L_1(A)$ donc $L_1(A)$ est bien une matrice de projection.

## *Exercice 5* Questions préliminaires

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $y'' + \alpha y = 0$ est $E_c : r^2 + \alpha = 0$.

   - Si $\alpha > 0$, les solutions de $E_c$ sont $r_1 = \mathrm{i}\sqrt{\alpha}$ et $r_2 = -\mathrm{i}\sqrt{\alpha}$. L'ensemble solution de l'équation différentielle est donc :
   $$\left\{t \mapsto A\cos\left(\sqrt{\alpha}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\alpha}\,t\right),\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
   - Si $\alpha = 0$, l'ensemble solution de l'équation différentielle est :
   $$\left\{t \mapsto At + B,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
   - Si $\alpha < 0$, les solutions de $E_c$ sont $r_1 = \sqrt{-\alpha}$ et $r_2 = -\sqrt{-\alpha}$.
   L'ensemble solution de l'équation différentielle est donc :
   $$\left\{t \mapsto Ae^{\sqrt{-\alpha}\,t} + Be^{-\sqrt{-\alpha}\,t},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

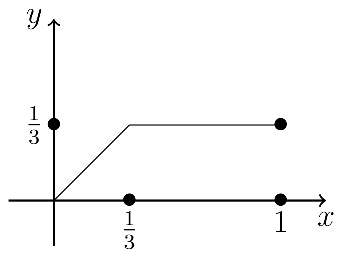
2. *Soit $h \in E$ et $a \in [0,1]$. On considère la fonction $H : x \mapsto \int_a^x h(t)\,dt$.*

Comme la fonction $h$ est continue sur $[0,1]$, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $H$ est de classe $C^1$ sur $[0,1]$ et l'on a : $\forall x \in [0,1]$, $H'(x) = h(x)$.

*****

3. **Cas particuliers.**

(a) *Tracer la courbe représentative de la fonction $t \mapsto min\left(\dfrac{1}{3}, t\right)$ sur l'intervalle $[0,1]$.*




(b) *Calculer* $\displaystyle\int_0^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right)\,\mathrm{d}t$.

On peut écrire que : $\displaystyle\int_0^1 \min\left(\frac{1}{3}, t\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{3}} t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{3}}^1 \mathrm{d}t = \frac{5}{18}$

(c) *Soit $x$ un réel de $[0,1]$, exprimer* $\displaystyle\int_0^1 \min(x,t)\,\mathrm{d}t$ *en fonction de $x$.*

Pour $0 \leqslant t \leqslant x$, on a : $\min(x,t) = t$ et pour $x \leqslant t \leqslant 1$, on a : $\min(x,t) = x$

Ainsi : $\displaystyle\int_0^1 \min(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 \mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} + x(1-x) = x - \frac{x^2}{2}.$

4. *Soit $f \in E$.*

(a) *Justifier que $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \min(x,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$ définit une fonction de classe* $C^1$ sur $[0,1]$ *et, pour tout $x \in [0,1]$, calculer $F'(x)$.*

Pour tout $x \in [0,1]$, on peut écrire :

$$F(x) = \int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t - x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après la question **2.** la fonction $F$ est donc de classe $C^1$ sur $[0,1]$ et : $\forall x \in [0,1]$,

$$F'(x) = x\,f(x) - \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t - x\,f(x) = -\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) *Calculer $F(0)$ et $F'(1)$* On a $F(0) = 0$ et $F'(1) = 0$ d'après les calculs précédents.

(c) *Démontrer alors que $F$ est de classe $C^2$ sur $[0,1]$ et montrer que $F'' = -f$.*

Toujours d'après la question **2.** la fonction $F'$ est donc de classe $C^1$ sur $[0,1]$ et :

$$\forall x \in [0,1],\ F''(x) = -f(x).$$

À toute fonction $f$ de $E$, on associe $T(f) = F$ définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad F(x) = \int_0^1 \min(x,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$$

5. *Montrer que $T$ est un endomorphisme de $E$.*

   • $T$ est linéaire du fait de la linéarité de l'intégrale.

   • D'après les questions précédentes, $F = T(f)$ est de classe $C^1$ sur $[0,1]$ et donc, $F \in E$.

   Conclusion : $T$ est un endomorphisme de $E$.

6. *L'application $T$ est-elle injective ?*

   Soit $f \in \mathrm{Ker}(T)$ : $T(f) = 0$ donc $-f = 0$ par double dérivation et ainsi, $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, ce qui prouve que $T$ est injective.

7. *On pose $A = \{G \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}), G(0) = G'(1) = 0\}$.*

   (a) *Montrer que* $\mathrm{Im}(T) \subset A$.
   Soit $G \in \mathrm{Im}(T)$ : $\exists\, g \in E$ tel que $G = T(g)$.
   Alors, $G$ est de classe $C^2$ sur $[0,1]$ d'après les questions précédentes et $G(0) = 0$ ainsi que $G'(1) = 0$.
   Ainsi, $\mathrm{Im}(T) \subset A$.

   (b) *Soit $G \in A$. Calculer $T(G'')$.*
   Pour $x \in [0,1]$ on a :

$$\begin{aligned} T(G'')(x) &= \int_0^x tG''(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 G''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [tG'(t)]_0^x - \int_0^x G'(t)\,\mathrm{d}t + x\,[G'(t)]_x^1 \quad \text{en intégrant par parties} \\ &= -G(x) \quad \text{car } G \in A \end{aligned}$$

   Par conséquent, $A \subset \mathrm{Im}(T)$.

   (c) *Déterminer* $\mathrm{Im}(T)$.
   Des deux questions précédentes, on déduit : $\mathrm{Im}(T) = A$.

8. **Recherche des éléments propres de $T$**

   (a) *Démontrer par l'absurde que, si $\lambda$ est une valeur propre de $T$, alors $\lambda$ est strictement positive. On pourra utiliser la question 4.*
   On sait déjà que 0 n'est pas valeur propre car $T$ est injective et donc $\mathrm{Ker}(T) = \{(0)\}$.
   Si $\lambda$ est une valeur propre de $T$, il existe une $f \in E$, non nulle, telle que $T(f) = \lambda f$.
   Facilement, $T(f) = \lambda f \iff f'' + \dfrac{1}{\lambda} f = 0$.
   Supposons, par l'absurde, que $\lambda < 0$ : $\exists\, \omega \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda = -\dfrac{1}{\omega^2}$.
   Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme $f(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
   Alors, les conditions initiales $f(0) = f'(1) = 0$ donnent :
   $\begin{cases} A + B & = 0 \\ A\omega e^{\omega} - B\omega e^{-\omega} & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B & = 0 \\ A & = 0 \end{cases}$, soit $f = 0$, ce qui est impossible.
   Conclusion : les valeurs propres de $T$ sont strictement positives.

(b) *Déterminer les valeurs propres de $T$.*

Comme $\lambda > 0$, $\exists\, \omega \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda = \dfrac{1}{\omega^2}$ et les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $f(x) = A\,\cos(\omega x) + B\,\sin(\omega x)$.

Les conditions $f(0) = f'(1) = 0$ imposent $A = 0$ et $B\,\omega\,\cos(\omega) = 0$.

Ainsi, les valeurs de $\omega$ qui conviennent sont les $\omega_k = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$, $k \in \mathbb{N}$ et les valeurs propres sont des réels $\lambda_k = \dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)^2}$, $k \in \mathbb{N}$.

Le calcul effectué permet de vérifier que l'on obtient bien ainsi toutes les valeurs propres de $T$.

(c) *Pour chaque valeur propre de $T$, déterminer la dimension et une base de $Ker(T - \lambda id_E)$.*

<u>Conclusion</u> : les valeurs propres de $T$ sont les $\lambda_k = \dfrac{4}{\pi^2\,(2k+1)^2}$, $k \in \mathbb{N}$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(T - \lambda_k id_E) = \mathrm{Vect}(f_k)$ définies par : $\forall\, x \in [0,1]$, $f_k(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\,(2k+1)\,x\right)$, ce sont des droites vectorielles (de dimension 1).

***Exercice 6*** Soit $n$ un entier naturel non nul.

### Questions de cours

1. Soit $p$ une projection vectorielle de rang $r \in \mathbb{N}$.

   (a) Lorsque $r = 0$, $W$ est la matrice nulle. Lorque $r = n$, $W = I_n$. Dans les autres cas, on écrit la matrice par blocs : $W = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$.

   (b) Lorsque $r = 0$, $\mathbf{Sp}(W) = \{0\}$. Lorsque $r = n$, $\mathbf{Sp}(W) = \{1\}$. Dans les autres cas, $\mathbf{Sp}(W) = \{0, 1\}$

   (c) On a $\mathbf{rg}(W) = \mathbf{tr}(W)$.

   (d) Si $r = n$, $\mathbf{det}(W) = 1$. Sinon, $\mathbf{det}(W) = 0$.

*****

On considère la famille $X_1, ..., X_n$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ toutes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0,1[$.

Soit $M$ une variable aléatoire discrète de $\Omega$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\omega$ dans $\Omega$, $M(\omega)$ est diagonalisable et semblable à $\Delta(\omega) = \mathrm{diag}(X_1(\omega), ..., X_n(\omega))$.

2. On note $T$ la variable aléatoire $\mathbf{tr}(M)$.

   (a) Comme la trace est invariante par similitude, $T = \mathbf{tr}(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Comme $X_1, \ldots, X_n$ sont à valeurs dans $\{0, 1\}$, $T$ est donc à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.

   (b) $T$ est la somme de $n$ variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p$. $T$ suit donc une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$. D'après le cours, $\mathbb{E}(T) = np$.

3. Comme le rang est invariant par similitude, $R = \mathbf{rg}(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} X_k$ car $\Delta$ est une matrice de projection. Donc $R = T$ et suit donc aussi une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

4. On note $D$ la variable aléatoire $\mathbf{det}(M)$.

(a) Comme le déterminant est invariant par similitude, $D = \mathbf{det}(\Delta) = \prod_{k=1}^{n} X_k$. Donc $D(\Omega) = \{0, 1\}$.
(b) $D$ suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $P(X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots, X_n = 1) = p^n$ car les variables sont indépendantes. Donc $\mathbb{E}(D) = p^n$.

5. On se propose de déterminer la probabilité de l'évènement $Z$:

ń les sous-espaces propres de la matrice $M$ ont tous la même dimension ż.

(a) Comme le spectre est invariant par similitude, $V = \bigcap_{k=1}^{n}(X_k = 1) \cup \bigcap_{k=1}^{n}(X_k = 0)$ et les deux évènements sont incompatibles. Donc $P(V) = p^n + (1-p)^n$ par indépendance.
(b) Rappelons que $M$ a soit une valeur propre, soit deux valeurs propres distinctes. Comme $n$ est impair, si $M$ a deux valeurs propres distinctes, les deux sous-espaces propres ne peuvent pas être de la même dimension. Donc $Z = V$, et $P(Z) = p^n + (1-p)^n$.
(c) Comme $T$ suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$, $P(T = r) = \binom{2r}{r} p^r (1-p)^r$.
L'évènement $(T = r)$ correspond à : $\dim(E_1(M)) = r$. Comme $n = 2r$, on a donc aussi $\dim(E_0(M)) = r$. On obtient ainsi : $Z = V \cup (T = r)$, donc $P(Z) = p^{2r} + (1-p)^{2r} + \binom{2r}{r} p^r (1-p)^r$.

6. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A(\omega) = U(\omega) \times (U(\omega))^\top = (a_{ij}(\omega))_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$.

(a) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{ij}(\omega) = X_i(\omega) X_j(\omega)$.
(b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. La variable $a_{ii}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(X_i^2 = 1) = p$.
Si $j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, la variable $a_{ij}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(X_i = 1, X_j = 1) = p^2$, par indépendance.
(c) $\mathbf{tr}(A) = {}_{i=1}^{n} a_{ii} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Or, $X_i^2 = X_i$ car $X_i$ ne prend que les valeurs 0 et 1. donc $\mathbf{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
(d) On remarque que toutes les colonnes de $A$ sont liées (elles sont toutes multiples de $U$). Donc le rang de $A$ vaut 0 si $U$ est nulle et 1 sinon : $\mathbf{rg}(A)(\Omega) = \{0, 1\}$.
(e) Soit $\omega$ dans $\Omega$. Trois cas se présentent :
   - soit $A(\omega)$ est la matrice nulle et sa seule valeur propre est 0 ;
   - soit $A(\omega)$ est non nulle et $n = 1$ et sa seule valeur propre est 1 ;
   - soit $A(\omega)$ est non nulle et $n > 1$ et elle a deux valeurs propres 0 et $\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)^2 = T(\omega)$.
(f) Comme $P(U = 0) = P(X_1 = 0, \ldots, X_n = 0) = (1-p)^n$ par indépendance, $\mathbf{rg}(A)$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1-p)^n$.