Produit scalaire

Dans tout le chapitre, les espaces vectoriels considérés sont sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1 Produits scalaires

Définition 1. Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On appelle **produit scalaire** (p.s.) sur E une forme $\Phi : E^2 \to \mathbb{R}$ qui est :

1. **symétrique:** $\forall x, y \in E$, $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$;
2. **bilinéaire:** (c-à-d linéaire vis-à-vis de chacune de ses variables).
   $\forall x_1, x_2 \in E$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\forall y \in E$,
   $$\Phi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 \Phi(x_1, y) + \lambda_2 \Phi(x_2, y)$$
3. **positive:** $\forall x \in E$, $\Phi(x, x) \geqslant 0$
4. **définie :** $\Phi(x, x) = 0$ uniquement si $x = 0_E$.

Dans ce cas, on notera $\Phi(x, y) = (x \mid y)$, ou parfois (x, y), $\langle x \mid y\rangle$, $\langle x, y\rangle$ ou encore $x \cdot y$.

Définition 2.
- Un $\mathbb{R}$-ev E muni d'un p.s. $(\cdot \mid \cdot)$ est appelé **espace préhilbertien réel**.
- Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé **espace euclidien**.

Exemples 1.

1. ***Sur*** $E = \mathbb{R}^n$***:***
   Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$*, alors le p.s. usuel de* x *et* y *est:*
   $$(x \mid y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^T y$$
2. ***Sur*** $E = \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$***, où*** $a < b$
   Si $f, g \in \mathbb{E}$*, le p.s. usuel entre* f *et* g *est:*
   $$(f \mid g) := \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$
3. ***Sur*** $E = \mathbb{R}[X]$***:***
   Soit $a < b$*. Si* $P, Q \in \mathbb{R}[X]$*, le p.s. usuel entre* P *et* Q *est:*
   $$(P \mid Q) := \int_a^b P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b PQ$$

Dans la suite, $(E, (\cdot \mid \cdot))$ désigne un espace préhilbertien réel.

2 Normes euclidiennes

Définition 3. Pour tout $x \in E$, on pose

$$||x|| := \sqrt{(x \mid x)}$$

qui est bien défini, car $(x \mid x) \geqslant 0$.

L'application $\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & ||x|| \end{array}$ est ce que l'on appelle la **norme associée au p.s.** $(\cdot \mid \cdot)$.
On dit alors que c'est une norme euclidienne.

Exemples 2.

1. *La norme usuelle sur* $\mathbb{R}^n$*:*

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

2. *La norme usuelle sur* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$*:*

$$||f|| = \sqrt{\int_a^b f^2}$$

Proposition 1.
Pour tout $x \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $||x|| = 0 \iff x = 0_E$
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \times ||x||$

Proposition 2 (Produit scalaire et norme)**.** *Pour tous* $x, y \in E$*,*

1. $||x+y||^2 = ||x||^2 + 2(x \mid y) + ||y||^2$ $\quad (E_1)$
2. $||x-y||^2 = ||x||^2 - 2(x \mid y) + ||y||^2$ $\quad (E_2)$
3. $(x \mid y) = \dfrac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right)$ *(Formule de polarisation)*

Remarque. *Une conséquence du 3. est qu'un p.s. est entièrement caractérisé par sa norme.*

Exemples 3.

1. *L'application* $N : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2 + 2xy + 3y^2}$ *est-elle une norme euclidienne sur* $\mathbb{R}^2$*?*
2. *L'application* $M : (x,y) \mapsto \max(|x|, |y|)$ *est-elle une norme euclidienne?*

Théorème 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Pour tous* $x, y \in E$*,*

$$|(x \mid y)| \leqslant ||x|| \times ||y||$$

avec égalité ssi x *et* y *sont colinéaires.*

Exemples 4.

1. *Sur* $\mathbb{R}^n$*, si* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$*, cela donne:*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

2. *Montrer que pour tout réel* $(x_1, \ldots, x_n)$*, on a* $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

3. *Sur* $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$*, pour tous* $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$*:*

$$\left|\int_a^b f \cdot g\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} \times \sqrt{\int_a^b g^2}$$

4. *Montrer que pour tout* $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$*,*

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{b-a}\sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Théorème 4 (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tout* $x, y \in E$*,*

$$||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$$

avec égalité ssi x *et* y *sont "positivement liés", c-à-d s'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $x = \lambda y$*, ou* $y = \lambda x$*.*

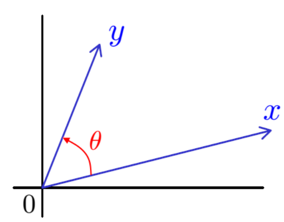
Exemple 5. *: Un cas particulier: le p.s. usuel sur* $\mathbb{R}^2$

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *et* $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$*. On rappelle que* $(x \mid y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$*.*

On a

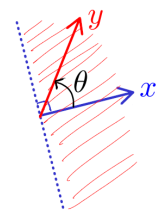
$$(x \mid y) = ||x|| \cdot ||y|| \cdot \cos(\theta)$$

où θ *désigne l'angle entre* x *et* y*.*



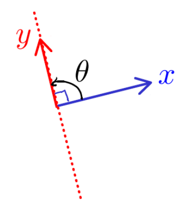
Interprétation du signe de $(x \mid y)$***:*** *ce signe dépend de celui de* $\cos(\theta)$ *!*

Si $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$



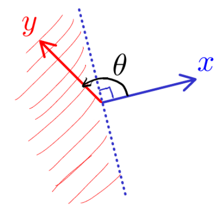
$\boxed{(x \mid y) > 0}$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$



$\boxed{(x \mid y) = 0}$

Si $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$



$\boxed{(x \mid y) < 0}$

3 Familles orthogonales, orthonormales

Définition 4. Soit $x, y, e_1, \dots, e_p \in E$. On dit que:

1. x et y sont **orthogonaux** si $(x \mid y) = 0$.
2. La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est **orthogonale** si pour tous $i \neq j$ de $[\![1;p]\!]$, $(e_i \mid e_j) = 0$.
3. Le vecteur x est **unitaire** si $||x|| = 1$.
4. La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est **orthonormale** (ou **orthonormée**) si elle est orthogonale et composée de vecteurs unitaires.
5. La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est une **base orthonormée** s'il s'agit à la fois d'une base de E, et d'une famille orthonormée. On note une telle famille BON en abrégé (abréviation officielle).

Exemple 6. *La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une BON pour le produit scalaire usuel.*

Remarque. *Toutes ces définitions dépendent du produit scalaire !!*

Exemple 7. $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x,y),(x',y')) & \longmapsto & xx' + (x+x')(y+y') \end{array} \right.$. *C'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ pour lequel la base canonique n'est pas orthogonale.*

Théorème 5. *Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.*

Remarque. *Une famille orthonormée est une famille libre.*

Théorème 6 (Théorème de Pythagore)**.** *Si une famille $(e_1, \dots, e_p)$ est orthogonale, alors*

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} e_i\right|\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} ||e_i||^2$$

Proposition 7.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une BON de E. Soit $x, y \in E$, de coordonnées $Mat_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Mat_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$.

1. $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $x_i = (x \mid e_i)$, et donc $x = (x \mid e_1)e_1 + \dots + (x \mid e_n)e_n$ Les coordonnées de x dans une BON sont donc $((x \mid e_1), \dots, (x \mid e_n))$.
2. $(x \mid y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
3. $||x||^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

Remarque. *Autrement dit, lorsque l'on représente les vecteurs de E par leurs vecteurs coordonnées dans une BON, alors tout se ramène à manipuler des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, muni du p.s. USUEL.*

4 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

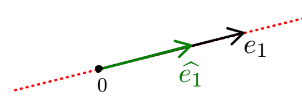
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E.

Objectif: construire une famille **orthonormée** $(\widehat{e_1}, \dots, \widehat{e_p})$ telle que:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \text{Vect}(\widehat{e_1}) & = & \text{Vect}(e_1) \\ \text{Vect}(\widehat{e_1}, \widehat{e_2}) & = & \text{Vect}(e_1, e_2) \\ \text{Vect}(\widehat{e_1}, \widehat{e_2}, \widehat{e_3}) & = & \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) \\ & \vdots & \\ \text{Vect}(\widehat{e_1}, \dots, \widehat{e_p}) & = & \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \end{array} \right.$$

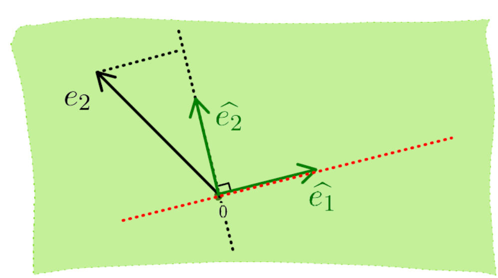
4.1 Idée de la construction : traiter les $e_1, \dots, e_p$ un par un, de gauche à droite

- Normalisation de e_1, de sorte que $\text{Vect}(\widehat{e_1}) = \text{Vect}(e_1)$.

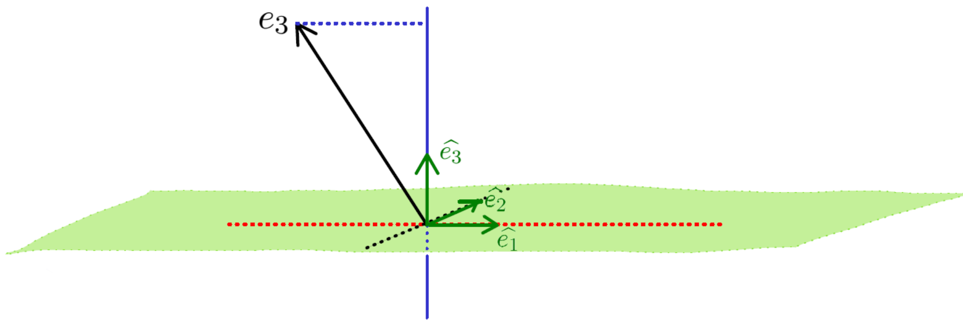


- " Redressement" et normalisation de e_2, de sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{e_2} \perp \widehat{e_1} \\ ||\widehat{e_2}|| = 1 \\ \text{Vect}(\widehat{e_1}, \widehat{e_2}) = \text{Vect}(e_1, e_2) \end{array} \right.$$

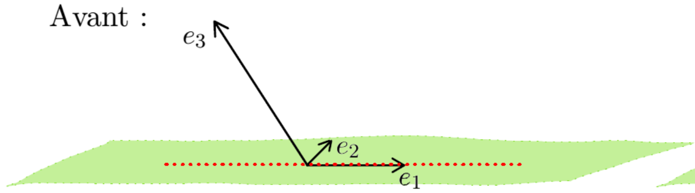


- Idem pour e_3: $\begin{cases} \widehat{e_3} \perp \widehat{e_1} \quad \text{et} \quad \widehat{e_3} \perp \widehat{e_2} \\ ||\widehat{e_3}|| = 1 \\ \mathrm{Vect}(\widehat{e_1}, \widehat{e_2}, \widehat{e_3}) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) \end{cases}$

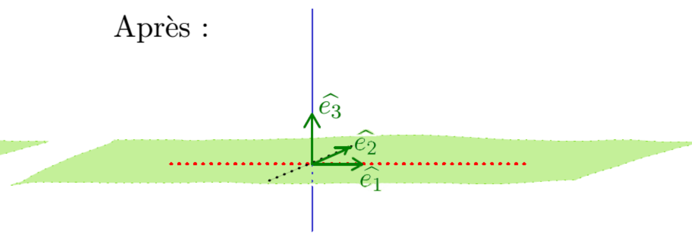


Résultat des transformations :

Avant :

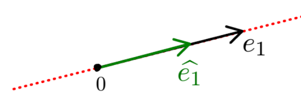


Après :



4.2 Comment calculer les $\widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_p}$?

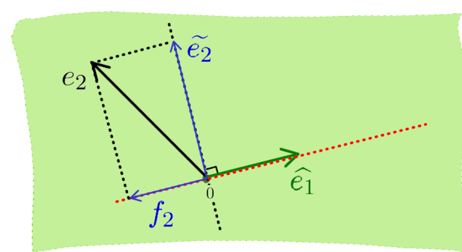
- Pour $\widehat{e_1}$: $\boxed{\widehat{e_1} = \dfrac{e_1}{||e_1||}}$, de sorte que $||\widehat{e_1}|| = \dfrac{||e_1||}{||e_1||} = 1$.



- Pour $\widehat{e_2}$: un bon candidat pour être orthogonal à $\widehat{e_1}$:

$$\widetilde{e_2} := e_2 - f_2$$

où f_2 est le vecteur représenté ci-contre.



Or, $f_2 = (e_2 \mid \widehat{e_1})\, \widehat{e_1}$; donc

$$\boxed{\widetilde{e_2} = e_2 - \underbrace{(e_2 \mid \widehat{e_1})\, \widehat{e_1}}_{\substack{\text{composante de } e_2 \\ \text{selon } \widehat{e_1}}}}$$

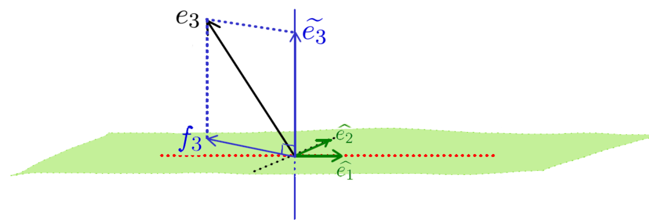
Il est alors facile de démontrer que $< \widetilde{e_2}, \widehat{e_1} >$, et il ne reste plus qu'à normaliser $\widetilde{e_2}$: $\boxed{\widehat{e_2} := \dfrac{\widetilde{e_2}}{||\widetilde{e_2}||}}$

On remarque que $\widetilde{e_2} \neq 0_E$ car (e_1, e_2) est libre.

- Pour $\widehat{e_3}$:

On pose $\widetilde{e_3} := e_3 - f_3$ c'est-à-dire :

$$\boxed{\widetilde{e_3} := e_3 - \underbrace{[(e_3 \mid \widehat{e_1})\,\widehat{e_1} + (e_3 \mid \widehat{e_2})\,\widehat{e_2}]}_{\substack{\text{compostante de } e_3 \\ \text{selon } \widehat{e_1} \text{ et } \widehat{e_2}}}}$$



$\widetilde{e_3}$ est alors orthogonal à $\widehat{e_1}$ et $\widehat{e_2}$. On pose alors $\boxed{\widehat{e_3} := \dfrac{\widetilde{e_3}}{||\widetilde{e_3}||}}$, pour être de norme 1.

On remarque, à nouveau, que $\widetilde{e_3} \neq 0_E$ car sinon, on aurait $e_3 \in \mathrm{Vect}(\widehat{e_1}, \widehat{e_2}) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et cela contredit la liberté de (e_1, e_2, e_3).

4.3 L'algorithme général et le théorème

Théorème 8 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)**.** *Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E. On construit par récurrence la famille $(\widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_p})$ de la façon suivante:*

- $\widehat{e_1} = \dfrac{e_1}{||e_1||}$
- *$\forall k \in [\![1; p-1]\!]$, si $\widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_k}$ sont construits, alors on définit $\widehat{e_{k+1}}$ par:*

$$\widetilde{e_{k+1}} \;:=\; e_{k+1} \underbrace{- \sum_{i=1}^{k} (e_{k+1} \mid \widehat{e_i})\,\widehat{e_i}}_{\substack{\text{on enlève à } e_{k+1} \\ \text{ses composantes} \\ \text{selon } \widehat{e_1},\ldots,\widehat{e_k}}} \quad \textit{puis} \quad \widehat{e_{k+1}} := \frac{\widetilde{e_{k+1}}}{||\widetilde{e_{k+1}}||}$$

Cette famille, appelée "orthonormalisée de $(e_1, \ldots, e_p)$", vérifie les propriétés suivantes :

1. *$(\widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_p})$ est orthonormée (d'où son nom) ;*
2. *$\forall k \in [\![1; p]\!]$, $Vect(\widehat{e_1}, \ldots, \widehat{e_k}) = Vect(e_1, \ldots, e_k)$ (préservation de tous les sev intermédiaires).*

Remarque. *Une conséquence simple et importante de cet algorithme est que si E est de dimension finie (espace euclidien), alors il admet des BON. En effet, il suffit d'appliquer l'algorithme à n'importe laquelle de ses bases pour obtenir une BON.*

Théorème 9 (Théorème de la BON incomplète)**.**
Si E est de dimension finie et si $\mathcal{E} := (e_1, \ldots, e_p)$ une famille orthonormée de E, alors on peut la compléter en une BON de E.

Exemple 8. Calculer l'orthonormée de $(1, X, X^2)$ pour le produit scalaire $< P, Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

5 Orthogonal d'une partie de E / d'un sev de E de dimension finie

Définition 5. Soit A et B deux sous-ensembles de E. On dit que A est orthogonal à B sont orthogonaux, et on note $A \perp B$ si

$$\forall (x, y) \in A \times B, < x, y >= 0.$$

Remarque. *Si A est orthogonal à B, B est orthogonal à A.*

Définition 6. Soit $A \subset E$. On note $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A:

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A,\ (x \mid a) = 0\}$$

L'ensemble $A^\perp$ est appelé **orthogonal de** A.

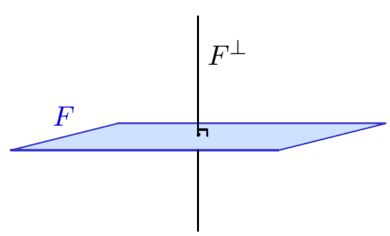
Remarque. *Si $A \perp B$, alors $A \subset B^\perp$ (et $B \subset A^\perp$).*

Théorème 10 (Orthogonal d'une partie $A \subset E$)**.**
Soit $A \subset E$, alors $A^\perp$ est un sev de E.

Proposition 11.
Soit F un ssev de E de dimension finie, $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. Alors une partie A est orthogonale à F si et seulement si $\forall a \in A, < a, e_i >= 0$.

Proposition 12.
Soit F un sev **de dimension finie** (ce qui n'implique pas que le sev $F^\perp$ soit lui-même de dimension finie).
Alors, $F^\perp$ est un supplémentaire de F dans E. Autrement dit :

$$E = F \oplus F^\perp$$



Remarque. *Si F n'est pas de dimension finie, on n'a pas forcément $F \oplus F^\perp = E$ (cf td ex 19)*

Proposition 13.

Si F est de dimension finie, $F^\perp$ (qui n'est pas forcément de dimension finie) est l'**unique** sev de E qui est

1. orthogonal à F (au sens où ses vecteurs sont orthogonaux à ceux de F);

2. un supplémentaire de F dans E.

On peut donc dire "**LE**" supplémentaire orthogonal de F.

Proposition 14.
Soit F de dimension finie, on a :
$$(F^{\perp})^{\perp} = F$$

Théorème 15. *on suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Si F un sev de E et que*
   - *$(f_1, \dots, f_p)$ est une BON de F ;*
   - *$(h_1, \dots, h_q)$ est une BON de $F^{\perp}$ (avec $q = n - p$, nécessairement) ;*

   alors la famille $\mathcal{E} = (f_1, \dots, f_p, h_1, \dots, h_q)$ est une BON de E.

2. *Réciproquement, si $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est une BON de E et $k \in [\![1, n]\!]$, alors si on pose :* $\begin{cases} F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) \\ G = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n) \end{cases}$ *, on a $E = F \oplus G$, et $G = F^{\perp}$.*

Définition 7. Supposons que E est de dimension finie. Si F est un hyperplan, alors $F^{\perp}$ est une droite vectorielle, dirigée par un vecteur u. Ce vecteur est appelé vecteur normal à l'hyperplan F.

Exemple 9. *Déterminer un vecteur normal à F où $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y - 2z + 3t = 0\}$.*

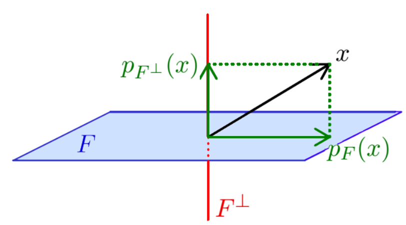
6 Projecteurs orthogonaux

Dans cette partie, on fixe F un sev de E **de dimension finie**. On rappelle que dans ce cas, on a $F \oplus F^{\perp} = E$, même si E et $F^{\perp}$ peuvent eux ne pas être de dimension finie.

Définition 8. Le projecteur orthogonal sur F est le projecteur p_F sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Symétriquement, dans ce cours, $p_{F^{\perp}}$ désigne le projecteur sur $F^{\perp}$ parallèlement à F.

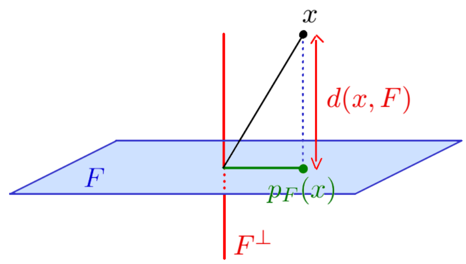
Par définition, pour tout $x \in E$, $x = p_F(x) + p_{F^{\perp}}(x)$.



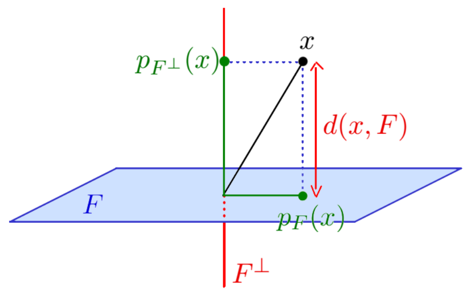
Théorème 16. *Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une BON de F, alors pour tout $x \in E$:*
$$p_F(x) = (x \mid e_1)e_1 + \cdots + (x \mid e_p)e_p$$

Théorème 17. *Soit F un sev de dimension finie. Soit $x \in E$.*
L'ensemble $\{||x - y|| \mid y \in F\}$ des distances entre x et les vecteurs de F, admet un minimum, atteint (uniquement) pour $y = p_F(x)$.

Définition 9. Ce minimum $||x - p_F(x)|| = \min\limits_{y \in F} (||x - y||)$ est appelé la **distance entre x et F**, et est noté $d(x, F)$.



Remarque. *$d(x,F)$ vaut donc $||p_{F^\perp}(x)||$, puisque $p_{F^\perp}(x) = x - p_F(x)$.*



Exemple 10. *Déterminer la distance du vecteur $u = (1,1,1)$ au ssev $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+2y-z = 0\}$.*