Lycée du Parc 842.

# Variables aléatoires finies et lois usuelles

## 1 Variables aléatoires

**Définition 1.** On considère un ensemble fini $\Omega$ et une loi de probabilité $p$ sur $\Omega$. Une variable aléatoire $X$ sur $\Omega$ est une fonction définie sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

*Exemple* 1. *On lance deux dés équilibrés à six faces, $X$ peut valoir la somme des deux dés, la plus grande valeur obtenue, la plus petite, la différence entre les deux etc*

**Notations:** Soit $A$ un ensemble de $\mathbb{R}$. On note $(X \in A)$ l'évènement $X^{-1}(A)$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, pour alléger les notations, on note

- $(X = a) = X^{-1}(\{a\}) = \{w \in \Omega, X(w) = a\}$.
- $(X \geqslant a) = X^{-1}([a, +\infty[) = \{w \in \Omega, X(w) \geqslant a\}$
- $(a < X \leqslant b) = X^{-1}(]a, b]) = \{w \in \Omega, a < X(w) \leqslant b\}$.

*Exemples* 2.

1. *Si $X$ est la somme des dés et $A = \{3, 4\}$, $(X \in A)$ est l'ensemble des évènements dont l'image appartient à $A$. Autrement dit, l'ensemble des tirages qui réalisent "la somme des deux dés vaut 3 ou 4".*

   *Si $A = \{1\}$, $X \in A$ (ou encore $X = 1$) est l'évènement impossible.*

2. *On lance trois fois une pièce équilibrée, on obtient 2 euros si on tombe sur pile, $-1$ sinon. On a $X(\Omega) = \{-3, 0, 3, 6\}$.*

**Définition 2.** Soit $X$ une variable aléatoire sur $\Omega$. On définit une nouvelle loi de probabilité associée à $X$, par la donnée des réels $x_i$ et des probabilités $p_i = P(X = x_i)$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

**Remarque.** *Si $X$ est une variable aléatoire sur $\Omega$, on a donc $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$.*

*Exemples* 3.

1. *Dans une urne, on dispose de 3 boules blanches, deux boules bleues et une boule noire. On tire une boule de cette urne au hasard. On perd 1 euros quand on tire une boule bleue, on ne gagne rien ni ne perd rien quand on tire une blanche, on gagne 2 euros quand on tire la boule noire. Déterminer la loi de $X$*

2. *On lance deux dés équilibrés à six faces l'un après l'autre. On gagne 2 euro si on tire un six, on perd un euro si on tire un 3 ou un 5 et on gagne 1 euro sinon. On note $X$ la loi de probabilité égale au total des gains. Déterminer la loi de $X$.*

**Remarque.** *Les $x_i$ correspondent aux différentes valeurs prises par $X$ lors des différentes issues. Dans les deux cas, on a la somme des $P(X = x_i)$ qui vaut 1.*

**Définition 3.** Soit $f : A \to \mathbb{R}$ avec $X(\Omega) \subset A$, alors on note $f(X)$ la variable aléatoire : $f \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$.

*Exemple* 4. *On lance 3 fois un dé. On note $X$ le nb de fois où on a obtenu un six. À chaque six, on gagne 2 euros. On note $f : x \mapsto 2x$, $f(X)$ est la variable aléatoire réprésentant le gain.*

### 1.1 Espérance

**Définition 4.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle avec $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on appelle espérance de $X$ le réel

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i).$$

Concrètement, c'est la moyenne des valeurs de la variable aléatoire $X$, pondérées par leurs probabilités de réalisation.

*Exemples* 5.

1. *Dans l'exemple du jeu avec les deux dés, le jeu est-il favorable au joueur?*
2. *Prenons maintenant le cas d'un dé équilibré que l'on lance. On note $X$ le carré de la valeur obtenue. La variable aléatoire $X$ prend donc comme valeurs les carrés des entiers de 1 à 6 et chacune de ces valeurs est obtenue avec une probabilité de $\frac{1}{6}$. À quoi correspond l'espérance?*

**Définition 5.** Si $E(X) = 0$, on dit que $X$ est une variable aléatoire centrée.

**Remarque:** Dans le cadre d'un jeu, si $X$ représente le gain d'un joueur, une espérance positive correspond à un jeu favorable au joueur, un espérance négative un jeu défavorable au joueur.

**Proposition 1.**
Si $X$ est une variable aléatoire, alors $X - E(X)$ est une variable aléatoire centrée.

**Proposition 2** (Propriétés de l'espérance)**.**
Soient $X$, $Y$ deux variables aléatoires réelles, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u : X(\Omega) \to \mathbb{R}$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Alors :

- $E(u(X)) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i) P(X = x_i)$ (théorème de transfert);
- $E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$;
- Si $X \geqslant 0$, alors $E(X) \geqslant 0$;
- Si $X \geqslant Y$, alors $E(X) \geqslant E(Y)$;
- $E(XY) = \sum_{i,j} x_i y_j P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$.

### 1.2 Variance/Covariance

**Définition 6.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle. On appelle variance de $X$ le réel positif :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$

On appelle écart-type de $X$ le nombre positif :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

**Proposition 3.**
Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors :
$$V(aX+b) = a^2 V(X).$$

**Proposition 4** (Formule de Huygens)**.** *Soit $X$ une variable aléatoire, alors :*
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

**Définition 7.** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires finies. On appelle covariance de $X$ et $Y$, notée $cov(X,Y)$ le réel :
$$cov(X,Y) = E\left(XY\right) - E\left(X\right)E\left(Y\right).$$

On dit que deux variables sont non corrélées si leur covariance est nulle.

Ce réel mesure les variations simultanées des variables aléatoires.

**Remarque.** *On a $cov(X,X) = V(X)$.*

**Proposition 5.**
On a $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$.

## 2 Lois usuelles

### 2.1 Loi uniforme

**Définition 8.** Soit $X$ une variable aléatoire avec $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, les $x_i$ étant supposés distincts. On dit que $X$ suit la loi uniforme si :
$$\forall i \in [\![1,n]\!], P(X = x_i) = \frac{1}{n}.$$

Autrement dit, chacune des valeurs prises par $X$ se réalise avec la même probabilité.

**Proposition 6.**
Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi uniforme avec $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors
$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

L'espérance correspond donc à la moyenne des $x_i$.
Dans le cas où $x_i = i$, on a
$$E(X) = \frac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

### 2.2 Loi de Bernoulli.

**Définition 9.** On considère une expérience aléatoire à deux issues :

- S appelé succès avec une probabilité $p$,
- et E ou $\overline{S}$ appelé échec avec une probabilité $q = 1-p$. Cette situation constitue une épreuve de Bernoulli.

L'exemple classique et le lancer d'une pièce. Si on note considère que le succès est "pile", il n'y a qu'une autre alternative qui est "face". Si la pièce est équilibrée, alors $p = \dfrac{1}{2} = q$.

**Définition 10.** Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 si S est réalisé et 0 sinon. La loi de probabilité de X est appelée loi de Bernoulli.

Ici, on traduit la notion de succès ou échec avec la loi binaire: 0 ou 1.

*Exemples* 6.

*On reprend l'exemple de la pièce, on considère que l'on lance une pièce qui tombe sur face avec une probabilité de* $\frac{2}{3}$*. On note* $X$ *la variable aléatoire valant* 1 *lorsque l'on obtient face,* 0 *sinon.*

*Si on se place dans la situation d'un contrôle qualité, on a alors deux cas possibles : pièce défectueuse ou non. Si on note* $X$ *la variable aléatoire qui prend la valeur* 1 *si la pièce contrôlée est bonne,* 0 *sinon et que l'on considère que les pièces sont défectueuses avec une probabilité de* $\frac{1}{10}$*, quelle loi suit* $X$*?*

*On lance un dé équilibré à six faces, on note X la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient un six, 0 sinon. Quelle loi suit X?*

**Propriété**:

Soit X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p$.

- L'espérance de $X$ est $E(X) = p$.
- La variance de $X$ est : $V(X) = p(1-p)$.
- L'écart-type de $X$ est : $\sigma(X) = \sqrt{(p(1-p))}$.

### 2.3 Loi binomiale

**Définition 11.** On considère une expérience aléatoire à deux issues $S$ ou $\overline{S}$, de probabilités respectives $p$ et $q$. On répète $n$ fois de suite cette expérience de façons indépendantes. On a alors un schéma de Bernoulli.

**Définition 12.** On considère un schéma de Bernoulli de paramètres $n$ et $p$. Soit $X$ la variable aléatoire donnant le nombre de fois où S est réalisée lors de ces $n$ expériences. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

Concrètement : on est dans le cas où on répète une expérience de Bernoulli (deux issues possibles: succès ou échec) et on compte le nombre de fois où on a obtenu un succès.

*Exemple* 7. *On lance trois fois la pièce déséquilibrée qui vaut face avec une probabilité* $\frac{2}{3}$ *et on note* $X$ *le nombre de fois où on obtient face. Alors* $X$ *suit une loi de Bernoulli de paramètres* 3 *et* $\frac{2}{3}$*.*

**Définition 13.** Soit $n$ et $k$ deux entiers naturels avec $0 \leqslant \leqslant n$. $\binom{n}{k}$ donne le nombre de chemins de l'arbre correspondant à $k$ succès lors de $n$ répétitions d'une épreuve de Bernoulli. $\binom{n}{k}$ est appelé coefficient binomial. $\binom{n}{k}$ se lit « k parmi n ».
Convention : $\binom{n}{0} = 1$

**Proposition 7.**
Soit $n$ un entier naturel non nul, pour tout entier naturel $k$ :

- Si $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.
- Si $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (Formule de Pascal)

**interprétation?**

**Théorème 8.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p$ un réel de l'intervalle $[0;1]$. Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$. Pour tout entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

**Remarque:** Si on considère $A_k$ l'évènement "obtenir exactement $k$ succès au cours des $n$ répétitions. Alors la famille $(A_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est un système complet d'évènements (les évènements sont incompatibles et leur réunion est égal à l'univers tout entier car tous les cas sont couverts). Que vaut $P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)$?

**Théorème 9.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p$ un réel de l'intervalle $[0;1]$. Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

- l'espérance de X est : $E(X) = np$,
- la variance de X est : $V(X) = np(1-p)$,
- l'écart-type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

## 3 Couple de variables aléatoires

### 3.1 Loi conjointe

**Définition 14.** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires sur $\Omega$ avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_m\}$, alors on définit une probabilité sur $\Omega$ appelée loi conjointe par la donnée $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$

$$p_{ij} = P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$

*Exemple* 8. *Soit $n$ un entier naturel non nul.*

*On donne, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(A), P)$ deux variables aléatoires $X$ et $Y$ prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2,\ p_{ij} = P([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

*Déterminer la valeur du réel $\alpha$.*

**Proposition 10.**

$$\forall i \in [\![1,n]\!], P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij},$$

et

$$\forall j \in [\![1,m]\!], P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij},$$

Autrement dit, on peut retrouver les lois de $X$ et $Y$ à partir des lois conjointes.

**Définition 15.** Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires. Les lois de $X$ et $Y$ sont appelées lois marginales de $Z$.

*Exemple* 9. *On reprend notre exemple précédent, on peut déterminer les lois de $X$ et $Y$ en calculant la somme.*

**Théorème 11** (thm de transfert généralisé)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction, $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réels, alors*

$$E(f(X,Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} f(x,y)P(X = x, Y = y).$$

### 3.2 Variables aléatoires indépendantes

**Définition 16.** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles. On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_m\}$. On dit que les lois de $X$ et de $Y$ sont indépendantes si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$,

$$P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

*Exemple* 10. *$N$ personnes, numérotées de 1 à $N$, choisissent un opérateur téléphonique parmi les 3 existants (numérotés 1 à 3). On note $X_i$ la variable aléatoire correspondant aux nombres de personnes ayant choisi l'opérateur $i$. Les variables aléatoires sont-elles indépendantes?*

**Proposition 12.**
Deux variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes si et seulement si pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les évènements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

**Proposition 13.**
Si les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes, on a $E(XY) = E(X)E(Y)$ et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

**Remarque.** *Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, leur covariance est fausse.*

La réciproque est fausse !

*Exemple* 11. *soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim Y \sim \mathcal{B}(p)$, avec $p \in ]0,1[$. Soit $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Déterminer la loi conjointe de $U$ et $V$ et leur covariance. Sont-elles indépendantes ?*

**Définition 17.** Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires sur un même univers $\Omega$. Les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont dites *mutuellement indépendantes* si :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), \quad P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i).$$

**Remarque.** *Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors, pour tout $(A_1, \ldots, A_n) \subset X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, les événements $(\{X_i \in A_i\})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont mutuellement indépendants.*

**Proposition 14** (Somme de variables aléatoires de Bernoulli)**.**
Soient $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{B}(p)$ mutuellement indépendantes. Alors :

$$X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p).$$

**Proposition 15** (Lemme des coalitions)**.**
Soit, $0 < p < n$ des entiers et $X_1 : \Omega \to E_1, \ldots, X_n : \Omega \to E_n$ des variables aléatoires indépendantes.
Soit $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ et $g : E_{p+1} \times \cdots \times E_n \to G$ deux applications.
Alors les variables aléatoires $f(X_1, \ldots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

## 4 Inégalités utiles

### 4.1 Inégalités de Markov

**Théorème 16.** Soit $X$ une variable aléatoire finie à valeurs positives. Pour tout réel strictement positif $a$, on a

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

*Exemple* 12. *Un boulanger fabrique une certaine quantité de pâtes à pain chaque jour. On suppose que le nombre $X$ de pains fabriqués chaque jour suit une loi d'espérance* 500. *Que peut-on dire de la probabilité pour qu'un jour donné, le boulanger ait fabriqué au moins 600 pains? 400 pains?*

**Remarque.** *Cette inégalité n'a d'intérêt que pour des valeurs du réel a supérieures à $E(X)$.*

### 4.2 Inégalité de Bienaymé-tchébychev

**Théorème 17.** Soit $X$ une variable aléatoire finie. Pour tout réel $a$ strictement positif, on a

$$P\left(|X - E(X)| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$$

*Exemples* 13.

1. *On reprend l'exemple du boulanger, sachant que l'on a aussi un écart-type à 20. Que peut-on dire de la probabilité qu'il ait fabriqué un nb de pains compris entre 400 et 600? entre 450 et 550?*
2. *On joue avec un dé truqué à six faces. Combien faut-il effectuer de lancers pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à* 5% *que la fréquence d'apparition du 1 diffèrera de 1/6 d'au plus 1/100?*