

TD 1: Analyse.

 classique  demande réflexion

1 Calcul de dérivées

Exercice 1.

Dériver les fonctions suivantes en précisant leur domaines de définition et de dérivabilité

- | | |
|---|--|
| <p>1. $f_1 : x \mapsto \sin^2(e^{-x})$</p> <p>2. $f_2 : x \mapsto \tan(\cos x)$</p> <p>3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{1 + \sin^2 x}$</p> <p>4. $f_4 : x \mapsto \frac{1}{1 + \cos^2 x}$</p> <p>5. $f_5 : x \mapsto \frac{1}{1 + x^4}$</p> | <p>6. $f_6 : x \mapsto \cos \sqrt{1 + x^3}$</p> <p>7. $f_7 : x \mapsto \sin(e^{-\sqrt{x^2+1}})$</p> <p>8. $f_8 : x \mapsto e^{(1+\cos x)^4}$</p> <p>9. $f_9 : x \mapsto \frac{1}{(1+x^3)^2}$</p> <p>10. $f_{10} : x \mapsto e^{\cos x}$</p> |
|---|--|

Exercice 2.

Étudier les variations de $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ en précisant son domaine de définition et de dérivabilité.

2 Inégalités

Exercice 3.

1. Déterminer l'ensemble des $t \in \mathbb{R}^*$ tels que $\frac{1}{t} \leq -2$.
2. Déterminer l'ensemble des $t \in \mathbb{R}^*$ tels que $\frac{1}{t} \leq 2t$.

Exercice 4.

1. Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$.

Exercice 5.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1, 1]$.

Exercice 6.

Le produit de deux fonctions croissantes est-il croissant?

Exercice 7.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $ne^{-n/4} < 2$.

Exercice 8.

Soit $a > 0$. Déterminer un majorant et un minorant des fonctions suivantes.

$$f_1 : \begin{cases} [1, 10] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \frac{\ln(t)}{t} \end{cases}$$

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \frac{\sin(t)}{1+t^2} \end{cases}$$

$$f_3 : \begin{cases} [0, 3] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \frac{1-at}{2e^t - 1} \end{cases}$$

3 Intégrales

Exercice 9.

Calculer $\int_1^2 t \ln t \, dt$.

Exercice 10.

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos x \, dx$.

Exercice 11.

Calculer $\int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^3} \, dx$.

Exercice 12.

Calculer $\int_0^2 \frac{x^2}{1+x^3} \, dx$

Exercice 13.

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) e^{\cos(x)} \, dx$.

Exercice 14.

Calculer $\int_1^2 te^{t^2} \, dt$.

Exercice 15.

Calculer $\int_2^3 \frac{dt}{t \ln t}$.

4 Si besoin d'encre un peu d'entraînement

Exercice 16.

Calculer Les dérivées des fonctions suivantes :

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. $x \mapsto \ln(1 + x^2)$ | 9. $x \mapsto \frac{1}{1 + 2 \cos(x)}$ |
| 2. $x \mapsto \cos^3(x)$ | 10. $t \mapsto \ln(t^2 + 3t - 2)$. |
| 3. $x \mapsto \sqrt{1 + \sin^2 x}$ | 11. $t \mapsto (t - 1)^n(t + 1)^n$ |
| 4. $x \mapsto \sin(1 + x^3)$ | 12. $x \mapsto \ln(1 + \cos^2(x))$. |
| 5. $t \mapsto \frac{1}{e^t + 1}$ | 13. $x \mapsto \ln(1 + \sqrt{x})$. |
| 6. $t \mapsto (1 + e^t)^4$. | 14. $t \mapsto e^{\tan(t)}$. |
| 7. $x \mapsto (1 + \cos(x))^n$ | 15. $t \mapsto e^{\sqrt{t}+1}$. |
| 8. $x \mapsto (1 + \sin x)^4$. | 16. $x \mapsto \frac{1}{(1 + \sin x)^2}$. |

Exercice 17.

Étudier les variations des fonctions suivantes

- | | |
|--|--|
| 1. $f_1 : x \mapsto \ln(1 + e^{-x})$. | 3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{1 - \sin x}$ |
| 2. $f_2 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ | 4. $f_4 : x \mapsto e^{\sin(2x)}$ |

Exercice 18.

- Montrer que pour tout $x \leq 0$, $\frac{e^x - x^2}{1 + x^2} \leq 1$.
- Montrer que pour tout $x \geq 2$, $\frac{x^2 - 2}{x - 1} \geq 2$.

Exercice 19.

Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $2x\sqrt{1 - x^2} \in [-1, 1]$.

Exercice 20.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$ puis $\forall x \in [0, 1[$, $e^x \leq \frac{1}{1 - x}$.

Exercice 21.

Soit $a > 0$. Déterminer un majorant et un minorant des fonctions suivantes $f_1 :$

$$\begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \ln(t^2 + 1) + \frac{3t}{a + t^2} \end{cases}$$

$$f_2 : \begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{at^2}{1 + e^t} - \frac{t^2}{a^2} \end{cases}$$

Exercice 22.

Calculer $\int_0^1 (t^2 - t + 1)e^{-t} dt$.

Exercice 23.

Calculer $\int_1^e \frac{\ln x dx}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 24.

Calculer $\int_1^2 \frac{\ln t dt}{t}$.

Exercice 25.

Calculer $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t dt}{\sqrt{1 + t^2}}$.

5 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 26.

Soit $(x, y) \in]-1, 1[^2$, montrer que $\frac{x + y}{1 + xy} \in]-1, 1[$.

Exercice 27.

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{10}$.

Exercice 28. ✨

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer combien de réels vérifient $x^3 - x = a^3 - a$.

Exercice 29.

Soit f et g deux fonctions deux fois dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On pose $h = g \circ f$. Donner une expression de h'' .

Exercice 30.

Déterminer les entiers $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $n^m = m^n$.

Exercice 31.

Soit $n \geq 2$, $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que l'équation $x^n + px + q = 0$ admet au plus deux racines réelles si n est pair, au plus trois racines réelles si n est impair.

Exercice 32. ✨

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall x \in [0, 2[$,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{2 + x}{2 - x}.$$