Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2024-2025
Feuille 2

TD 2: Logique et raisonnement.

---

1 Montrer/utiliser des implications ou des équivalences

Exercice 1.
Montrer, sans calculatrice, que $\sqrt{2} \leqslant \sqrt[3]{3}$.

Exercice 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

Exercice 3.
Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ ab \leqslant \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$.

Exercice 4.

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{Q}$. Montrer que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow b = d$ et $a = c$.

Exercice 5.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $x_1, \ldots, x_n, M$ des réels. Montrer que

$$x_1 + \ldots + x_n > M \Rightarrow \max(x_1, \ldots, x_n) > \frac{M}{n}$$

2 Résoudre des (in)équations

Exercice 6.
Résoudre $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} = 2x$.

Exercice 7.
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\left(\dfrac{2x}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2 < 2x + 9$.

Exercice 8.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x + 1 < \sqrt{x^2 + 8}$.

3 Raisonner par l'absurde

Exercice 9.
Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 10.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On répartit au hasard $n+1$ chaussettes dans n tiroirs. Montrer qu'il existe au moins un tiroir contenant deux chaussettes.

Exercice 11.
Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $rx \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow r = 0$.

Exercice 12.
Soient a et b deux rationnels strictement positifs. On suppose que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont irrationnels. Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est irrationnel.

Exercice 13.
Montrer qu'il n'existe pas d'entier strictement compris entre $\sqrt{n(n+2)}$ et $(n+1)$.

4 Raisonnement par contraposée

Exercice 14.
Soit a et b réels, montrer que

$$a + b \notin \mathbb{Q} \Rightarrow a \notin \mathbb{Q} \text{ ou } b \notin \mathbb{Q}$$

Exercice 15.
Soit f la fonction définie par $f(x) = ax + 1$ avec $a \in \mathbb{R}$. Montrer que si f ne change pas de signe alors $a = 0$.

Exercice 16.
Soit n un entier naturel. Montrer que n^2 impair implique n impair.

5 Raisonner par récurrence

Exercice 17.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $S_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$. Démontrer que l'on a $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 18.
On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$, $v_1 = 3$ et $v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n\left(1 + \dfrac{n}{2}\right)$.

Exercice 19.
On considère la suite définie par $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 1 + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall n \in N, u_n = 1 - \alpha + \alpha 2^n$.

6 Raisonner par analyse/synthèse

Exercice 20.
Déterminer l'ensemble des réels x tels que $x+1=\sqrt{x+3}$.

Exercice 21.
Montrer que toute fonction continue s'écrit comme la somme d'une fonction linéaire $x \mapsto ax$ et d'une fonction dont l'intégrale entre 0 et 1 est nulle.

Exercice 22.
Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'une fonction s'annulant en 0 et d'une fonction constante.

7 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 23.
Montrer, sans calculatrice, que $\dfrac{\sqrt{5}}{2} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Exercice 24.
Montrer que pour tout $a, b > 0$, $\frac{1}{2}(\ln(a)+\ln(b)) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Exercice 25.
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{Q}$. Montrer que $a\ln 2 + b\ln 3 = c\ln 2 + d\ln 3 \Leftrightarrow b=d$ et $a=c$.

Exercice 26.
Soient $(x,y) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $1 \leqslant x \leqslant y$, montrer que

$$\frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant y.$$

Exercice 27.
Soit $f : x \mapsto x^2-2x+2$ montrer que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 1$.
2. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > 8$.

Exercice 28.
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^\star)^2$, résoudre $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{x+a+b}$.

Exercice 29.
Résoudre $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}=2$.

Exercice 30.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x+\sqrt{x^2-5x+4}<2$.

Exercice 31.
Montrer que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 32.
Une classe contient 40 élèves. Montrer qu'il existe au moins quatre élèves nés le même mois.

Exercice 33.
Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $r+x \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 34.
Montrer qu'il n'existe pas d'entiers strictement compris entre $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ et $\sqrt{4n+2}$.

Exercice 35.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + (n-1)\cdot n$. Démontrer que l'on a $S_n = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$.

Exercice 36.
Soit $u_0=2$, $u_1=5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n+3^n$.

Exercice 37.
Montrer que tout polynôme s'écrit comme la somme d'un polynôme s'annulant en 1 et d'un polynôme constant.

8 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 38.
Soient $(x_1,\ldots,x_n)$ des réels appartenant à $[0,1]$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \geqslant 1-(x_1+x_2+\ldots+x_n).$$

Exercice 39.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+4}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Exercice 40.
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \circ f = f \circ g$.

Exercice 41.
Soit n un entier naturel non nul. Montrer que si $n=4m$ avec m un nombre premier impair, alors il s'écrit comme la différence de deux carrés de même parité.

Memo

- Comment montrer une propriété?
  - Utiliser un raisonnement direct
  - Raisonner par équivalence
  - Raisonner par l'absurde
  - Raisonner par analyse/synthèse
- Comment montrer une implication ?
  - Utiliser un raisonnement direct
  - Raisonner par l'absurde
  - Raisonner par contraposée
- Comment montrer une équivalence?
  - Raisonner par équivalence
  - Raisonner par double implication
- Comment montrer une propriété valable pour tout entier?
  - Faire une récurrence
  - Utiliser un raisonnement direct

Indications du TD 2

1 Raisonner par équivalence

2 Raisonner par équivalence.

3 Raisonner par équivalence.

4 Raisonner par double implication et utiliser le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

5 Remarquer que $x_i \leqslant \max(x_1, \ldots, x_n)$.

6 Majorer le membre de gauche et montrer que ce majorant est strictement inférieur à $2x$.

7 Poser $y = \sqrt{2x+1}$.

8 Raisonner par équivalence pour $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

9 Raisonner par l'absurde.

10 Raisonner par l'absurde

11 Supposer $r = 0$ puis $r \neq 0$.

12 Utiliser la quantité conjuguée

13 Raisonner par l'absurde puis par équivalence.

14 Énoncer la contraposée.

15 Supposer $a \neq 0$ et trouver deux images de signes opposés.

16 Montrer la contraposée.

17 Raisonner par récurrence sur n.

18 et 19 Raisonner par récurrence forte sur n.

20 Supposer qu'un tel x existe et regarder ce que cela implique, en gardant en tête le fait que x est alors positif.

21 Supposer que c'est le cas et déterminer la valeur de a.

22 Supposer que c'est le cas et déterminer la fonction constante.

23 Raisonner par équivalence

24 Raisonner par équivalence en remarquant que $\dfrac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) = \ln\sqrt{ab}$.

25 Raisonner par double implication et utiliser le fait que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbb{Q}$.

26 Démontrer les inégalités les unes après les autres en utilisant les hypothèses de l'énoncé.

27 Faire apparaître un début d'identité remarquable pour écrire $f(x)$ comme la somme des deux carrés.

28 Raisonner par équivalence.

29 Raisonner par équivalence.

30 Commencer par regarder les conditions sur x pour que l'équation ait un sens.

31 Raisonner par l'absurde.

32 Raisonner par l'absurde.

33 Raisonner par l'absurde.

34 Raisonner par l'absurde puis par équivalence.

35 Raisonner par récurrence sur n.

36 Raisonner par récurrence forte sur n.

37 Supposer que c'est le cas et déterminer le polynôme constant.

38 Raisonner par récurrence sur n.

39 Commencer par conjecturer le sens de monotonie puis récurrence.

40 Supposer qu'une telle fonction f existe et montrer qu'elle vaut Id si elle n'est pas la fonction nulle.

41 Supposer que $4m = a^2 - b^2$ et déterminer les valeurs possibles pour a et b.

Correction du TD n 2

Correction 1 On raisonne par équivalence :

$$\sqrt{2} \leqslant \sqrt[3]{3} \iff \left(\sqrt{2}\right)^6 \leqslant \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 \iff 8 \leqslant 9.$$

La dernière inégalité est vraie. Par équivalence, on en déduit que la première l'est aussi donc $\sqrt{2}$ est bien inférieur à $\sqrt[3]{3}$.

Correction 2 On raisonne par équivalence pour chacune des inégalités :

$$\begin{aligned} & \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}} \\ \iff\ & 2\sqrt{n(n+1)} - 2n \leqslant 1 \text{ car } 2\sqrt{n} > 0 \\ \iff\ & 2\sqrt{n(n+1)} \leqslant 2n+1 \\ \iff\ & 4n(n+1) \leqslant (2n+1)^2 \text{par positivité des deux membres} \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie, on a montré, par équivalence, que

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \\ \iff\ & 1 \leqslant 2n - 2\sqrt{n(n-1)} \text{ car } 2\sqrt{n} > 0 \\ \iff\ & 2\sqrt{n(n-1)} \leqslant 2n-1 \\ \iff\ & 4n(n-1) \leqslant (2n-1)^2 \text{par positivité des deux membres} \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie, on a montré, par équivalence, que

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Remarque. *Dans le chapitre dérivabilité, on montrera que l'on peut montrer cet encadrement en utilisant le théorème des accroissements finis.*

Correction 3 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \iff\ & 2ab \leqslant a^2 + b^2 \\ \iff\ & 0 \leqslant (a-b)^2 \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie, la première l'est aussi donc, par équivalence, on a montré que

$$ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Correction 4 On raisonne par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$On suppose $b = d$ et $a = c$. Il est clair que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$.

$\boxed{\Leftarrow}$Supposons maintenant $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$. On a alors $a - c = (d-b)\sqrt{2}$. Si $b \neq d$, alors $\sqrt{2} = \dfrac{a-c}{d-b} \in \mathbb{Q}$ ce qui est impossible car $\sqrt{2}$ est irrationnel. On a donc $b = d$ ce qui implique $a = c$.

Correction 5 Il suffit de remarquer que pour tout $i \in [\![1, n]\!], x_i \leqslant \max(x_1, \ldots, x_n)$. En sommant ces inégalités pour i allant de 1 à n, on obtient

$$x_1 + \ldots + x_n \leqslant n \max(x_1, \ldots, x_n),$$

donc

$$M < n \max(x_1, \ldots, x_n),$$

et enfin

$$\max(x_1, \ldots, x_n) > \frac{M}{n}$$

en divisant les deux membres par n.

Correction 6 On remarque tout d'abord qu'il faut que x soit supérieur ou égal à 3. On a ensuite $\sqrt{x-2} \leqslant \sqrt{x}$ et $\sqrt{x-3} \leqslant \sqrt{x}$ donc $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} \leqslant 2\sqrt{x}$. Or, $2\sqrt{x} < 2x$ car $x > 1$. On a donc

$$\forall x \in [3, +\infty[, \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} < 2x.$$

On en déduit qu'il n'y a pas de solution réelle.

Correction 7 Il faut $2x + 1 \geqslant 0$ afin que la racine carrée soit bien définie donc $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$. Il faut, de plus, $2x + 1 \neq 1$ donc $x \neq 0$ afin que le dénominateur ne s'annule pas.

On pose $y=\sqrt{2x+1}$, on a donc $x=\dfrac{y^2-1}{2}$. L'inéquation est équivalente à :

$$\left(\frac{y^2-1}{1-y}\right)^2 < y^2+8.$$

On sait que $y\neq 1$ puisque $x\neq 0$, on peut donc simplifier par la fraction par $y-1$. On a donc

$$\left(\frac{y^2-1}{1-y}\right)^2 = \left(\frac{(y-1)(y+1)}{1-y}\right)^2 = (-(y+1))^2=(y+1)^2.$$

on se retrouve alors avec $(y+1)^2<y^2+8$, soit encore, en développant, $2y<7$. En remplaçant y par $\sqrt{2x+1}$, on a donc montré que l'inégalité initiale est équivalente à

$$2\sqrt{1+2x}<7 \text{ et } x\neq 0.$$

On raisonne maintenant par équivalence :

$$2\sqrt{1+2x}<7 \Leftrightarrow \sqrt{1+2x}<\frac{7}{2} \Leftrightarrow 0\leqslant 1+2x<\frac{49}{4} \Leftrightarrow -1<2x<\frac{45}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{45}{8}.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est : $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{45}{8}\right[\setminus\{0\}$.

Correction 8 On remarque tout d'abord que l'inéquation est vérifiée pour tout réel $x<-\dfrac{1}{2}$. Soit donc $x\geqslant -\dfrac{1}{2}$. Les deux membres sont alors positifs et on obtient une inégalité équivalente en élevant au carré :

$$4x^2+4x+1<x^2+8,$$

ce qui est équivalent à $3x^2+4x-7<0$. Les deux racines de ce polynôme sont 1 et $-\dfrac{7}{3}$. Il est donc négatif entre les deux racines c'est-à-dire sur l'intervalle $\left]-\dfrac{7}{3},1\right[$. Comme $-\dfrac{7}{3}<-\dfrac{1}{2}$, on en déduit que l'ensemble des solutions est $]-\infty,1[$.

Correction 9 On suppose par l'absurde que $\sqrt{3}$ est rationnel, alors il existe p et q entiers, $q\neq 0$ tels que $\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}$. On suppose que la fraction est irréductible et on élève au carré, on obtient $3q^2=p^2$ donc p est divisible par 3. Par suite, p^2 est divisible par 9 donc $3q^2$ aussi ce qui impose que 3 divise q. On obtient une contradiction car on avait supposé la fraction irréductible. On a montré, par l'absurde, que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Correction 10 On suppose par l'absurde que chaque tiroir contient au plus une chaussette. Alors le nombre de chaussettes est inférieur ou égal à 1 fois le nombre de tiroirs c'est-à-dire n. On obtient une contradiction donc il existe au moins un tiroir contenant deux chaussettes.

Correction 11 Si $r=0$, alors $rx\in\mathbb{Q}$.
Si $r\neq 0$, montrons que $rx\notin\mathbb{Q}$. On suppose par l'absurde que rx est rationnel. Alors $x=\dfrac{rx}{r}\in\mathbb{Q}$ ce qui est une contradiction. On en déduit que $rx\notin\mathbb{Q}$.

On a montré une implication et sa contraposée d'où l'équivalence.

Correction 12 On suppose par l'absurde que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est rationnel. Alors, comme $a-b$ est rationnel, on a

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

donc $\sqrt{a}-\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ en tant que quotient de deux rationnels. On écrit :

$$2\sqrt{a}=\underbrace{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}_{\in\mathbb{Q}}+\underbrace{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}_{\in\mathbb{Q}},$$

donc $2\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$, ce qui est absurde car $\sqrt{a}\notin\mathbb{Q}$ d'après l'énoncé. On a donc montré que $\sqrt{a}+\sqrt{b}\notin\mathbb{Q}$.

Correction 13 On suppose, par l'absurde, qu'il existe un entier, notons-le r, strictement compris entre $\sqrt{n(n+2)}$ et $(n+1)$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{ll} & \sqrt{n(n+2)}<r<(n+1) \\ \Leftrightarrow & n(n+2)<r^2<(n+1)^2 \text{par positivité des quantités} \\ \Leftrightarrow & n^2+2n<r^2<n^2+2n+1 \end{array}$$

La dernière ligne est absurde car un entier r^2 ne peut être compris strictement entre deux entiers consécutifs. On en déduit qu'il n'existe pas d'entier strictement compris entre $\sqrt{n(n+2)}$ et $(n+1)$.

Correction 14 La contraposée de cette assertion est

$$a\in\mathbb{Q} \text{ et } b\in\mathbb{Q}\Rightarrow a+b\in\mathbb{Q}$$

ce qui est vrai. On en déduit que cette implication est vraie.

Correction 15 On va montrer la contraposée : si $a\neq 0$, alors, f change de signe. On suppose donc $a\neq 0$, alors

$$f(0)=1>0 \text{ et } f\left(-\frac{2}{a}\right)=-1<0$$

donc f change de signe.

On peut aussi tracer le tableau de variations (selon le signe de a) et en déduire que f change de signe.

Correction 16 On raisonne par contraposée. On suppose donc n pair et nous allons montrer que n^2 est pair. On écrit $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

donc n^2 est pair. Par contraposée, on a montré que n^2 impair implique n impair.

Correction 17 On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$, la somme vaut 1, la formule est donc valide. On suppose que la formule est vraie au rang n, montrons qu'elle l'est aussi au rang $n+1$, c'est-à-dire que

$$S_{n+1} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

On a

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(n+1)^2\left(n^2+4(n+1)\right)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

La formule est vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Correction 18 On raisonne par récurrence forte sur n. La formule est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. On suppose qu'elle est vraie pour $k \leqslant n+1$ et nous allons montrer qu'elle est vraie au rang $n+2$:

$$v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n = 4.2^{n+1}\left(1 + \frac{n+1}{2}\right) - 4.2^n\left(1 + \frac{n}{2}\right),$$

par hypothèse de récurrence. On a donc

$$v_{n+2} = 2^{n+2}\left(2\left(1+\frac{n+1}{2}\right) - \left(1+\frac{n}{2}\right)\right) = 2^{n+2}\left(n+2-\frac{n}{2}\right),$$

d'où

$$v_{n+2} = 2^{n+2}\left(1 + \frac{n+2}{2}\right).$$

Par le principe de récurrence, la formule est vérifiée pour tout entier n.

Correction 19 On raisonne par récurrence forte sur n. Le résultat est vrai aux rangs 0 et 1. On suppose que c'est vrai aux rang n et $n+1$ et nous allons montrer que c'est vrai au rang $n+2$.

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\ &= 3\left(1-\alpha+\alpha 2^{n+1}\right) - 2\left(1-\alpha+\alpha 2^n\right) \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence. On a donc :

$$u_{n+2} = 1 - \alpha + \alpha\left(3.2^{n+1} - 2.2^n\right) = 1 - \alpha + \alpha 2^{n+2}.$$

La formule est vraie au rang $n+2$. Par le principe de récurrence forte, elle est vraie pour tout entier n.

Correction 20 Si un tel x existe, on a $(x+1)^2 = x+3$ donc $x^2+x-2=0$ ce qui implique $x = 1$ ou $x = -2$. Comme $x = -2$ ne vérifie pas $x+1 \geqslant 0$, il ne peut être solution. L'unique solution est donc $x = 1$.

Correction 21

Analyse :On se donne une fonction continue f et on suppose qu'il existe un réel a et une fonction g vérifiant $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + g(x).$$

Intégrons cette égalité entre 0 et 1, on obtient :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (at + g(t))\,\mathrm{d}t,$$

soit encore :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a}{2} + \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme on a supposé que l'intégrale de g entre 0 et 1 est nulle, on obtient :

$$\frac{a}{2} = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où :

$$a = 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Synthèse :Soit maintenant f une fonction continue. On pose $a = 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ puis $g = x \mapsto f(x) - ax$ et $h : x \mapsto ax$. On doit vérifier que :

- $f = g + h$,
- h est une fonction linéaire,
- g est d'intégrale nulle.

Les deux premiers points sont clairs. Vérifions le dernier point. On a :

$$\int_0^1 (f(t) - at)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{a}{2} = 0.$$

Cette fonction est bien d'intégrale nulle entre 0 et 1.

Par analyse/synthèse, on a montré que toute fonction continue f est la somme d'une fonction linéaire et d'une fonction dont l'intégrale entre 0 et 1 est nulle.

Remarque. *En fait, on a non seulement montré l'existence de ces deux fonctions, mais également leur unicité, puisque a est nécessairement égal à $2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ donc h est unique et, par suite, g aussi.*

Correction 22

Analyse :Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux fonctions g et h telles que $g(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} f(0) &= g(0) + h(0) \\ &= \alpha \text{ car } g(0) = 0 \end{aligned}$$

On a donc $\alpha = f(0)$.

Synthèse :Soit maintenant f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Posons h la fonction constante égale à $f(0)$ et g la fonction $f - h$. On doit vérifier que :

- $f = g + h$,
- h est constante,
- g s'annule en 0.

Les deux premiers points sont clairs. Pour le dernier point, on écrit

$$g(0) = f(0) - h(0) = f(0) - f(0) = 0,$$

le dernier point est donc également vérifié. Par analyse/synthèse, on a montré que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'une fonction s'annulant en 0 et d'une fonction constante.

Remarque. *Au cours de la phase d'analyse, on a montré que si g et h existent, elles sont uniques. Ainsi, on a montré que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit, de manière unique, comme la somme d'une fonction s'annulant en 0 et d'une fonction constante.*

Correction 23 On raisonne par équivalence :

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \iff \sqrt{5}\sqrt{3} \leqslant 4 \iff 15 \leqslant 16.$$

La dernière inégalité est vraie. Par équivalence, on en déduit que la première l'est aussi donc $\frac{\sqrt{5}}{2}$ est bien inférieure à $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Correction 24 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leqslant \ln\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \\ \iff\ & \ln\sqrt{ab} \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \iff\ & \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \text{par croissance de } \ln \\ \iff\ & 2\sqrt{a}\sqrt{b} \leqslant a + b \\ \iff\ & 0 \leqslant \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant toujours vraie, on a montré, par équivalence, l'inégalité souhaitée.

Correction 25 On raisonne par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$On suppose $b = d$ et $a = c$. Il est clair que $a\ln 2 + b\ln 3 = c\ln 2 + d\ln 3$.

$\boxed{\Leftarrow}$Supposons maintenant $a\ln 2 + b\ln 3 = c\ln 2 + d\ln 3$. On a alors :

$$(a - c)\ln 2 = (d - b)\ln 3.$$

Si $b \neq d$, alors $\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{a-c}{d-b} \in \mathbb{Q}$ ce qui est impossible car $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel d'après l'exercice 31. On a donc $b = d$ ce qui implique $a = c$.

Correction 26 On a $x \leqslant y$ donc :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} \geqslant \frac{2x}{xy} = \frac{2}{y}.$$

Cela démontre la première inégalité.

On remarque que $\frac{1}{x} \leqslant 1$ et $\frac{1}{y} \leqslant 1$ donc $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \leqslant 1$.

Comme $\sqrt{xy} \geqslant 1$, on a la deuxième inégalité.

Pour montrer $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$, on raisonne par équivalence:

$$\begin{array}{ll} & \sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2} \\ \Leftrightarrow & xy \leqslant \dfrac{(x+y)^2}{4} \text{ par positivité des deux membres} \\ \Leftrightarrow & 4xy \leqslant x^2+2xy+y^2 \\ \Leftrightarrow & 0 \leqslant x^2-2xy+y^2 \\ \Leftrightarrow & 0 \leqslant (x-y)^2. \end{array}$$

La dernière inégalité est toujours vraie, ce qui montre que :

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

Enfin, la dernière inégalité est claire puisque $x \leqslant y$.

Correction 27 1. On écrit $f(x) = (x-1)^2 + 1$, on a alors $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \geqslant 0$ ce qui implique $f(x) \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}$. On peut aussi, mais c'est plus long, faire une étude de la fonction f. Son tableau de variations montrera qu'elle admet un minimum en $x = 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant f(1) = 1$.

2. Il suffit d'exhiber un élément vérifiant cette inégalité. Pour $x = 4$, on a $f(4) = 9 > 8$ donc un tel élément existe.

Correction 28 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b} \quad & \Leftrightarrow ab+xb+xa = \frac{axb}{x+a+b} \\ & \Leftrightarrow (ab+x(a+b))\,(x+a+b) = axb \\ & \Leftrightarrow (a+b)x^2+(a+b)^2x+ab(a+b) = 0 \\ & \Leftrightarrow (a+b) = 0 \text{ ou } x^2+(a+b)x+ab = 0. \end{aligned}$$

• Si $a+b=0$, l'équation est vraie pour tout x réel non nul.
• Si $a+b \neq 0$, alors les deux racines de $x^2+(a+b)x+ab = 0$ sont $-a$ et $-b$ donc ce sont les deux seules solutions de l'équation.

Correction 29 On remarque tout d'abord que x doit être supérieur ou égal à 2. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2} = 2 \quad & \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = \sqrt{x-2}+2 \\ & \Leftrightarrow 2x+3 = 4+4\sqrt{x-2}+x-2 \\ & \Leftrightarrow x+1 = 4\sqrt{x-2} \\ & \Leftrightarrow (x+1)^2 = \left(4\sqrt{x-2}\right)^2 \text{ par positivité des quantités car } x \geqslant 2 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow x^2-14x+33 = 0.$

Le discriminant vaut $\Delta = 64$, les racines sont 3 et 11. Les deux racines sont bien supérieures à 2, elles sont donc solutions de l'équation initiale.

Correction 30 On remarque tout d'abord que le polynôme sous la racine, qui vaut $(x-1)(x-4)$ doit être positif. Cela implique $x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 4$. De plus, $2-x$ doit également être positif (car plus grand qu'une racine carrée) donc finalement, $x \leqslant 1$.

On raisonne maintenant par équivalence :

$$\sqrt{x^2-5x+4} < 2-x \Leftrightarrow x^2-5x+4 < (2-x)^2 \Leftrightarrow x > 0.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $]0,1]$.

Correction 31 On pose $\alpha = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$. On suppose par l'absurde que α est rationnel, alors il existe p et q entiers, $q \neq 0$ tels que $\alpha = \dfrac{p}{q}$. Comme α est positif, on peut supposer que p et q sont strictement positifs. On a :

$$\alpha = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p\ln(3) = q\ln(2) \Leftrightarrow \ln(3^p) = \ln(2^q) \Leftrightarrow 3^p = 2^q.$$

3^p est impair alors que 2^q est pair, on a donc une contradiction. Par l'absurde, on a montré :

$$\frac{\ln(2)}{\ln(3)} \notin \mathbb{Q}.$$

Correction 32 On suppose par l'absurde qu'il n'existe pas quatre élèves nés le même mois. Il y a alors au plus trois élèves nés chaque moi donc le nombre d'élèves est inférieur ou égal à 3 fois le nombre de mois c'est-à-dire 36. On obtient une contradiction donc il existe au moins quatre élèves nés le même mois.

Correction 33 On suppose par l'absurde que $r+x$ est rationnel. Alors, comme $-r$ est rationnel, on a $x = (r+x)+(-r) \in \mathbb{Q}$ ce qui est une contradiction. On en déduit que $r+x \notin \mathbb{Q}$.

Correction 34 On suppose, par l'absurde, qu'il existe un tel entier m. On a alors

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leqslant m \leqslant \sqrt{4n+2}.$$

On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{ll} & \sqrt{n}+\sqrt{n+1} < m < \sqrt{4n+2} \\ \Leftrightarrow & n+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+n+1 < m^2 < 4n+2 \text{par positivité des quantités} \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{n(n+1)} < m-2n-1 < 2n+1 \\ \Leftrightarrow & 4n(n+1) < (m-2n-1)^2 < 4n^2+4n+1 \end{array}$$

On obtient une contradiction car $(m-2n-1)^2$ est un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs. On a montré qu'il n'existe pas d'entiers strictement compris entre $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ et $\sqrt{4n+2}$.

Correction 35 Pour $n=1$, la somme est nulle, la formule est donc valide. On suppose que la formule est vraie au rang n, montrons qu'elle l'est aussi au rang $n+1$. On a

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + n(n+1) \\
&= \frac{1}{3}n(n-1)(n+1) + n(n+1) \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= n(n+1)\left(\frac{1}{3}(n-1)+1\right) \\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).
\end{aligned}
$$

La formule est vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Correction 36 On raisonne par récurrence forte sur n. On a $u_0 = 2 = 2^0 + 3^0$ et $u_1 = 5 = 2^1 + 3^1$ donc la formule est vraie aux rangs 1 et 2. On suppose le résultat vrai aux rangs n et $n+1$ et on montre qu'il est vrai au rang $n+2$.

On sait que :

$$
\begin{aligned}
u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \\
&= 5\left(2^{n+1} + 3^{n+1}\right) - 6\left(2^n + 3^n\right) \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= 4.2^n + 9.3^n \\
&= 2^{n+2} + 3^{n+2}
\end{aligned}
$$

Le résultat est vrai au rang $n+2$. Par le principe de récurrence forte, il est vrai pour tout entier n.

Correction 37

Analyse :Soit P un polynôme. On suppose qu'il existe P_1 et P_2 deux polynômes tels que $P = P_1 + P_2$ avec $P_1(1) = 0$ et $P_2 = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors

$$
\begin{aligned}
P(1) &= P_1(1) + P_2(1) \\
&= \lambda \text{ car } P_1(1) = 0
\end{aligned}
$$

On a donc $\lambda = P(1)$.

Synthèse :Soit P un polynôme. On pose $P_2 = P - P(1)$ et P_1 le polynôme constant égal à $P(1)$. On doit vérifier que

- $P = P_1 + P_2$,
- $P_1(1) = 0$,
- P_2 est constant.

Le premier et le dernier point sont clairs. Pour le deuxième point, on a $P_2(1) = P(1) - P(1) = 0$ donc les trois points sont vérifiés. Par analyse/synthèse, on a montré que tout polynôme s'écrit comme la somme d'un polynôme s'annulant en 1 et d'un polynôme constant.

Remarque. *Comme dans les exercices précédents, on a l'unicité de ces deux polynômes d'après la phase d'analyse.*

Correction 38 On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on a $1 - x_1 \geqslant 1 - x_1$ et la formule est vraie au rang 1.
On suppose le résultat vrai au rang n, montrons qu'il est vrai au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on a :

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \geqslant 1 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

On multiplie par $1 - x_{n+1}$. Comme cette quantité est positive puisque x_{n+1} appartient à $[0,1]$, on ne change pas le sens de l'inégalité. On a donc :

$$(1-x_{n+1})(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \geqslant (1-x_{n+1})\left(1-(x_1+x_2+\ldots+x_n)\right).$$

On a :

$$(1-x_{n+1})(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) = (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)(1-x_{n+1}),$$

et

$$
\begin{aligned}
& (1-x_{n+1})\left(1-(x_1+x_2+\ldots+x_n)\right) \\
= \; & 1 - x_{n+1} - (x_1+x_2+\ldots+x_n) + x_{n+1}(x_1+x_2+\ldots+x_n).
\end{aligned}
$$

Comme les x_i sont positifs, on a :

$$x_{n+1}(x_1+x_2+\ldots+x_n) \geqslant 0,$$

donc

$$(1-x_{n+1})\left(1-(x_1+x_2+\ldots+x_n)\right) \geqslant 1 - x_{n+1} - (x_1+x_2+\ldots+x_n).$$

Comme

$$-x_{n+1} - (x_1+x_2+\ldots+x_n) = -\left(x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1}\right),$$

on a montré que l'inégalité est vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Correction 39 On commence par conjecturer le sens de monotonie. On a $u_1 = 2$ donc elle a l'air croissante. Montrons, par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} \geqslant u_n$$

Le résultat est vrai au rang 0, la propriété est donc initialisée. On suppose qu'elle est vrai pour un certain entier n. On a $u_{n+1} \geqslant u_n$ donc, par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{4+x}$, on a

$$\sqrt{4+u_{n+1}} \geqslant \sqrt{4+u_n},$$

c'est-à-dire

$$u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$$

La propriété est donc héréditaire. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Correction 40 On suppose qu'il existe une telle fonction.

- Si f n'est pas la fonction nulle, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 0$.

- Si $f(a) \neq a$, on peut poser $g : x \mapsto \dfrac{x - f(a)}{a - f(a)}.a$. On a alors $g(f(a)) = 0$ et $f(g(a)) = f(a) \neq 0$ ce qui est une contradiction.

- Si $f(a) = a$, alors en prenant $g : x \mapsto \dfrac{x}{a}$, on a $g(a) = 1 = g(f(a))$ donc $f(1) = 1$. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$, alors en considérant la fonction $t \mapsto xt$, on obtient $f(x) = f(g(1)) = g(f(1)) = g(1) = x$. Ainsi, f est la fonction identité.

On a montré que si une telle fonction existe, elle est la fonction nulle ou la fonction identité. On remarque que la fonction nulle ne vérifie pas cette propriété (en prenant pour g une fonction qui ne s'annule pas en 0 par exemple). En revanche, la fonction identité vérifie cette propriété, c'est donc la seule qui vérifie cette propriété.

Correction 41
<u>Analyse</u> :Soit $m \in \mathbb{N}$ impair tel que $n = 4m$. On suppose qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que $4m = a^2 - b^2$. Alors $4m = (a-b)(a+b)$. Comme a et b sont de même parité, leur différence est paire. Comme m est premier, on a nécessairement $a - b = 2, 4, 2m$ ou $4m$. Si $a - b = 4m$, $a + b = 1$ ce qui implique $b = 0$ donc $a = 1$ ce qui est impossible. Si $a - b = 2m$, $a + b = 2$ ce qui implique $a = b = 1$ puisqu'ils ont même parité. à nouveau, cela est impossible. Si $a - b = 4$, alors $a + b = m$ ce qui implique m pair puisque a et b ont même parité. Comme on a supposé m impair, ce cas-là est impossible. On a donc $a - b = 2$ donc $a + b = 2m$. On en déduit que $2a = (a - b) + (a + b) = 2m + 2$ et $2b = (a + b) - (a - b) = 2m - 2$ donc $a = m + 1$ et $b = m - 1$.

<u>Synthèse</u> :Soit $m \in \mathbb{N}$ impair. On vérifie que $(m+1)^2 - (m-1)^2 = 4m$ et les entiers $m + 1$ et $m - 1$ ont même parité. On a montré, par analyse/synthèse, que n s'écrit comme la différence de deux carrés de même parité.