Correction du TD n 2

Correction 1 On raisonne par équivalence :

$$\sqrt{2} \leqslant \sqrt[3]{3} \;\Leftrightarrow\; \left(\sqrt{2}\right)^6 \leqslant \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 \;\Leftrightarrow\; 8 \leqslant 9.$$

La dernière inégalité est vraie. Par équivalence, on en déduit que la première l'est aussi donc $\sqrt{2}$ est bien inférieur à $\sqrt[3]{3}$.

Correction 2 On raisonne par équivalence pour chacune des inégalités :

$$\begin{array}{ll} & \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{n(n+1)} - 2n \leqslant 1 \text{ car } 2\sqrt{n} > 0 \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{n(n+1)} \leqslant 2n+1 \\ \Leftrightarrow & 4n(n+1) \leqslant (2n+1)^2 \text{par positivité des deux membres} \end{array}$$

La dernière inégalité étant vraie, on a montré, par équivalence, que

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

De même, on a :

$$\begin{array}{ll} & \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \\ \Leftrightarrow & 1 \leqslant 2n - 2\sqrt{n(n-1)} \text{ car } 2\sqrt{n} > 0 \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{n(n-1)} \leqslant 2n-1 \\ \Leftrightarrow & 4n(n-1) \leqslant (2n-1)^2 \text{par positivité des deux membres} \end{array}$$

La dernière inégalité étant vraie, on a montré, par équivalence, que

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Remarque. *Dans le chapitre dérivabilité, on montrera que l'on peut montrer cet encadrement en utilisant le théorème des accroissements finis.*

Correction 3 On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{rl} ab \leqslant \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2} \Leftrightarrow & 2ab \leqslant a^2 + b^2 \\ \Leftrightarrow & 0 \leqslant (a-b)^2 \end{array}$$

La dernière inégalité étant vraie, la première l'est aussi donc, par équivalence, on a montré que

$$ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Correction 4 On raisonne par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$On suppose $b = d$ et $a = c$. Il est clair que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$.

$\boxed{\Leftarrow}$Supposons maintenant $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$. On a alors $a - c = (d-b)\sqrt{2}$. Si $b \neq d$, alors $\sqrt{2} = \dfrac{a-c}{d-b} \in \mathbb{Q}$ ce qui est impossible car $\sqrt{2}$ est irrationnel. On a donc $b = d$ ce qui implique $a = c$.

Correction 5 Il suffit de remarquer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \leqslant \max(x_1, \ldots, x_n)$. En sommant ces inégalités pour i allant de 1 à n, on obtient

$$x_1 + \ldots + x_n \leqslant n \max(x_1, \ldots, x_n),$$

donc

$$M < n \max(x_1, \ldots, x_n),$$

et enfin

$$\max(x_1, \ldots, x_n) > \frac{M}{n}$$

en divisant les deux membres par n.

Correction 6 On remarque tout d'abord qu'il faut que x soit supérieur ou égal à 3. On a ensuite $\sqrt{x-2} \leqslant \sqrt{x}$ et $\sqrt{x-3} \leqslant \sqrt{x}$ donc $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} \leqslant 2\sqrt{x}$. Or, $2\sqrt{x} < 2x$ car $x > 1$. On a donc

$$\forall x \in [3, +\infty[, \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} < 2x.$$

On en déduit qu'il n'y a pas de solution réelle.

Correction 7 Il faut $2x + 1 \geqslant 0$ afin que la racine carrée soit bien définie donc $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$. Il faut, de plus, $2x + 1 \neq 1$ donc $x \neq 0$ afin que le dénominateur ne s'annule pas.

On pose $y = \sqrt{2x+1}$, on a donc $x = \dfrac{y^2-1}{2}$. L'inéquation est équivalente à :

$$\left(\frac{y^2-1}{1-y}\right)^2 < y^2+8.$$

On sait que $y \neq 1$ puisque $x \neq 0$, on peut donc simplifier par la fraction par $y-1$. On a donc

$$\left(\frac{y^2-1}{1-y}\right)^2 = \left(\frac{(y-1)(y+1)}{1-y}\right)^2 = (-(y+1))^2 = (y+1)^2.$$

on se retrouve alors avec $(y+1)^2 < y^2+8$, soit encore, en développant, $2y < 7$. En remplaçant y par $\sqrt{2x+1}$, on a donc montré que l'inégalité initiale est équivalente à

$$2\sqrt{1+2x} < 7 \text{ et } x \neq 0.$$

On raisonne maintenant par équivalence :

$$2\sqrt{1+2x} < 7 \Leftrightarrow \sqrt{1+2x} < \frac{7}{2} \Leftrightarrow 0 \leqslant 1+2x < \frac{49}{4} \Leftrightarrow -1 < 2x < \frac{45}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{45}{8}.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est : $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{45}{8}\right[\setminus \{0\}$.

Correction 8 On remarque tout d'abord que l'inéquation est vérifiée pour tout réel $x < -\dfrac{1}{2}$. Soit donc $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$. Les deux membres sont alors positifs et on obtient une inégalité équivalente en élevant au carré :

$$4x^2+4x+1 < x^2+8,$$

ce qui est équivalent à $3x^2+4x-7 < 0$. Les deux racines de ce polynôme sont 1 et $-\dfrac{7}{3}$. Il est donc négatif entre les deux racines c'est-à-dire sur l'intervalle $\left]-\dfrac{7}{3}, 1\right[$. Comme $-\dfrac{7}{3} < -\dfrac{1}{2}$, on en déduit que l'ensemble des solutions est $]-\infty, 1[$.

Correction 9 On suppose par l'absurde que $\sqrt{3}$ est rationnel, alors il existe p et q entiers, $q \neq 0$ tels que $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$. On suppose que la fraction est irréductible et on élève au carré, on obtient $3q^2 = p^2$ donc p est divisible par 3. Par suite, p^2 est divisible par 9 donc $3q^2$ aussi ce qui impose que 3 divise q. On obtient une contradiction car on avait supposé la fraction irréductible. On a montré, par l'absurde, que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Correction 10 On suppose par l'absurde que chaque tiroir contient au plus une chaussette. Alors le nombre de chaussettes est inférieur ou égal à 1 fois le nombre de tiroirs c'est-à-dire n. On obtient une contradiction donc il existe au moins un tiroir contenant deux chaussettes.

Correction 11 Si $r = 0$, alors $rx \in \mathbb{Q}$.
Si $r \neq 0$, montrons que $rx \notin \mathbb{Q}$. On suppose par l'absurde que rx est rationnel. Alors $x = \dfrac{rx}{r} \in \mathbb{Q}$ ce qui est une contradiction. On en déduit que $rx \notin \mathbb{Q}$.

On a montré une implication et sa contraposée d'où l'équivalence.

Correction 12 On suppose par l'absurde que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est rationnel. Alors, comme $a-b$ est rationnel, on a

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

donc $\sqrt{a}-\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ en tant que quotient de deux rationnels. On écrit :

$$2\sqrt{a} = \underbrace{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}_{\in\mathbb{Q}},$$

donc $2\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde car $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$ d'après l'énoncé. On a donc montré que $\sqrt{a}+\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$.

Correction 13 On suppose, par l'absurde, qu'il existe un entier, notons-le r, strictement compris entre $\sqrt{n(n+2)}$ et $(n+1)$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{cl} & \sqrt{n(n+2)} < r < (n+1) \\ \Leftrightarrow & n(n+2) < r^2 < (n+1)^2 \text{par positivité des quantités} \\ \Leftrightarrow & n^2+2n < r^2 < n^2+2n+1 \end{array}$$

La dernière ligne est absurde car un entier r^2 ne peut être compris strictement entre deux entiers consécutifs. On en déduit qu'il n'existe pas d'entier strictement compris entre $\sqrt{n(n+2)}$ et $(n+1)$.

Correction 14 La contraposée de cette assertion est

$$a \in \mathbb{Q} \text{ et } b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a+b \in \mathbb{Q}$$

ce qui est vrai. On en déduit que cette implication est vraie.

Correction 15 On va montrer la contraposée : si $a \neq 0$, alors, f change de signe. On suppose donc $a \neq 0$, alors

$$f(0) = 1 > 0 \text{ et } f\left(-\frac{2}{a}\right) = -1 < 0$$

donc f change de signe.

On peut aussi tracer le tableau de variations (selon le signe de a) et en déduire que f change de signe.

Correction 16 On raisonne par contraposée. On suppose donc n pair et nous allons montrer que n^2 est pair. On écrit $n=2k$ avec $k\in\mathbb{N}$. On a :

$$n^2=4k^2=2(2k^2)$$

donc n^2 est pair. Par contraposée, on a montré que n^2 impair implique n impair.

Correction 17 On raisonne par récurrence sur n. Pour $n=1$, la somme vaut 1, la formule est donc valide. On suppose que la formule est vraie au rang n, montrons qu'elle l'est aussi au rang $n+1$, c'est-à-dire que

$$S_{n+1}=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

On a

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n+(n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3 \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(n+1)^2\left(n^2+4(n+1)\right)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

La formule est vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Correction 18 On raisonne par récurrence forte sur n. La formule est vraie pour $n=0$ et $n=1$. On suppose qu'elle est vraie pour $k\leqslant n+1$ et nous allons montrer qu'elle est vraie au rang $n+2$:

$$v_{n+2}=4v_{n+1}-4v_n=4.2^{n+1}\left(1+\frac{n+1}{2}\right)-4.2^n\left(1+\frac{n}{2}\right),$$

par hypothèse de récurrence. On a donc

$$v_{n+2}=2^{n+2}\left(2\left(1+\frac{n+1}{2}\right)-\left(1+\frac{n}{2}\right)\right)=2^{n+2}\left(n+2-\frac{n}{2}\right),$$

d'où

$$v_{n+2}=2^{n+2}\left(1+\frac{n+2}{2}\right).$$

Par le principe de récurrence, la formule est vérifiée pour tout entier n.

Correction 19 On raisonne par récurrence forte sur n. Le résultat est vrai aux rangs 0 et 1. On suppose que c'est vrai aux rang n et $n+1$ et nous allons montrer que c'est vrai au rang $n+2$.

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1}-2u_n \\ &= 3\left(1-\alpha+\alpha 2^{n+1}\right)-2\left(1-\alpha+\alpha 2^n\right) \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence. On a donc :

$$u_{n+2}=1-\alpha+\alpha\left(3.2^{n+1}-2.2^n\right)=1-\alpha+\alpha 2^{n+2}.$$

La formule est vraie au rang $n+2$. Par le principe de récurrence forte, elle est vraie pour tout entier n.

Correction 20 Si un tel x existe, on a $(x+1)^2=x+3$ donc $x^2+x-2=0$ ce qui implique $x=1$ ou $x=-2$. Comme $x=-2$ ne vérifie pas $x+1\geqslant 0$, il ne peut être solution. L'unique solution est donc $x=1$.

Correction 21

Analyse :On se donne une fonction continue f et on suppose qu'il existe un réel a et une fonction g vérifiant $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t=0$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=ax+g(x).$$

Intégrons cette égalité entre 0 et 1, on obtient :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 (at+g(t))\,\mathrm{d}t,$$

soit encore :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{a}{2}+\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme on a supposé que l'intégrale de g entre 0 et 1 est nulle, on obtient :

$$\frac{a}{2}=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t,$$

d'où :

$$a=2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Synthèse :Soit maintenant f une fonction continue. On pose $a=2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ puis $g=x\mapsto f(x)-ax$ et $h:x\mapsto ax$. On doit vérifier que :

- $f = g + h$,
- h est une fonction linéaire,
- g est d'intégrale nulle.

Les deux premiers points sont clairs. Vérifions le dernier point. On a :

$$\int_0^1 (f(t) - at)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{a}{2} = 0.$$

Cette fonction est bien d'intégrale nulle entre 0 et 1.

Par analyse/synthèse, on a montré que toute fonction continue f est la somme d'une fonction linéaire et d'une fonction dont l'intégrale entre 0 et 1 est nulle.

Remarque. *En fait, on a non seulement montré l'existence de ces deux fonctions, mais également leur unicité, puisque a est nécessairement égal à* $2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ *donc h est unique et, par suite, g aussi.*

Correction 22

Analyse :Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux fonctions g et h telles que $g(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} f(0) \quad &= g(0) + h(0) \\ &= \alpha \text{ car } g(0) = 0 \end{aligned}$$

On a donc $\alpha = f(0)$.

Synthèse :Soit maintenant f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Posons h la fonction constante égale à $f(0)$ et g la fonction $f - h$. On doit vérifier que :

- $f = g + h$,
- h est constante,
- g s'annule en 0.

Les deux premiers points sont clairs. Pour le dernier point, on écrit

$$g(0) = f(0) - h(0) = f(0) - f(0) = 0,$$

le dernier point est donc également vérifié. Par analyse/synthèse, on a montré que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'une fonction s'annulant en 0 et d'une fonction constante.

Remarque. *Au cours de la phase d'analyse, on a montré que si g et h existent, elles sont uniques. Ainsi, on a montré que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit, de manière unique, comme la somme d'une fonction s'annulant en 0 et d'une fonction constante.*

Correction 23 On raisonne par équivalence :

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \iff \sqrt{5}\sqrt{3} \leqslant 4 \iff 15 \leqslant 16.$$

La dernière inégalité est vraie. Par équivalence, on en déduit que la première l'est aussi donc $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ est bien inférieure à $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Correction 24 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leqslant \ln\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \\ \iff\ & \ln\sqrt{ab} \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ \iff\ & \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \text{par croissance de ln} \\ \iff\ & 2\sqrt{a}\sqrt{b} \leqslant a + b \\ \iff\ & 0 \leqslant \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant toujours vraie, on a montré, par équivalence, l'inégalité souhaitée.

Correction 25 On raisonne par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$On suppose $b = d$ et $a = c$. Il est clair que $a\ln 2 + b\ln 3 = c\ln 2 + d\ln 3$.

$\boxed{\Leftarrow}$Supposons maintenant $a\ln 2 + b\ln 3 = c\ln 2 + d\ln 3$. On a alors :

$$(a - c)\ln 2 = (d - b)\ln 3.$$

Si $b \neq d$, alors $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} = \dfrac{a-c}{d-b} \in \mathbb{Q}$ ce qui est impossible car $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel d'après l'exercice 31. On a donc $b = d$ ce qui implique $a = c$.

Correction 26 On a $x \leqslant y$ donc :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} \geqslant \frac{2x}{xy} = \frac{2}{y}.$$

Cela démontre la première inégalité.

On remarque que $\dfrac{1}{x} \leqslant 1$ et $\dfrac{1}{y} \leqslant 1$ donc $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) \leqslant 1$.

Comme $\sqrt{xy} \geqslant 1$, on a la deuxième inégalité.

Pour montrer $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$, on raisonne par équivalence:

$$\begin{array}{ll} & \sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2} \\ \Leftrightarrow & xy \leqslant \dfrac{(x+y)^2}{4} \text{ par positivité des deux membres} \\ \Leftrightarrow & 4xy \leqslant x^2+2xy+y^2 \\ \Leftrightarrow & 0 \leqslant x^2-2xy+y^2 \\ \Leftrightarrow & 0 \leqslant (x-y)^2. \end{array}$$

La dernière inégalité est toujours vraie, ce qui montre que :

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

Enfin, la dernière inégalité est claire puisque $x \leqslant y$.

Correction 27

1. On écrit $f(x) = (x-1)^2+1$, on a alors $\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)^2 \geqslant 0$ ce qui implique $f(x) \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}$. On peut aussi, mais c'est plus long, faire une étude de la fonction f. Son tableau de variations montrera qu'elle admet un minimum en $x=1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant f(1) = 1$.
2. Il suffit d'exhiber un élément vérifiant cette inégalité. Pour $x=4$, on a $f(4) = 9 > 8$ donc un tel élément existe.

Correction 28 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b} \quad & \Leftrightarrow ab+xb+xa = \frac{axb}{x+a+b} \\ & \Leftrightarrow (ab+x(a+b))\,(x+a+b) = axb \\ & \Leftrightarrow (a+b)x^2+(a+b)^2x+ab(a+b) = 0 \\ & \Leftrightarrow (a+b) = 0 \text{ ou } x^2+(a+b)x+ab = 0. \end{aligned}$$

• Si $a+b=0$, l'équation est vraie pour tout x réel non nul.
• Si $a+b \neq 0$, alors les deux racines de $x^2+(a+b)x+ab=0$ sont $-a$ et $-b$ donc ce sont les deux seules solutions de l'équation.

Correction 29 On remarque tout d'abord que x doit être supérieur ou égal à 2. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2} = 2 \quad & \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = \sqrt{x-2}+2 \\ & \Leftrightarrow 2x+3 = 4+4\sqrt{x-2}+x-2 \\ & \Leftrightarrow x+1 = 4\sqrt{x-2} \\ & \Leftrightarrow (x+1)^2 = \left(4\sqrt{x-2}\right)^2 \text{ par positivité des quantités car } x > 2 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow x^2-14x+33 = 0.$

Le discriminant vaut $\Delta = 64$, les racines sont 3 et 11. Les deux racines sont bien supérieures à 2, elles sont donc solutions de l'équation initiale.

Correction 30 On remarque tout d'abord que le polynôme sous la racine, qui vaut $(x-1)(x-4)$ doit être positif. Cela implique $x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 4$. De plus, $2-x$ doit également être positif (car plus grand qu'une racine carrée) donc finalement, $x \leqslant 1$.

On raisonne maintenant par équivalence :

$$\sqrt{x^2-5x+4} < 2-x \Leftrightarrow x^2-5x+4 < (2-x)^2 \Leftrightarrow x > 0.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est $]0,1]$.

Correction 31 On pose $\alpha = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$. On suppose par l'absurde que α est rationnel, alors il existe p et q entiers, $q \neq 0$ tels que $\alpha = \dfrac{p}{q}$. Comme α est positif, on peut supposer que p et q sont strictement positifs. On a :

$$\alpha = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p\ln(3) = q\ln(2) \Leftrightarrow \ln(3^p) = \ln(2^q) \Leftrightarrow 3^p = 2^q.$$

3^p est impair alors que 2^q est pair, on a donc une contradiction. Par l'absurde, on a montré :

$$\frac{\ln(2)}{\ln(3)} \notin \mathbb{Q}.$$

Correction 32 On suppose par l'absurde qu'il n'existe pas quatre élèves nés le même mois. Il y a alors au plus trois élèves nés chaque moi donc le nombre d'élèves est inférieur ou égal à 3 fois le nombre de mois c'est-à-dire 36. On obtient une contradiction donc il existe au moins quatre élèves nés le même mois.

Correction 33 On suppose par l'absurde que $r+x$ est rationnel. Alors, comme $-r$ est rationnel, on a $x = (r+x)+(-r) \in \mathbb{Q}$ ce qui est une contradiction. On en déduit que $r+x \notin \mathbb{Q}$.

Correction 34 On suppose, par l'absurde, qu'il existe un tel entier m. On a alors

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leqslant m \leqslant \sqrt{4n+2}.$$

On raisonne par équivalence :

$$\begin{array}{ll} & \sqrt{n}+\sqrt{n+1} < m < \sqrt{4n+2} \\ \Leftrightarrow & n+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+n+1 < m^2 < 4n+2 \text{par positivité des quantités} \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{n(n+1)} < m-2n-1 < 2n+1 \\ \Leftrightarrow & 4n(n+1) < (m-2n-1)^2 < 4n^2+4n+1 \end{array}$$

On obtient une contradiction car $(m-2n-1)^2$ est un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs. On a montré qu'il n'existe pas d'entiers strictement compris entre $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ et $\sqrt{4n+2}$.

Correction 35 Pour $n=1$, la somme est nulle, la formule est donc valide. On suppose que la formule est vraie au rang n, montrons qu'elle l'est aussi au rang $n+1$. On a

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + n(n+1) \\ &= \frac{1}{3}n(n-1)(n+1) + n(n+1) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= n(n+1)\left(\frac{1}{3}(n-1)+1\right) \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2). \end{aligned}$$

La formule est vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Correction 36 On raisonne par récurrence forte sur n. On a $u_0 = 2 = 2^0 + 3^0$ et $u_1 = 5 = 2^1 + 3^1$ donc la formule est vraie aux rangs 1 et 2. On suppose le résultat vrai aux rangs n et $n+1$ et on montre qu'il est vrai au rang $n+2$.

On sait que :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \\ &= 5\left(2^{n+1}+3^{n+1}\right) - 6\left(2^n+3^n\right) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= 4.2^n + 9.3^n \\ &= 2^{n+2} + 3^{n+2} \end{aligned}$$

Le résultat est vrai au rang $n+2$. Par le principe de récurrence forte, il est vrai pour tout entier n.

Correction 37

Analyse :Soit P un polynôme. On suppose qu'il existe P_1 et P_2 deux polynômes tels que $P = P_1 + P_2$ avec $P_1(1) = 0$ et $P_2 = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} P(1) &= P_1(1) + P_2(1) \\ &= \lambda \text{ car } P_1(1) = 0 \end{aligned}$$

On a donc $\lambda = P(1)$.

Synthèse :Soit P un polynôme. On pose $P_2 = P - P(1)$ et P_1 le polynôme constant égal à $P(1)$. On doit vérifier que

- $P = P_1 + P_2$,
- $P_1(1) = 0$,
- P_2 est constant.

Le premier et le dernier point sont clairs. Pour le deuxième point, on a $P_2(1) = P(1) - P(1) = 0$ donc les trois points sont vérifiés. Par analyse/synthèse, on a montré que tout polynôme s'écrit comme la somme d'un polynôme s'annulant en 1 et d'un polynôme constant.

Remarque. *Comme dans les exercices précédents, on a l'unicité de ces deux polynômes d'après la phase d'analyse.*

Correction 38 On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on a $1 - x_1 \geqslant 1 - x_1$ et la formule est vraie au rang 1.
On suppose le résultat vrai au rang n, montrons qu'il est vrai au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on a :

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \geqslant 1 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

On multiplie par $1 - x_{n+1}$. Comme cette quantité est positive puisque x_{n+1} appartient à $[0,1]$, on ne change pas le sens de l'inégalité. On a donc :

$$(1-x_{n+1})(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \geqslant (1-x_{n+1})\left(1 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\right).$$

On a :

$$(1-x_{n+1})(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) = (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)(1-x_{n+1}),$$

et

$$\begin{aligned} &(1-x_{n+1})\left(1-(x_1+x_2+\ldots+x_n)\right) \\ = \ &1 - x_{n+1} - (x_1+x_2+\ldots+x_n) + x_{n+1}(x_1+x_2+\ldots+x_n). \end{aligned}$$

Comme les x_i sont positifs, on a :

$$x_{n+1}(x_1+x_2+\ldots+x_n) \geqslant 0,$$

donc

$$(1-x_{n+1})\left(1-(x_1+x_2+\ldots+x_n)\right) \geqslant 1 - x_{n+1} - (x_1+x_2+\ldots+x_n).$$

Comme

$$-x_{n+1} - (x_1+x_2+\ldots+x_n) = -\left(x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1}\right),$$

on a montré que l'inégalité est vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Correction 39 On commence par conjecturer le sens de monotonie. On a $u_1 = 2$ donc elle a l'air croissante. Montrons, par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} \geqslant u_n$$

Le résultat est vrai au rang 0, la propriété est donc initialisée. On suppose qu'elle est vrai pour un certain entier n. On a $u_{n+1} \geqslant u_n$ donc, par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{4+x}$, on a

$$\sqrt{4+u_{n+1}} \geqslant \sqrt{4+u_n},$$

c'est-à-dire

$$u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$$

La propriété est donc héréditaire. Par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Correction 40 On suppose qu'il existe une telle fonction.

- Si f n'est pas la fonction nulle, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 0$.
- Si $f(a) \neq a$, on peut poser $g : x \mapsto \dfrac{x - f(a)}{a - f(a)}.a$. On a alors $g(f(a)) = 0$ et $f(g(a)) = f(a) \neq 0$ ce qui est une contradiction.
- Si $f(a) = a$, alors en prenant $g : x \mapsto \dfrac{x}{a}$, on a $g(a) = 1 = g(f(a))$ donc $f(1) = 1$. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$, alors en considérant la fonction $t \mapsto xt$, on obtient $f(x) = f(g(1)) = g(f(1)) = g(1) = x$. Ainsi, f est la fonction identité.

On a montré que si une telle fonction existe, elle est la fonction nulle ou la fonction identité. On remarque que la fonction nulle ne vérifie pas cette propriété (en prenant pour g une fonction qui ne s'annule pas en 0 par exemple). En revanche, la fonction identité vérifie cette propriété, c'est donc la seule qui vérifie cette propriété.

Correction 41
Analyse :Soit $m \in \mathbb{N}$ impair tel que $n = 4m$. On suppose qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que $4m = a^2 - b^2$. Alors $4m = (a-b)(a+b)$. Comme a et b sont de même parité, leur différence est paire. Comme m est premier, on a nécessairement $a - b = 2, 4, 2m$ ou $4m$. Si $a - b = 4m$, $a + b = 1$ ce qui implique $b = 0$ donc $a = 1$ ce qui est impossible. Si $a - b = 2m$, $a + b = 2$ ce qui implique $a = b = 1$ puisqu'ils ont même parité. à nouveau, cela est impossible. Si $a - b = 4$, alors $a + b = m$ ce qui implique m pair puisque a et b ont même parité. Comme on a supposé m impair, ce cas-là est impossible. On a donc $a - b = 2$ donc $a + b = 2m$. On en déduit que $2a = (a - b) + (a + b) = 2m + 2$ et $2b = (a + b) - (a - b) = 2m - 2$ donc $a = m + 1$ et $b = m - 1$.

Synthèse :Soit $m \in \mathbb{N}$ impair. On vérifie que $(m+1)^2 - (m-1)^2 = 4m$ et les entiers $m + 1$ et $m - 1$ ont même parité. On a montré, par analyse/synthèse, que n s'écrit comme la différence de deux carrés de même parité.