Correction du TD n 1

Correction 1 1. f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$x \mapsto -2e^{-x}\sin(e^{-x})\cos(e^{-x}),$$

soit encore

$$x \mapsto -e^{-x}\sin\left(2e^{-x}\right).$$

2. f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ de dérivée

$$x \mapsto \frac{-\sin x}{\cos^2(\cos x)}.$$

3. f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$x \mapsto \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}.$$

4. f_4 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$x \mapsto \frac{2\sin x\cos x}{(1+\cos^2 x)^2}.$$

5. f_5 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$x \mapsto -\frac{4x^3}{(1+x^4)^2}.$$

6. f_6 est définie sur $[-1, +\infty[$ et dérivable sur $]-1, +\infty[$ de dérivée

$$x \mapsto -\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}\sin\sqrt{1+x^3}.$$

7. f_7 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$x \mapsto -\frac{xe^{-\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}\cos(e^{-\sqrt{1+x^2}}).$$

8. f_8 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$x \mapsto -4\sin x(1+\cos x)^3 e^{(1+\cos x)^4}.$$

9. f_9 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$x \mapsto -\frac{6x^2}{(1+x^3)^3}.$$

10. f_{10} est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$x \mapsto -\sin x e^{\cos x}.$$

Correction 2 Elle est définie sur $\mathbb{R}^\star$. On admet que $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$. On a alors : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}-1} = 0$.
On a également $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Pour tout $x \neq 0$, on a $f'(x) = f'(x) = \frac{(e^x-1)-xe^x}{(e^x-1)^2}$. Pour le tableau de variations, il faut déterminer le signe de f'. On remarque que $f'(x)$ est de même signe que $u(x) = e^x - 1 - xe^x$. Cette fonction est dérivable, on la dérive pour connaître son signe: $u'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$ donc u' est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et croissante sur R^-, elle atteint donc son maximum en 0 en lequel elle vaut 0; on a donc $u(x) \leqslant 0$ ce qui montre que f est décroissante. On a le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	0

Remarque. *Nous montrerons plus tard que* $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = 1$ *en identifiant* $f(x)$ *à un taux d'accroissement.*

Correction 3 1. On remarque tout d'abord que t doit être négatif. Soit donc $t < 0$, alors $\frac{1}{t} \leqslant -2 \Leftrightarrow t \geqslant -\frac{1}{2}$ par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^\star_-$, l'ensemble cherché est donc $\left[-\frac{1}{2}, 0\right[$. On peut, bien sûr raisonner par équivalence.

2. Soit $t>0$, alors $\frac{1}{t} \leqslant 2t \Leftrightarrow 2t^2 \geqslant 1$ donc si $t>0$, les solutions sont $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$.
Si $t<0$, alors $\frac{1}{t} \leqslant 2t \Leftrightarrow 2t^2 \leqslant 1$ et les solutions sont $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right[$. On en déduit que les solutions sont
$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[\cup \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right[$$

Correction 4 1. On peut étudier les variations de $f(x) = \ln(1+x) - x$. f est dérivable et sa dérivée vaut
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$
donc f est croissante sur $]-1,0[$ et décroissante sur $]0,+\infty[$, elle est donc majorée par sa valeur en 0 c'est-à-dire 0; on a donc $\forall x \in]-1,+\infty[\ f(x) \leqslant 0$ donc $\ln(1+x) \leqslant x$.

2. On écrit $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$. L'encadrement que l'on doit montrer est alors équivalent, par croissance de l'exponentielle, à :
$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 1 \leqslant -n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right).$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{1}{n} > 1$ donc, d'après la question précédente, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$ ce qui donne un premier côté de l'encadrement.

Pour tout $n>1$, on a $-\frac{1}{n} > -1$ donc, d'après la question précédente, $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant -\frac{1}{n}$, ce qui implique $-n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \geqslant 1$ et achève la démonstration de l'encadrement.

Correction 5 On pose $f : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$. La fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - (2x)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$
On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f	0	$\searrow$	-1			$\rightarrow$	0

Correction 6 On peut se convaincre que c'est faux en remarquant que deux fonctions croissantes f et g vérifient, pour tout $x \leqslant y$:
$$f(x) \leqslant f(y) \text{ et } g(x) \leqslant g(y),$$
ce qui n'implique pas $f(x)g(x) \leqslant f(y)g(y)$ en général. Prenons par exemple $f : x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{x}}$ et $g : x \mapsto x$, elles sont toutes les deux strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^\star$ mais leur produit $fg : x \mapsto -\sqrt{x}$ est strictement décroissant.

Correction 7 On pose $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & xe^{-x/4} \end{array}\right.$. Alors f est dérivable et sa dérivée s'annule en $x=4$. On a le tableau de variations suivant :

x	0		4		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leqslant 4e^{-1}$. Or $4e^{-1} < 2$, donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) < 2.$$

Correction 8 1. Pour tout $t \in [1,10]$, on a $0 \leqslant \ln(t) \leqslant \ln(10)$ et $\frac{1}{10} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant 1$, on en déduit que
$$0 \leqslant \frac{\ln(t)}{t} \leqslant \ln(10),$$

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$ et $0 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$. On a donc $-1 \leqslant \frac{\sin(t)}{1+t^2} \leqslant 1$.

3. Pour tout $t \in [0,3]$, on a $1-3a \leqslant 1-at \leqslant 1$ et $1 \leqslant 2e^t - 1 \leqslant 2e^3 - 1$ donc $\frac{1}{2e^3-1} \leqslant \frac{1}{2e^t-1} \leqslant 1$. Là il faut être prudent car on ne connaît pas le signe de $1-3a$.

- Si $1-3a \geqslant 0$ c'est-à-dire $a \leqslant \frac{1}{3}$, alors $\frac{1-3a}{2e^3-1} \leqslant \frac{1-at}{2e^t-1} \leqslant 1$.
- Si $a < \frac{1}{3}$, alors $\frac{1-3a}{2e^t-1} \leqslant \frac{1-3t}{2e^t-1} \leqslant \frac{1}{2e^t-1} \leqslant 1$. En revanche, on a $\frac{1}{2e^t-1} \leqslant 1$ qui implique $\frac{1-3a}{2e^t-1} \geqslant 1-3a$ puisque l'on multiplie l'inégalité par une quantité négative. On a donc

$$1-3a \leqslant \frac{1-at}{2e^t-1} \leqslant 1.$$

On peut aussi raisonner avec la valeur absolue pour aller plus vite: soit $t \in [0,3]$, alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{1-at}{2e^t-1}\right| &\leqslant |1-at| \text{ car } \left|2e^2-1\right| = 2e^t-1 \geqslant 1\\ &\leqslant 1+at \text{ d'après l'inégalité triangulaire}\\ &\leqslant 1+3a \text{ car } a>0\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $t \in [0,3]$, on a $-(1+3a) \leqslant \frac{1-at}{2e^t-1} \leqslant 1+3a$.

Correction 9 On fait une intégration par parties, on pose $u(t)=\ln(t)$ et $v'(t)=t$, on a $u'(t)=\frac{1}{t}$ et $v(t)=\frac{t^2}{2}$. On a

$$\begin{aligned}\int_1^2 t\ln t\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{t\,\mathrm{d}t}{2}\\ &= 2\ln(2) - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^2\\ &= 2\ln(2)-\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Correction 10 On fait une intégration par parties. On pose $u(x)=e^x$ et $v'(x)=\cos x$, on a $u'(x)=e^x$ et $v(x)=\sin x$. On a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x\cos x\,\mathrm{d}x = [e^x\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin x\,\mathrm{d}x.$$

On fait une deuxième intégration par parties. On pose $u(x)=e^x$ et $v'(x)=\sin x$, on a $u'(x)=e^x$ et $v(x)=-\cos x$. On a donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x\cos x\,\mathrm{d}x = [e^x\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [e^x\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x\cos x\,\mathrm{d}x.$$

On en déduit que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x\cos x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(\sin x+\cos x)e^x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}.$$

Correction 11 On peut poser le changement de variable $u=x^3$, on a alors $du=3x^2dx$ et u varie de 0 à 1. On a donc

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+u}}{3}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{2}{9}(1+u)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{9}.$$

On peut aussi écrire $\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 3x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ pour reconnaître une dérivée de la forme $u'.u^{1/2}$. On a alors $\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}.\frac{2}{3}(1+t^3)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{9}$.

Correction 12 On reconnaît une dérivée usuelle de la forme $\frac{u'}{u}$ donc $\int_0^2 \frac{t^2}{1+t^3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\ln(t^3+1)\right]_0^2 = \frac{\ln(9)}{3}$.

On peut aussi poser $y=x^3$, on a $dy=3x^2dx$, y varie de 0 à 8. On a donc

$$\int_0^2 \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^8 \frac{1}{3(1+y)}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{3}\ln(1+y)\right]_0^8$$

On retrouve

$$\int_0^2 \frac{x^2}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(9)}{3}$$

Correction 13 On reconnaît une dérivée usuelle de la forme $u'e^u$, on a donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{\cos(x)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = e-1$

On peut aussi poser $y=\cos(x)$, on a $dy=-\sin(x)dx$ et y varie de 1 à 0 donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_1^0 -e^y\,\mathrm{d}y = -1+e = e-1$$

Correction 14 On reconnaît une dérivée usuelle, de la forme $u'.u$. On a $\int_1^2 te^{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(e^4-e)$. On peut aussi $x=t^2$. On a $dx=2tdt$ et x varie de 1 à 4 donc

$$\int_1^2 te^{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^4 \frac{1}{2}e^x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^x}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{2}(e^2-e)$$

Correction 15 On reconnaît une dérivée usuelle, de la forme $\frac{u'}{u}$. On a $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = [\ln|\ln(t)|]_2^3 = \ln\ln(3)-\ln\ln(2)$.

On peut aussi poser $x=\ln(t)$, on a $dx=\frac{dt}{t}$ et x varie de $\ln(2)$ à $\ln(3)$ donc

$$\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(x)]_{\ln(2)}^{\ln(3)} = \ln\ln(3)-\ln\ln(2)$$

Correction 16 1. $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$

2. $x \mapsto -3\sin(x)\cos^2(x)$

3. $x \mapsto \dfrac{\cos(x)\sin(x)}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

4. $x \mapsto 3x^2\cos(1+x^3)$

5. $t \mapsto \dfrac{-e^t}{(e^t+1)^2}$

6. $t \mapsto 4e^t(1+e^t)^3$.

7. $x \mapsto -n\sin(x)(1+\cos(x))^{n-1}$

8. $x \mapsto 4\cos(x)(1+\sin(x))^3$.

9. $x \mapsto \dfrac{2\sin(x)}{(1+2\cos(x))^2}$

10. $t \mapsto \dfrac{2t+3}{t^2+3t-2}$.

11. $t \mapsto n2t(t^2-1)^{n-1}$

12. $x \mapsto \dfrac{-2\sin(x)\cos(x)}{1+\cos^2(x)}$.

13. $x \mapsto \dfrac{1}{2(x+\sqrt{x})}$.

14. $t \mapsto \dfrac{e^{\tan(t)}}{\cos^2(t)}$.

15. $t \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{t}+1}}{2\sqrt{t}}$.

16. $x \mapsto -\dfrac{2\cos(x)}{(1+\sin x)^3}$.

Correction 17 1.

2.

3.

4. f_4 est définie sur tout $\mathbb{R}$ et π-périodique. Sa dérivée est $x \mapsto 2\cos(2x)e^{\sin(2x)}$. L'exponentielle étant positive, elle est du signe de $\cos 2x$. On l'étudie sur l'intervalle $[0,\pi]$.

   - Si $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, $2x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\cos(2x) \geqslant 0$.
   - Si $x \in \left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$, $2x \in \left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ et $\cos(2x) \leqslant 0$.
   - Enfin, si $x \in \left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$, $2x \in \left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$ et $\cos(2x) \geqslant 0$.

   On a :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f_4'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f_4	1	$\nearrow$	e	$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$	1

Correction 18 1. Soit $x \leqslant 0$, alors $e^x \leqslant 1$ donc $e^x - x^2 \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1 + x^2$. En divisant par $1+x^2$ qui est positif, on obtient l'inégalité souhaitée.

2. On a $x \geqslant 2$ donc $x-1>0$. On raisonne par équivalence:

$$\frac{x^2-2}{x-1} \geqslant 2 \Leftrightarrow x^2-2 \geqslant 2x-2 \Leftrightarrow x(x-2) \geqslant 0$$

   La dernière inégalité est vraie donc, par équivalence, la première l'est aussi.

Correction 19 On pose $f : x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$. Elle est définie sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$f'(x) = 2\sqrt{1-x^2} + \frac{2x(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-x^2)-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On a le tableau de variations suivant :

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Correction 20 On pose $f : x \mapsto e^x - x$ et $g : x \mapsto (1-x)e^x$. On a f dérivable de dérivée $f'(x) = e^x - 1$. La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Par conséquent, elle est minorée par $f(0) = 1$.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 1$ d'où $e^x \geqslant 1 + x$.

De même, g est dérivable et $g'(x) = -xe^x$ donc g est décroissante sur $[0,1]$ et on a $g(0) = 1$ donc : $\forall x \in [0,1], (1-x)e^x \leqslant 1$. En divisant par $(1-x)$ qui est positif, on a l'inégalité souhaitée.

Correction 21

1. Pour tout $t \in [-1,1]$, on a $0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2)$ et $3t \in [-3,3]$ donc $\dfrac{3t}{a+t^2} \in \left[-\dfrac{3}{a+t^2}, \dfrac{3}{a+t^2}\right]$ puisque $a + t^2 > 0$. Or $0 \leqslant \dfrac{1}{a+t^2} \leqslant \dfrac{1}{a}$ donc $\dfrac{3t}{a+t^2} \in \left[-\dfrac{3}{a}, \dfrac{3}{a}\right]$.

   On en déduit que pour tout $t \in [-1,1]$, $f_1(t) \in \left[-\dfrac{3}{a}, \dfrac{3}{a} + \ln(2)\right]$.

2. Soit $t \in [-1,1]$, on a
$$|f_2(t)| = \left|\frac{at^2}{1+e^t} - \frac{t^2}{a^2}\right| \leqslant \frac{at^2}{1+e^t} + \frac{t^2}{a^2} \leqslant \frac{a}{1+e^{-1}} + \frac{1}{a^2}$$
   donc un majorant est $\dfrac{a}{1+e^{-1}} + \dfrac{1}{a^2}$ et un minorant est $-\left(\dfrac{a}{1+e^{-1}} + \dfrac{1}{a^2}\right)$. Si on veut être plus précis, on écrit
$$0 \leqslant \frac{at^2}{1+e^t} \leqslant \frac{a}{1+e^{-1}} \text{ et } -\frac{1}{a^2} \leqslant -\frac{t^2}{a^2} \leqslant 0,$$
   on obtient
$$-\frac{1}{a^2} \leqslant f_5(t) \leqslant \frac{a}{1+e^{-1}}$$
   donc un majorant est $\dfrac{a}{1+e^{-1}}$ et un minorant est $-\dfrac{1}{a^2}$.

Correction 22 On fait une intégration par parties, on pose $u(t) = t^2 - t + 1$ et $v'(t) = e^{-t}$, on a $u'(t) = 2t - 1$ et $v(t) = -e^{-t}$. On a
$$\int_0^1 (t^2 - t + 1)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-(t^2-t+1)e^{-t}\right]_0^1 + \int_0^1 (2t-1)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
On fait une nouvelle intégration par parties, on pose $u(t) = 2t - 1$ et $v'(t) = e^{-t}$, on a $u'(t) = 2$ et $v(t) = -e^{-t}$. On a
$$\int_0^1 (2t-1)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-(2t-1)e^{-t}\right]_0^1 + \int_0^1 2e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-(2t-1)e^{-t} - 2e^{-t}\right]_0^1 = -3e^{-1} + 1.$$
On a donc
$$\int_0^1 (t^2-t+1)e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-1} + 1 - 3e^{-1} = 2 - 4e^{-1}$$

Correction 23

- Si $n \neq 1$, on fait une intégration par parties. On pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x^{-n}$. On a $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{x^{-n+1}}{1-n}$. On a donc :
$$\int_1^e \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x^n} = \left[-\frac{\ln t}{(n-1)t^{n-1}}\right]_1^e + \int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{(n-1)x^n} = \left[-\frac{\ln t}{(n-1)t^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2 t^{n-1}}\right]_1^e = \frac{1}{(n-1)}$$
- Si $n = 1$, on reconnaît une dérivée de la forme $u'.u$, on a donc $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln t\,\mathrm{d}x}{t} = \left[\tfrac{1}{2}\ln^2 t\right]_1^e = \frac{1}{2}$.

Correction 24 On reconnaît une dérivée usuelle, de la forme $u'.u$. On a $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{t} = \left[\frac{1}{2}(\ln(t))^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln^2(2)$.

On peut aussi poser $x = \ln(t)$, on a $dx = \dfrac{dt}{t}$ et x varie de 0 à $\ln(2)$. On a donc
$$\int_1^2 \frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{t} = \int_0^{\ln(2)} x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\ln(2)} = \frac{1}{2}\ln^2(2).$$

Correction 25 On reconnaît une dérivée usuelle, de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. On a $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} = \left[\sqrt{1+t^2}\right]_0^{\sqrt{2}} = \sqrt{3} - 1$.

On peut aussi poser $y = t^2$, on a $dy = 2tdt$ et y varie de 0 à 2 donc
$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^2 \frac{1}{2\sqrt{1+y}}\,\mathrm{d}y = \left[\sqrt{1+y}\right]_0^2 = \sqrt{3} - 1$$

Correction 26 On commence par remarquer que $1 + xy$ est positif puisque $|xy| \leqslant 1$. Il suffit donc de montrer que $-1 - xy \leqslant x + y \leqslant 1 + xy$. On remarque ensuite que $x + y + xy + 1 = (x+1)(y+1) \geqslant 0$ et $xy + 1 - x - y = (1-x)(1-y) \geqslant 0$ donc l'encadrement est vrai, on a bien $\dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1, 1[$

Correction 27 On commence par remarquer que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow 10 \leqslant \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

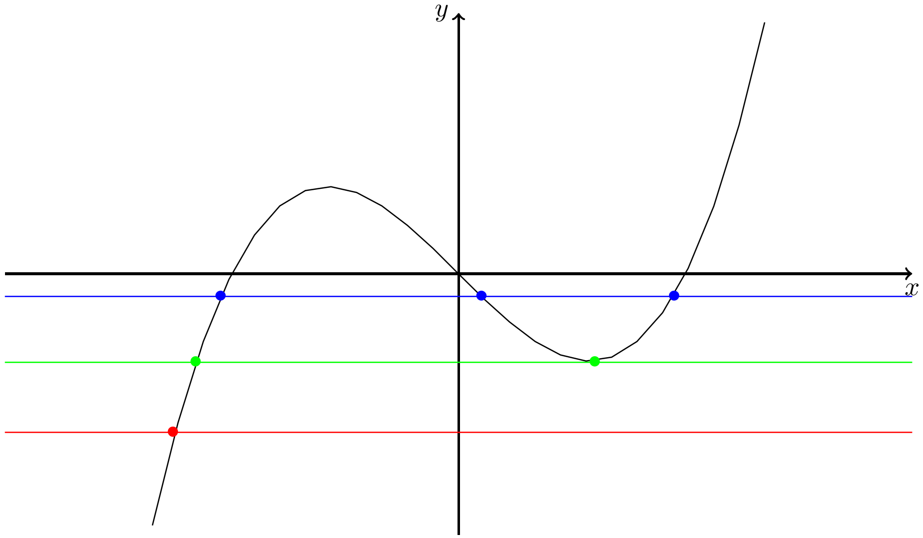
- Si $n \geqslant 25$, $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \geqslant 2\sqrt{n} \geqslant 10$.
- Si $n \leqslant 24$, $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} < 2\sqrt{n+1}$ donc $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} < 10$.

On en déduit que les entiers vérifiant $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leqslant \frac{1}{10}$ sont les entiers supérieurs ou égaux à 25.

Correction 28 Cela dépend, bien entendu, de la valeur de a. Le mieux est de tracer la fonction $f : x \mapsto x^3 - x$ pour se rendre compte de ce qu'il se passe. La dérivée vaut $f' : x \mapsto 3x^2 - 1$ donc on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$		

puis le graphe :



Il s'agit donc de trouver la valeur de x (autre que $-\frac{1}{\sqrt{3}}$) pour laquelle $f(x) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

On utilisera la parité de f pour conclure sur la valeur de x (autre que $\frac{1}{\sqrt{3}}$) pour laquelle $f(x) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

On cherche donc à résoudre $x^3 - x = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ c'est-à-dire $x^3 - x - \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0$. On sait que $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ est racine de ce polynôme donc on peut factoriser par $\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, on obtient

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{3}\right) = 0.$$

On calcule le discriminant du polynôme de degré 2, il faut 3, les racines sont donc $\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Le résultat est cohérent avec le graphe: La droite $y = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ intersecte le graphe de f en seulement deux points, il est normal de ne trouver que deux racines au polynôme $x^3 - x - \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Par parité de f, on en déduit que $f(x) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ admet deux solutions, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

- Si $a \notin \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$, $a^3 - a \notin \left[-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right]$ et l'équation $f(x) = a^3 - a$ a une solution.
- Si $a = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ ou $a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $a^3 - a = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$ et l'équation $f(x) = a^3 - a$ admet exactement deux solutions.
- Enfin, si $a \notin \left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$ et $a \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $a^3 - a \in \left]-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right[$ et l'équation $f(x) = a^3 - a$ admet exactement trois solutions.

Correction 29 On a $h' = f'.g' \circ f$ et $h" = f".g' \circ f + (f')^2.g" \circ f$.

Correction 30 On écrit $n^m = m^n \Leftrightarrow m\ln(n) = n\ln(m) \Leftrightarrow \frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln(m)}{m}$ puis on trace le tableau de variations de $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$:

x	0		e		$+\infty$
f	$\Vert$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	

Pas besoin de déterminer les limites, on va traiter les cas à la main: il n'y a que deux entiers non nuls inférieurs à e: 1 et 2. $f(1) = 0$ et pour $x > e$, $f(x) \neq 0$ donc il n'y a pas d'autres solutions à l'équation $f(x) = 0$ (ce qui se verrait très bien en calculant la limite en ∞ qui est nulle). Reste le cas $f(2) = \dfrac{\ln(2)}{2}$, le tableau de variations indique qu'il y a une autre solution à l'équation $f(x) = f(2)$, on la trouve " à la main": $f(4) = f(2)$. Le seul couple solution est donc $(2, 4)$.

Correction 31 On pose $f : x \mapsto x^n + px + q$, alors $f' : x \mapsto nx^{n-1} + p$.

- Si n est pair, $n-1$ est impair et f' s'annule exactement une fois. La fonction f est donc décroissante puis croissante et f s'annule au plus deux fois sur $\mathbb{R}$.

- Si n est impair, $n-1$ est pair, f' s'annule deux fois ou pas du tout. Dans le premier cas, f est croissante, décroissante puis à nouveau croissante et f s'annule donc au plus 3 fois. Dans le deuxième cas, f s'annule une fois. Dans les deux cas, f s'annule au plus 3 fois.

Correction 32 On sait que $\ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) \leqslant \dfrac{x}{n}$ donc $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \leqslant e^x$. Il suffit donc de montrer que pour tout $x \in [0, 2[$, $e^x \leqslant \dfrac{2+x}{2-x}$, ou encore que pour tout $x \in [0, 2[$,

$$x \leqslant \ln(2+x) - \ln(2-x).$$

Soit donc $g : x \mapsto \ln(2+x) - \ln(2-x) - x$,, alors pour tout $x \in [0, 2[$,

$$g'(x) = \frac{1}{2+x} - \frac{1}{2-x} - 1 = \frac{2 - x - 2 - x - (4 - x^2)}{(2-x)(2+x)} = \frac{x^2 - 2x + 4}{(2+x)(2-x)} = \frac{(x-1)^2 + 3}{(2-x)(2+x)}.$$

Ainsi, g' est positive donc g est croissante. On a $g(0) = 0$, g est donc positive ce qui montre l'inégalité souhaitée.