Lycée du Parc
842.

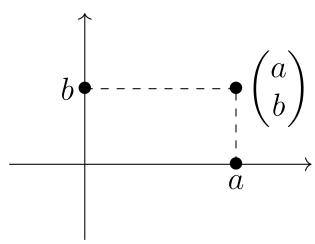
Introduction aux nombres complexes

Sur les réels, on dispose de quatre opérations: $+$,-,$\times$,$\div$. L'idée est de définir de telles opérations sur le plan, on introduit pour cela le plan complexe.

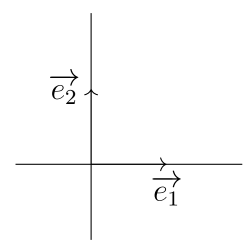
1 L'ensemble $\mathbb{C}$

Un point du plan est un point du type (a, b) où a et b sont des réels. On note aussi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On assimile un point M du plan au vecteur $\overrightarrow{OM}$, ce qui est possible si on fixe l'origine O du plan.

Si on munit le plan de la base orthonormée $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ avec $\overrightarrow{e_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{e_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a



avec



L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes peut être défini comme l'ensemble $\mathbb{R}^2$ dans lequel :

- Les vecteurs de la forme $a\overrightarrow{e_1}$ sont simplement notés a.
  Le vecteur $\overrightarrow{e_1}$ est assimilé au réel 1, l'axe des abscisses (et donc l'ensemble de tous les vecteurs de la forme $a\overrightarrow{e_1}$) est assimilé à la droite réelle, notée $\mathbb{R}$.
- Le vecteur $\overrightarrow{e_2}$ est noté i.
  L'axe des ordonnées est l'ensemble des nombres de la forme ib avec b réel. Il est noté $i\mathbb{R}$.

Définition 1. Un nombre complexe z est un point $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ du plan que l'on note $a + ib$.

- a s'appelle la partie réelle de z, notée $\mathcal{R}e(z)$
- b s'appelle la partie imaginaire de z, notée $\mathcal{I}m(z)$.

Un nombre complexe écrit sous cette forme est dit sous forme algébrique.

Remarque. *Par définition, deux nombres complexes sont égaux s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.*

Exemples: parties réelle et imaginaire de $3 + 2i$?

2 Opérations sur les nombres complexes

2.1 Somme

Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ est égal à $\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}$.
En notation complexe, si $z = a + ib$ et $z' = c + id$, alors $z + z' = (a + c) + i(b + d)$.

On peut également soustraire en additionnant l'opposé. Précisément, si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, alors $-\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-a\\-b\end{pmatrix}$.
De même, si $z = a + ib$, alors $-z = (-a) + i(-b)$. On définit alors la différence $z - z'$ comme la somme de z et $(-z')$.
Exemple: Si $z = 2 + 3i$ et $z' = 1 + 4i$, alors $z - z' = 1 - i$.

Exercice 1. On note $z = -3 + 2i$. Placer dans le plan complexe : $z + 1$, $z - 1$, $z + i$, $z - i$ et $z + 5 - 3i$.

2.2 Multiplication externe

On peut toujours multiplier un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ par un réel λ, on a alors $\lambda\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\lambda a\\\lambda b\end{pmatrix}$.
Dans les complexes, on fait de même : si $z = a + ib$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda z = \lambda a + i\lambda b$. Ainsi,

$$\boxed{\text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ on a } \mathcal{R}e(\lambda z) = \lambda\mathcal{R}e(z) \text{ et } \mathcal{I}m(\lambda z) = \lambda\mathcal{I}m(z)}$$

Remarque. *L'opposé d'un nombre complexe z est égal à son produit par le réel -1.*

Exemple: Si $z = 1 + 3i$ et $z' = 2 - i$, alors $2z - z' = 7i$.

Exercice 2. On note $z = -3 + 2i$. Placer dans le plan complexe : $2z$, $-z$, puis l'ensemble des λz, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.3 Produit de nombres complexes

Soit $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$. Imaginons que l'on ait un produit qui vérifie la propriété de distributivité, on aurait alors

$$z_1z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + i^2b_1b_2.$$

Pour définir ce produit (donc pour que le résultat soit un nombre complexe), il faut décider d'une valeur de i^2. On choisit $i^2 = -1$. On a alors :

Définition 2. Soit $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, on pose

$$z_1z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

Propriétés:
Pour tout z_1, z_2, z_3 complexes

- $z_1z_2 = z_2z_1$ (commutativité)
- $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$ (associativité)
  Cela permet d'écrire $z_1z_2z_3$.
- $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ (distributivité)

$\mathcal{R}e(z_1z_2) \neq \mathcal{R}e(z_1)\mathcal{R}e(z_2)$ et $\mathcal{I}m(z_1z_2) \neq \mathcal{I}m(z_1)\mathcal{I}m(z_2)$

Exercice 3.

1. Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

$$z_1 = (1+i)(2+3i) \qquad z_2 = i(3-2i)(1+i) \qquad z_3 = (2+i)^2 - i(1-2i)^2$$

2. Déterminer la forme algébrique des puissances de i : i, i^2, i^3, i^4, et de façon générale i^n pour $n \in \mathbb{N}$. On représentera ces nombres dans le plan.

3. Soit $z = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Placer z dans le plan (n'importe où) puis le complexe iz. Quelle transformation a été opérée ? Même question avec $-iz$.

4. En déduire la position dans le plan des complexes $(-i)^n z$, où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Simplifier le produit $(a+ib)(a-ib)$.

2.4 Inverse d'un complexe non nul

Soit $z = a+ib$, non nul. On cherche un nombre complexe $u = c + id$ tel que $zu = 1$.
On forme le produit $zu = (a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$.
On veut

$$\begin{cases} ac - bd = 1 & (1) \\ ad + bc = 0 & (2) \end{cases}$$

En faisant $a(1)+b(2)$, on obtient $c(b^2+a^2) = a$ donc $c = \dfrac{a}{a^2+b^2}$. De même, en faisant $a(2)-b(1)$, on obtient $(a^2+b^2)d = -b$ donc $d = -\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

Remarque: On peut diviser par a^2+b^2 qui est non nul car on a supposé $a+ib$ non nul.

Ainsi, si $uz = 1$, alors $u = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$.
Réciproquement, on vérifie que

$$(a+ib) \times \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{(a+i)(a-ib)}{a^2+b^2} = \frac{a^2-(ib)^2}{a^2+b^2} = 1.$$

Définition 3. Soit $z \in \mathbb{C}^\star$ (c'est-à-dire z complexe non nul), alors il existe un unique complexe, noté $\dfrac{1}{z}$, tel que $z \times \dfrac{1}{z} = 1$. Le complexe $\dfrac{1}{z}$ est appelé inverse de z.

Remarque: On pourrait aussi écrire $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+ib}$, ce qui est légitime mais le nombre complexe $\dfrac{1}{z}$ n'apparaît pas sous forme algébrique (c'est-à-dire de la forme $x+iy$ avec x, y réels.
On retient que le passage de $\dfrac{1}{a+ib}$ à $\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$ a été obtenu en multipliant le numérateur et le dénominateur par $a-ib$, ce qui a permis, à l'aide d'une identité remarquable, de rendre le dénominateur réel et, ainsi, de faire apparaître le nombre complexe sous la forme souhaitée.

Exercice 5. Que vaut $\frac{1}{i}$?

Exercice 6. Soit $t \in \mathbb{R}$. A l'aide de la question précédente, déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1}{1+i} \qquad z_2 = \frac{1}{-2+3i} \qquad z_3 = \frac{i}{3t+4i} \qquad z_4 = \frac{i+5t}{it-1}$$

2.5 Calculs sur $\mathbb{C}$

Il est désormais possible de faire tous les calculs sur les nombres complexes et les techniques de calcul sur $\mathbb{R}$ s'étendent à $\mathbb{C}$. On peut par exemple :

- Mettre au même dénominateur
- Utiliser les identités remarquables : $(z-z')(z+z') = z^2 - (z')^2$ et $(z+z')^2 = z^2 + 2zz' + (z')^2$.
- Utiliser le binôme de Newton: $(z+z')^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (z')^{n-k}$.

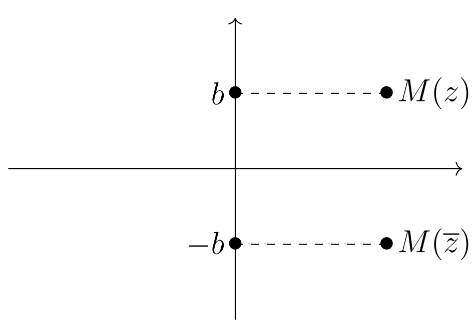
> Pour différencier $\mathbb{R}^2$ de $\mathbb{C}$, on dira désormais que $z = a+ib$ est l'affixe du vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et que ce dernier est l'image de z. On note souvent $M(z)$ l'image du complexe z (donc le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$)

3 Conjugué, module et argument

3.1 Conjugué

Définition 4. Soit $z = a+ib$ un nombre complexe. On appelle conjugué de z, noté $\overline{z}$, le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Géométriquement, on a :



La transformation $z \mapsto \overline{z}$ correspond à la symétrie par rapport à l'axe des abscisses (autrement dit $M(\overline{z})$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à (0_x).)

Propriétés:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\overline{\lambda z_1} = \lambda \overline{z_1}$.
- Si $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- $\overline{\overline{z}} = z$.

Théorème 1.
Soit $z \in \mathbb{C}$, on a

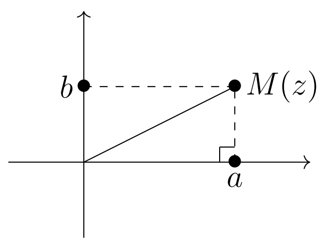
- $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = \overline{z}$.
- $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $z = -\overline{z}$.

Preuve: Soit $z = a + ib$, $z = \overline{z}$ implique $b = 0$ donc $z = a$ c'est-à-dire z réel. Réciproquement, si z est réel alors $z = z + i.0$ donc $\overline{z} = z - i.0 = z$. On a bien z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$. On montre, de même, la deuxième équivalence.

3.2 Module

Définition 5. Soit $z \in \mathbb{C}$, on appelle module de z le réel positif $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.
Si $z = a + ib$ avec a, b réels, alors $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ donc $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Géométriquement, $|z|$ correspond à la distance entre $M(z)$ et l'origine (thm de Pythagore):



Propriétés:
Soit z, z_1, z_2 des nombres complexes

- $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
- $|z| = |\overline{z}|$.
- Si x est réel, le module de x correspond à sa valeur absolue.
- $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.
- Si $z_2 \neq 0$, alors $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

Preuve:

- Si $z = 0$, $z = 0 + i.0$ donc $|z| = 0$. Réciproquement, si $z = a + ib$ et $|z| = 0$, alors $a^2 + b^2 = 0$ avec a, b réels donc $a = b = 0$ (somme nulle de réels positifs) d'où $z = 0$.
- Si $z = a + ib$, avec a, b réels, alors $|\overline{z}| = |a - ib| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.
- Si x est réel, $x = x + i.0$ donc $|x| = \sqrt{x^2 + 0^2}$ ce qui correspond à la valeur absolue de x.
- On écrit $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$, on a alors

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1),$$

donc

$$\begin{aligned}
|z_1z_2|^2 &= (a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2 \\
&= a_1^2a_2^2-2a_1a_2b_1b_2+b_1^2b_2^2+a_1^2b_2^2+2a_1a_2b_1b_2+a_2^2b_1^2 \\
&= a_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2 \\
&= (a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2) \\
&= |z_1|^2\,|z_2|^2
\end{aligned}$$

- Pour le quotient, on montre simplement l'inverse puis on utilise la formule du produit démontrée dans le point précédent. Il suffit donc de montrer que si $z \neq 0$, alors $|z| = \dfrac{1}{|z|}$. On écrit $z \times \dfrac{1}{z} = 1$ donc $|z|\left|\dfrac{1}{z}\right| = 1$ puis $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ en divisant par $|z|$. On a bien la formule pour l'inverse donc pour le quotient.

  Remarque. *On a $z\overline{z} = |z|^2$ donc si $z \neq 0$, alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$. On retrouve $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$ c'est-à-dire la formule de l'inverse.*

Exercice 7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer le module des complexes suivants.

$$z_1 = 3+i \qquad z_2 = i-5x \qquad z_3 = (1+i)(2+3i)$$

$$z_4 = ix(3-2i) \qquad z_5 = \frac{-2i(i-1)}{5+2xi} \qquad z_6 = \frac{(1+ix)ix}{3i(x+i)}$$

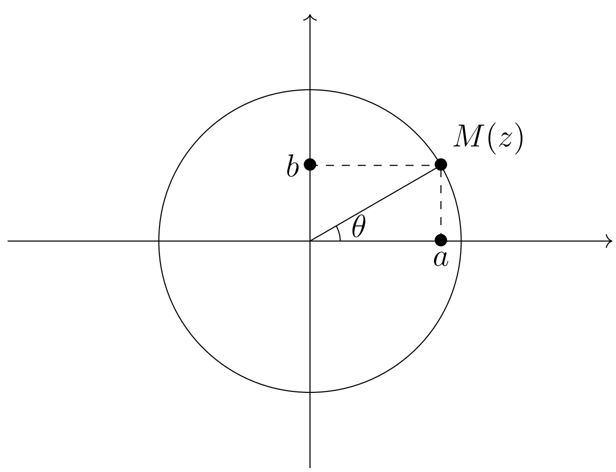
3.3 Nombres complexes de module 1

Notations: On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1:

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}.$$

Exemples: 1, i, -1, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.

Soit $z \in \mathbb{U}$, alors l'image $M(z)$ de z appartient au cercle de centre 0 et de rayon 1, appelé cercle trigonométrique. On note θ l'angle formé par l'axe des abscisses et $\overrightarrow{OM}$.



Si $z = a+ib$, on a $M(z)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et, avec les formules trigonométriques,

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{1} = a \\ \sin\theta = \dfrac{b}{1} = b \end{cases}$$

Ainsi, on a $z = \cos\theta + i\sin\theta$.

Réciproquement, si $z = \cos\theta + i\sin\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, alors $|z| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$. On a donc montré :

Proposition 2.
L'ensemble $\mathbb{U}$ peut être caractérisé ainsi : $\mathbb{U} = \{\cos\theta + i\sin\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on <u>note</u> $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$ (nous verrons plus tard pourquoi cette notation est judicieuse).
Exemples:

- $e^{i0} = 1$.
- $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$.
- $e^{i\pi} = -1 = e^{-i\pi}$
- $e^{\frac{3i\pi}{2}} = e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i$.

Proposition 3.
Soit θ, φ deux réels. On a

$$e^{i\theta} = e^{i\varphi} \text{ si et seulement s'il existe un entier } k \text{ tel que } \theta = \varphi + 2k\pi.$$

En effet, l'égalité est équivalente à l'égalité des cosinus ET des sinus donc à l'égalité des angles, à un multiple de 2π près.

Proposition 4.
Soit θ et φ deux réels. On a

- $e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$.
- $e^{-i\varphi} = \dfrac{1}{e^{i\varphi}}$.

Cette proposition montre que la notation exponentielle pour les complexes est judicieuse!
Preuve:

- On écrit

$$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \underbrace{(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi)}_{=\cos(\theta+\varphi)} + i\underbrace{(\sin\theta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta)}_{=\sin(\theta+\varphi)}$$

  On a donc bien l'égalité souhaitée.

- On écrit

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta),$$

  car $\cos^2 + \sin^2 = 1$. On a donc bien l'égalité.

Remarque. *L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par produit et quotient mais pas par somme !*

On a
$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \text{ réel }\} = \{e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi[\} = \{e^{i\theta}, \theta \in]-\pi, \pi]\}.$$
En effet, le sinus et le cosinus étant 2π-périodique, il suffit de choisir un angle dans un intervalle de longueur 2π fixé.

Exercice 8.

1. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer les formules d'Euler :
$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$
   (b) A l'aide de ces formules, exprimer $e^{i\theta} + 1$ et $e^{i\theta} - 1$ en fonction de $\cos(\frac{\theta}{2})$, $\sin(\frac{\theta}{2})$ et $e^{i\frac{\theta}{2}}$.
   Conseil : commencer par forcer la factorisation par $e^{i\frac{\theta}{2}}$: $e^{i\theta} + 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}(\ldots + \ldots)$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer l'équivalence suivante :
$$z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\} \iff \exists x \in \mathbb{R} \text{ tq } z = \frac{1+ix}{1-ix}$$

3.4 Forme exponentielle ou trigonométrique des complexes

Proposition 5.
Soit z un complexe non nul, il existe r, θ avec $r > 0$ et θ réel tels que $z = re^{i\theta}$.

Preuve: Il suffit de remarquer que $u = \dfrac{z}{|z|}$ est de module 1. D'après la section précédente, on sait qu'il existe un réel θ tel que $u = e^{i\theta}$. En posant $r = |z|$, on obtient $z = re^{i\theta}$.

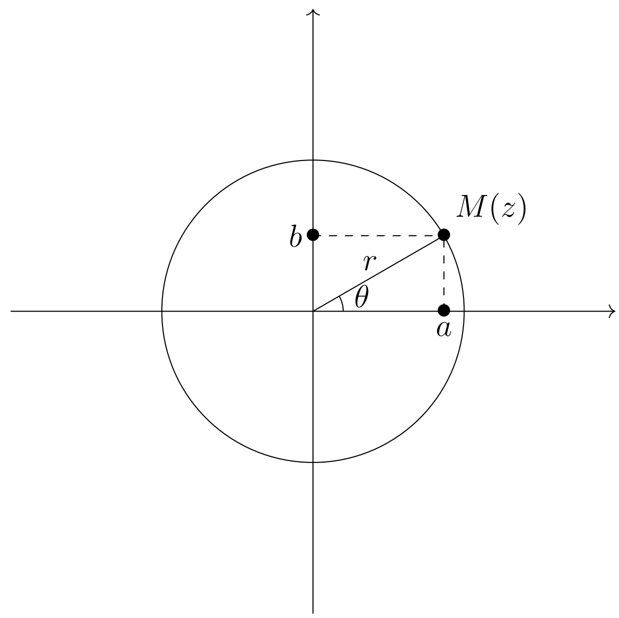
Définition 6. Soit z un complexe non nul tel que $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$. On dit que θ est un argument de z.

Il n'y a pas unicité car si θ est un argument de z, $\theta + 2k\pi$ l'est aussi pour tout entier k.

Proposition 6.
Soit r, r' deux réels strictement positifs, θ, θ' deux réels. On a
$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \text{ si et seulement si } \begin{cases} r = r' \\ \text{il existe un entier } k \text{ tel que } \theta = \theta' + 2k\pi \end{cases}$$

Preuve: Si $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$ alors les deux nombres complexes ont même module et, comme tout nombre complexe de la forme $e^{i\alpha}$ est de module 1, on obtient $r = r'$. En simplifiant par r (qui est non nul), on obtient l'égalité $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ qui implique l'égalité des angles, à un multiple de 2π près. Réciproquement, si $r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi$, on a, bien sûr, $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$.
Interprétation géométrique: Si $z = re^{i\theta}$, alors $M(z)$ se situe sur le cercle de centre O, de rayon r

et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ forme un angle de θ avec l'axe des abscisses.



Définition 7. Soit z un nombre complexe <u>non nul</u>. On dit qu'il est sous forme exponentielle s'il est écrit sous la forme $re^{i\theta}$ avec $r > 0$, il est sous forme trigonométrique s'il est écrit sous la forme $r\cos\theta + ir\sin\theta$ avec $r > 0$.

Remarque. *L'écriture sous forme exponentielle permet, par identification, de donner le module et un argument du complexe.*

⚠ Il faut impérativement que r soit strictement positif pour pouvoir faire cette identification !!!

Exemples:

- $-1 = e^{i\pi}$ est de module 1 et π est un argument.
- $-2e^{\frac{i\pi}{2}} = 2e^{\frac{3i\pi}{2}}$ est de module 2 et un argument est $\dfrac{3\pi}{2}$.

<u>En pratique:</u>

Pour déterminer la forme trigonométrique (ou polaire) d'un nombre complexe $z = a + ib$:

- On calcule son module $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- On factorise par son module : $z = \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$
- On cherche un angle θ qui vérifie $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ET $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

A noter qu'il n'y a qu'un nombre fini d'angles dont vous connaissez les valeurs de cosinus et sinus ! Concrètement, si vous n'avez pas un cos égal à $0, \pm 1, \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, cela signifie que vous ne pourrez pas le mettre sous forme trigonométrique explicite (donc soit vous avez fait une erreur, soit l'énoncé est faux si on vous demande de le mettre sous forme trigo, soit encore ce n'est pas la bonne méthode de chercher à le mettre sous forme trigo).

Exercice 9.

1. Sans aucun calcul (uniquement à l'aide du dessin), donner la forme trigonométrique des complexes suivants :
$$i \qquad -3i \qquad 1+i \qquad 1-i \qquad -5 \qquad -\frac{1}{2}i \qquad -2-2i$$
2. Déterminer la forme trigonométrique et placer dans le plan les complexes suivants :
$$z_1 = \sqrt{3}+i \qquad z_2 = \frac{1}{2}i - \frac{1}{2} \qquad z_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} - i$$
3. En déduire très rapidement la forme trigonométrique et le placement dans le plan des complexes z_1z_2, $\dfrac{z_2}{z_3}$ et $\dfrac{z_1^2 z_3}{z_2}$.
4. Calculer et placer dans le plan les puissances de z_3 : z_3^1, z_3^2, z_3^3 et de façon générale les z_3^n, où $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : La forme trigonométrique est parfaitement adaptée aux produit, quotient inverse et puissance. En effet, si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, avec r_1 et r_2 strictement positifs, alors

- $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.
- $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{r_2} e^{-i\theta_2}$ et donc $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, alors $z_1^n = r_1^n e^{in\theta_1}$.

Remarque. *Avec les formules précédentes, on voit que si θ_1 est un argument de z_1, alors $\dfrac{1}{z_1}$ a pour argument $-\theta_1$. On avait déjà remarqué que si z est non nul, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$. Ainsi, $\dfrac{1}{z}$ et $\overline{z}$ sont égaux à un multiple réel positif près, ils ont donc même argument.*

Exercice 10. Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

Exercice 11. Pour quel entier $n \in \mathbb{N}$ le complexe $(\sqrt{3}+i)^n$ est-il réel ? Imaginaire pur ?

Il n'existe pas de formule pour la somme !

Exemple: $z = 3e^{\frac{i\pi}{4}} + 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$. On a
$$\begin{aligned} z = 3e^{\frac{i\pi}{4}} + 2e^{-\frac{2i\pi}{3}} &= 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1\right) + i\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}\right) \end{aligned}$$
Pour mettre z sous forme trigonométrique, il faudrait trouver un angle θ tel que :
$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - 1 \\ \sin\theta = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} \end{cases}$$
On sait qu'un tel angle existe mais l'expliciter, c'est une autre histoire (bon courage :-)).

Exercice 12. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On dessinera systématiquement l'ensemble solution.
Conseil : se poser la question de si on utilise la forme algébrique ou la forme trigonométrique avant de se lancer.

1. $z = i\bar{z}$
2. $z^3 = 8i$

4 Transformation de $\mathbb{C}$ et interprétation géométrique

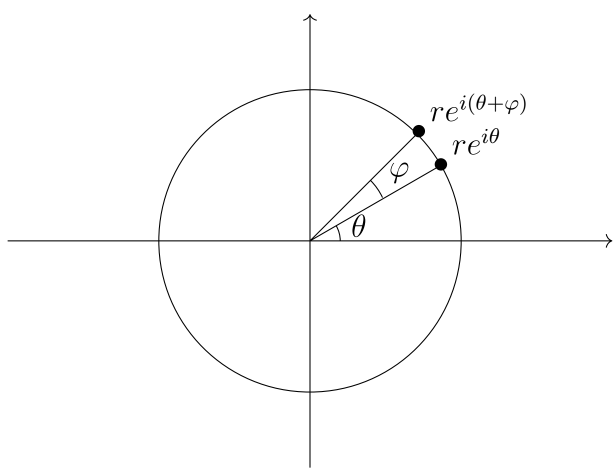
4.1 Translation

Soit u un complexe, la fonction f définie par $f(z) = z + u$ correspond géométriquement à la translation de vecteur $\overrightarrow{OM(u)}$.
En effet, si $u = a + ib$ et $z = x + iy$, alors $z' = u + z = (a + x) + i(b + y)$, on a donc

$$\overrightarrow{OM(z')}\begin{pmatrix} a+x \\ b+y \end{pmatrix} = \overrightarrow{OM(z)}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \overrightarrow{OM(u)}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

4.2 Rotation

Soit φ un réel. La fonction f définie par $f(z) = ze^{i\varphi}$ correspond à la rotation de centre 0 et d'angle φ.
Autrement dit, si on note z un nombre complexe et $z' = ze^{i\varpi}$ le produit de z et de $e^{i\varphi}$, alors le point $M(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation de centre O et d'angle φ.
On le retrouve analytiquement en passant à la forme trigonométrique :
si $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, alors $z' = ze^{i\varphi} = re^{i(\theta+\varphi)}$ et un argument de z' est $\theta + \varphi$.



Exemple: multiplier un complexe par i revient à appliquer une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ à son image.

Exercice 13.

1. Sans aucun calcul, placer sur le plan les complexes suivants :

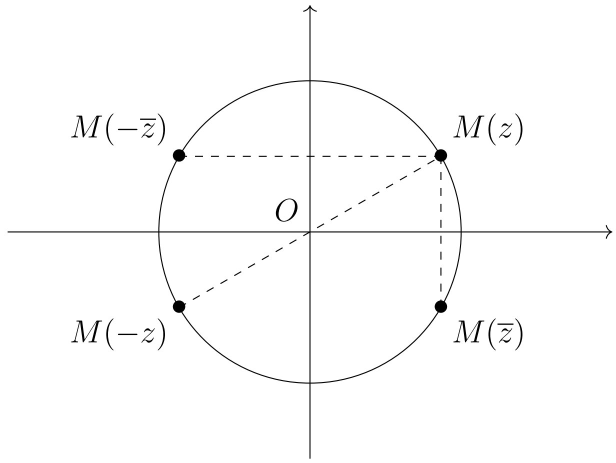
$$z_1 = (2+i)e^{\frac{2i\pi}{3}} \qquad z_2 = (-1+i)e^{-i\frac{\pi}{2}} + 1 \qquad z_3 = \overline{-3e^{\frac{3i\pi}{4}} - i}$$

2. Représenter graphiquement les ensembles suivants :

$$E_1 = \left\{(1-2i)e^{i\theta} \mid \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right\} \qquad E_2 = \left\{\frac{1}{2}e^{it} + 2 - i \mid t \in \left[0, \frac{5\pi}{3}\right]\right\}$$

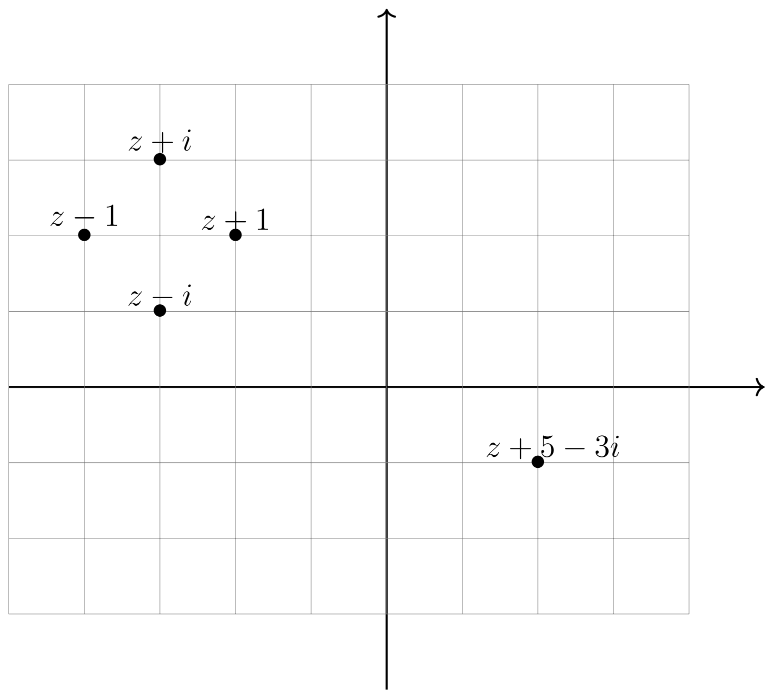
4.3 Symétrie

L'application f définie par $f(z) = \overline{z}$ correspond à la symétrique d'axe (0_x).
L'application g définie par $g(z) = -z$ correspond à la symétrie de centre 0
L'application h définie par $h(z) = -\overline{z}$ correspond à la symétrie d'axe (O_y).

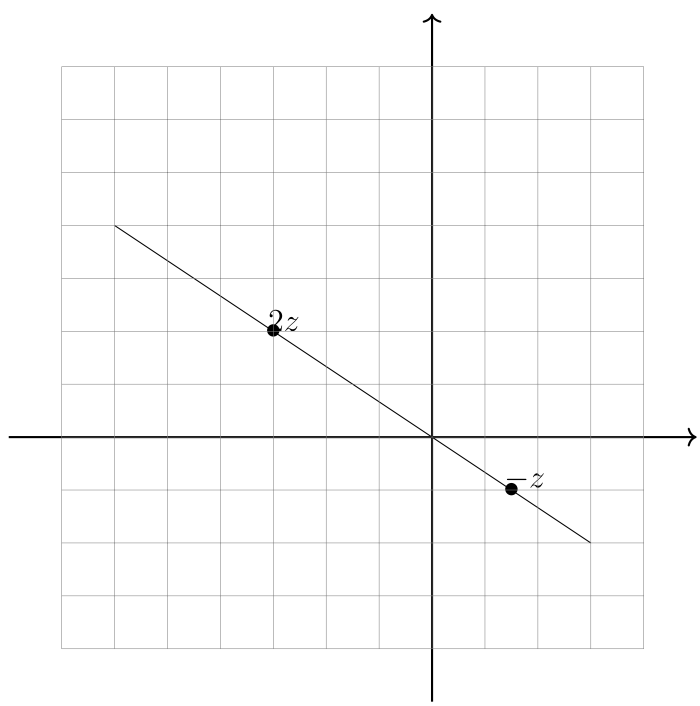


Correction des exercices

Correction 1 On place les points :



Correction 2 On place $2z$ et $-z$ puis $\{\lambda z, \lambda \in \mathbb{R}\}$ qui est la droite passant par l'origine et z:



Correction 3 1. On a

$$z_1 = -1+5i, z_2 = 1+5i, z_3 = -1+7i$$

2. On a $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. On remarque que les puissances de i sont cycliques. On a

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 4k, k \in \mathbb{Z} \\ i & \text{si } n = 4k+1, k \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } n = 4k+2, k \in \mathbb{Z} \\ -i & \text{si } n = 4k+3, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3. On place $z = a+ib$ puis $iz = -b+ia$. On remarque que la transformation opérée est la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   On a $-iz = b - ia$ et la transformation opérée est la rotation de centre 0 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

4. On en déduit que les points $(-i)^n z$, pour $n \in \mathbb{N}$, sont les quatre points $z, iz, -z, -iz$ que l'on obtient en faisant des rotations successives de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Correction 4 On a $(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$.

Correction 5 On a $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$.

Correction 6 On a

$$z_1 = \frac{1-i}{2}, z_2 = \frac{-2-3i}{13}, z_3 = \frac{4+3it}{9t^2+16} \text{ et } z_4 = \frac{-4t-i(1+5t^2)}{1+t^2}$$

Correction 7

- $|z_1| = \sqrt{10}$
- $|z_2| = \sqrt{1+25x^2}$
- $|z_3| = |1+i|\,|2+3i| = \sqrt{2}\sqrt{13} = \sqrt{26}$
- $|z_4| = |ix|\,|3-2i| = |x|\sqrt{13} = \sqrt{13x^2}$
- $|z_5| = \dfrac{|-2i|\,|i-1|}{|5+2xi|} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{25+4x^2}}$
- $|z_6| = \dfrac{|1+ix|\,|ix|}{|3i|\,|x+i|} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}\,|x|}{3\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{|x|}{3}$

Correction 8 1. On a

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} &= \frac{\cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta}{2} \\ &= \frac{2\cos\theta}{2} \\ &= \cos\theta \end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2}.2\mathcal{R}e\left(e^{i\theta}\right) = \cos\theta$$

On a également

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} &= \frac{\cos\theta + i\sin\theta - (\cos\theta - i\sin\theta)}{2i} \\ &= \frac{2i\sin\theta}{2i} \\ &= \sin\theta\end{aligned}$$

On peut aussi écrire

$$\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} - e^{\bar{i\theta}}\right) = \frac{1}{2}.2i\mathcal{I}m\left(e^{i\theta}\right) = \sin\theta$$

2. On écrit

$$\begin{aligned}e^{i\theta}+1 &= e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}} + e^{-\frac{i\theta}{2}}\right) \\ &= 2\cos\frac{\theta}{2}.e^{\frac{i\theta}{2}}\end{aligned}$$

De même, on écrit :

$$\begin{aligned}e^{i\theta}-1 &= e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}\right) \\ &= 2i\sin\frac{\theta}{2}.e^{\frac{i\theta}{2}}\end{aligned}$$

3. On raisonne par double implication:

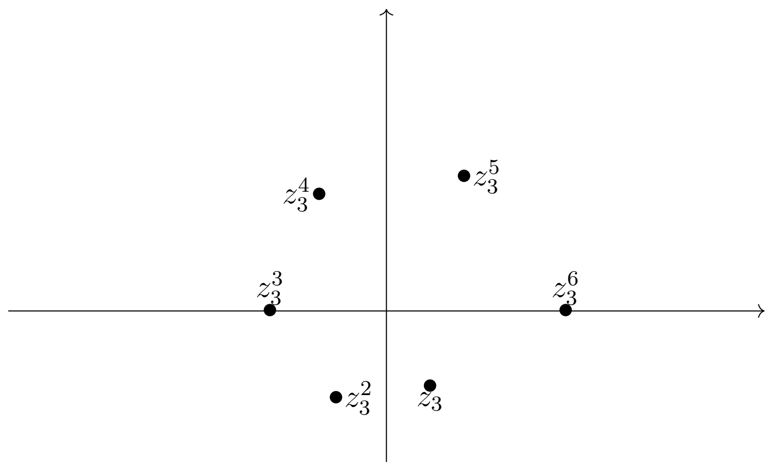
$\Leftarrow$ On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $z = \dfrac{1+ix}{1-ix}$, alors $|z| = 1$. De plus, on a $1 + ix \neq -(1-ix)$ donc $z \neq -1$. On a donc bien $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$.
$\Rightarrow$ On suppose $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$.
On remarque que pour $z \neq -1$ et $x \neq -i$, $z = \dfrac{1+ix}{1-ix} \Leftrightarrow x = \dfrac{1-z}{i(1+z)}$. On cherche donc à montrer que $\dfrac{1-z}{i(1+z)}$ est réel.
Comme z est de module 1, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. On a

$$\frac{1-z}{i(1+z)} = \frac{1-e^{i\theta}}{i(1+e^{i\theta})} = \frac{2i\sin\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\theta}{2}}}{2i\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\theta}{2}}} = \tan\frac{\theta}{2}$$

On a donc bien $\dfrac{1-z}{i(1+z)} \in \mathbb{R}$.
Ainsi, si $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$, alors en posant $x = \tan\dfrac{\theta}{2}$, on a bien $z = \dfrac{1+ix}{1-ix}$. De plus, $z \neq -1$ donc $\theta \not\equiv \pi[2\pi]$ ce qui implique $\dfrac{\theta}{2} \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$. Ainsi, $\tan\dfrac{\theta}{2}$ est bien défini, x l'est donc aussi.

Correction 9 1. $i = e^{\frac{i\pi}{2}}$, $-3i = 3e^{\frac{3i\pi}{2}}$, $1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$, $-5 = 5e^{i\pi}$, $-\frac{1}{2}i = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{i\pi}{2}}$, $-2-2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{-\frac{3i\pi}{4}}$.

2. $z_1 = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$, $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $z_3 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{i\pi}{3}}$



3. On a $z_1z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{11i\pi}{12}}$, $\dfrac{z_2}{z_3} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}e^{\frac{13i\pi}{12}}$ et $\dfrac{z_1^2z_3}{z_2} = \dfrac{16}{\sqrt{6}}e^{-\frac{3i\pi}{4}}$

   Comme $|z_3| > 1$, la suite des modules des puissances est strictement croissante, on tourne dans le sens inverse du sens trigonométrique et en s'éloignant de l'origine.

Correction 10 On écrit $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, on a donc $(1 + i)^9 = \sqrt{2}^9 e^{\frac{9i\pi}{4}}$. On écrit $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, on a donc $(1 + i)^7 = \sqrt{2}^7 e^{-\frac{7i\pi}{4}}$. On en déduit que

$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \frac{2e^{\frac{9i\pi}{4}}}{e^{-\frac{7i\pi}{4}}} = 2$$

Correction 11 On écrit $\sqrt{3} + i = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$, on a donc $(\sqrt{3} + i)^n = 2^n e^{\frac{ni\pi}{6}}$. On sait qu'un nombre complexe est réel si et seulement s'il appartient à la droite réelle, c'est à dire si son argument (à 2π près) vaut π ou $-\pi$, soit encore si son argument vaut 0 à un multiple de π près. On a donc

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3}+i)^n \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{n\pi}{6} = 0 + k\pi \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n\pi = 0 + 6k\pi \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 0 + 6k
\end{aligned}$$

On a supposé n entier naturel, k ne peut donc pas être négatif, l'ensemble des solutions est donc

$$\{6n, n \in \mathbb{N}\}$$

On peut aussi raisonner avec le conjugué car on sait qu'un nombre complexe z est réel si et seulement s'il est égal à son conjugué. On a donc

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3}+i)^n \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow 2^n e^{\frac{in\pi}{6}} = 2^n e^{-\frac{in\pi}{6}} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{n\pi}{6} = -\frac{n\pi}{6} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{n\pi}{3} = 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 6k
\end{aligned}$$

On retrouve, bien entendu, le même résultat.

On sait qu'un nombre complexe est un imaginaire pur si et seulement si son image appartient à l'axe des ordonnées, c'est à dire si son argument (à 2π près) vaut $\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$, soit encore si son argument vaut $\frac{\pi}{2}$ à un multiple de π près. On a donc

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+i)^n \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n\pi = 3\pi + 6k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 3 + 6k\end{aligned}$$

On a supposé n entier naturel, k ne peut donc pas être négatif, l'ensemble des solutions est donc

$$\{3+6n, n \in \mathbb{N}\}$$

On peut aussi raisonner avec le conjugué car on sait qu'un nombre complexe z est un imaginaire pur si et seulement s'il est égal à l'opposé de son conjugué. On a donc

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}+i)^n \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow 2^n e^{\frac{in\pi}{6}} = -2^n e^{-\frac{in\pi}{6}} \\ &\Leftrightarrow e^{\frac{in\pi}{6}} = e^{i\left(\pi - \frac{n\pi}{6}\right)} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{n\pi}{6} = \pi - \frac{n\pi}{6} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 3 + 6k\end{aligned}$$

On retrouve, bien entendu, le même résultat.

Correction 12 1. On cherche à résoudre $z = i\bar{z}$. On pose $z = x + iy$, x, y réels. On a

$$z = i\bar{z} \Leftrightarrow x + iy = ix + y \Leftrightarrow x = y$$

Les solutions sont donc les complexes z tels que $\mathcal{R}e(z) = \mathcal{I}m(z)$.

2. On cherche les solutions sous la forme $re^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. On a donc

$$z^3 = 8i \Leftrightarrow z^3 = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow r^3 = 8 \text{ et } 3\theta \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

On en déduit que les solutions sont

$$2e^{\frac{i\pi}{6}}, 2e^{\frac{5i\pi}{6}} \text{ et } -2i$$

Correction 13 1. Le point d'affixe z_1 est l'image du point $(2,1)$ par la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Pour le point d'affixe z_2, on prend l'image du point $(-1,1)$ par la rotation de centre 0 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ puis on translate de vecteur $(1,0)$.

Pour le point d'affixe z_3, On prend l'image du point $(-3,0)$ par la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{3\pi}{4}$, on translate selon le vecteur $(0,-1)$ puis on prend le symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

2. L'ensemble E_1 est le quart de cercle de centre 0 passant par $M(1,-2)$ et dont la droite (OM) est une bissectrice. L'ensemble E_2 et le translaté selon le vecteur $(2,-1)$ de l'arc de cercle de centre 0 et de rayon $\frac{1}{2}$, entre les angles 0 et $\frac{5\pi}{3}$.