Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2024-2025
DS 0

Devoir d'entrainement 1 .

Exercice 1.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Démontrer que $(\forall \varepsilon > 0, a - \varepsilon < b) \Rightarrow (a \leqslant b)$.

Exercice 2.
Où sont les erreurs dans les raisonnements suivants?

1. On souhaite démontrer que pour tout entier naturel n, $10^n + 1$ est divisible par 9.
   On a : $10^{n+1} + 1 = 10 \times 10^n + 1 = (9+1) \times 10^n + 1 = 9 \times 10^n + 10^n + 1$
   Donc, si $10^n + 1$ est divisible par 9, il en est de même de $10^{n+1} + 1$, ce qui prouve le résultat annoncé.

2. On veut prouver que tout ensemble fini a tous ses éléments égaux.
   la propriété est vraie pour $n = 1$ (cas d'un singleton c'est-à-dire d'un ensemble contenant un unique élément).

   On suppose que tout ensemble possédant n éléments a tous ses éléments égaux. Soit E_{n+1} un ensemble $n+1$ éléments :
   $$E_{n+1} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}.$$
   Avec l'ensemble de n éléments $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, on a, par hypothèse de récurrence : $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
   Avec l'ensemble de n éléments $\{x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}\}$, on a, par hypothèse de récurrence : $x_2 = x_3 = \cdots = x_{n+1}$.
   Donc $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1}$.

   On a montré que pour tout $n \geqslant 1$, tout ensemble de n éléments a tous ses éléments égaux.

Exercice 3.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x| \leqslant x^2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x+1| < -3x + 4$.
3. Après avoir précisé son domaine de définition, résoudre l'équation $\sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}$.

Exercice 4.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(n-1)$

Exercice 5.
On pose la fonction suivante
$$f : x \mapsto \frac{\sin(x) + 1}{-\cos(x) + \sqrt{3}}$$

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.
   (b) Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation $\cos(x + \frac{\pi}{6}) > \frac{1}{2}$
   Indication: Faites un dessin !

2. (a) Déterminer le domaine de définition de f. On le notera D.

(b) Déterminer le signe de f sur D.

3. Justifier que la fonction f est dérivable sur D et calculer sa fonction dérivée.
4. Déduire des questions précédentes les variations de f sur $[-\pi, \pi]$.
5. (a) Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, en quels points le graphe de f présente-t-il des tangentes horizontales ?
   (b) Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0.
   (c) Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au graphe de f au point d'abscisse π.

Exercice 6.

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la fonction f_n définie pour $x > 1$ par $f_n(x) = x^n \ln(1+x)$.

1. Étude des fonctions f_n.
   (a) Soit h_n la fonction définie pour $x > -1$ par $h_n(x) = n\ln(1+x) + \dfrac{x}{x+1}$. Étudier les variations de h_n et son signe.
   (b) Dresser, en distinguant plusieurs cas selon la valeur de n, le tableau de variations de f_n en précisant ses limites en -1 et en $+\infty$.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Montrer que f_n prend la valeur 1 en un unique point sur $]0, +\infty[$. On note $\alpha_n > 0$ tel que $f_n(\alpha_n) = 1$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\alpha_n > 1$.
   (c) Soit $x > 1$ fixé. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_{n+1}(x) > f_n(x)$. En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone puis convergente. On notera l sa limite.
3. Détermination de $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.
   (a) Montrer que $l \geqslant 1$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{\ln(1+\alpha_1)} \leqslant (\alpha_n)^n \leqslant \dfrac{1}{\ln(2)}$.
   (c) En déduire, en raisonnant par l'absurde, que la limite de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$ vaut $l = 1$.
4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \text{ et } I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

   (a) Encadrer J_n et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.
   (b) En utilisant une intégration par partie, exprimer I_n en fonction de J_n.
   (c) En déduire que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ admettent une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$ et les déterminer.

Exercice 7.
Le but de cet exercice est de déterminer toutes les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n+1) > f \circ f(n). \qquad (1)$$

1. Montrer que $f = Id_{\mathbb{N}}$ vérifie la relation (1).
   On rappelle que la fonction $Id_{\mathbb{N}}$, appelée fonction identité, est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n.$$

2. Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant la relation (1).

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété :

$$P_n : \text{"}\forall p \geqslant n, f(p) \geqslant n\text{"}.$$

   est vraie.

   (b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geqslant n.$$

   (c) Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n+1) > f(n).$$

   (d) En déduire que $f = Id_{\mathbb{N}}$.

3. Conclure.

Correction du DS n 0

Exercice 1 On va montrer la contraposée. On suppose donc $a > b$, montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a - \epsilon \geqslant b$. On pose $\varepsilon = a - b > 0$, alors $a - \varepsilon = b$ donc on a montré que la contraposée était vraie. On a donc montré l'implication $(\forall \varepsilon > 0, a - \varepsilon < b) \Rightarrow (a \leqslant b)$.

On peut aussi raisonner directement en disant que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $a - \frac{1}{n} < b$ car $\dfrac{1}{n} > 0$. On fait tendre n vers $+\infty$ et on obtient $a \leqslant b$.
L'implication à montrer peut se réécrire $(\forall \varepsilon \in]0, +\infty[, a - \varepsilon < b) \Rightarrow (a \leqslant b)$ et dans ce cas, il ne fait aucun doute que la contraposée est $(a > b) \Rightarrow (\exists \varepsilon \in]0, +\infty[, a - \varepsilon \geqslant b)$ et pas un éventuel $\epsilon < 0$.

Pensez à bien écrire ce que vous faites (raisonnement par contraposée) et ce que vous supposez (a>b)

Exercice 2

1. La propriété n'est pas initialisée (et elle est fausse pour $n = 0$ et $n = 1$).
2. La preuve de l'hérédité n'est valide que si l'on suppose que les ensembles $\{x_1, \dots, x_n\}$ et $\{x_2, \dots, x_{n+1}\}$ ont un élément en commun, ce qui n'est vrai que si $n \geqslant 2$. Or, on a initialisé avec $n = 1$ donc l'hérédité n'est pas valable.

Exercice 3

1. On peut écrire $|x| = \sqrt{x^2}$, on a alors

$$\begin{aligned} |x| \leqslant x^2 \quad & \Leftrightarrow x^2 \leqslant x^4 \text{ par positivité des quantités} \\ & \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2(x^2 - 1) \\ & \Leftrightarrow 1 \leqslant x^2 \text{ ou } x = 0 \\ & \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \backslash] - 1, 1[\text{ ou } x = 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $] - \infty, -1] \cup [1, +\infty[\cup \{0\}$.

On peut aussi procéder par disjonction de cas:

- Si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$, on a donc

$$|x| \leqslant x^2 \Leftrightarrow x \leqslant x^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant x(x - 1) \Leftrightarrow x \geqslant 1 \text{ ou } x = 0.$$

- Si $x < 0$, alors $|x| = -x$, on a donc

$$|x| \leqslant x^2 \Leftrightarrow -x \leqslant x^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant x(x + 1) \Leftrightarrow x + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -1.$$

On en déduit que les solutions sont $] - \infty, -1] \cup [1, +\infty[\cup \{0\}$.

Attention, plusieurs d'entre vous m'ont dit que $x \leqslant x^2$ était toujours vrai ce qui est, bien entendu faux Pour étudier le signe de $x^2 - x$ ou $x^2 + x$, inutile de calculer le discriminant car les racines sont évidentes.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On procède par disjonction de cas. Si $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$, on a

$$|2x + 1| < -3x + 4 \Leftrightarrow 2x + 1 < -3x + 4 \Leftrightarrow 5x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{5} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right[,$$

tandis que si $x < -\dfrac{1}{2}$, on a

$$|2x + 1| < -3x + 4 \Leftrightarrow -2x - 1 < -3x + 4 \Leftrightarrow x < 5$$

et cette dernière inégalité est toujours vraie puisque $x < -\frac{1}{2}$ On en déduit que les solutions sont $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right[=]-\infty, \frac{3}{5}[$.

On peut aussi élever au carré. Pour cela il faut prendre $x < \frac{4}{3}$ pour que les deux membres soit positifs. On a alors $|2x+1| < -3x+4 \Leftrightarrow 4x^2+4x+1 < 9x^2-24x+16 \Leftrightarrow 0 < 5x^2-28x+15$. On trouve un discriminant égal à $484 = 4 \times 121$, dont une racine est 22. Il admet deux racines : $\frac{3}{5}$ et 6. On peut alors affirmer que le polynôme est strictement positif sur $]-\infty, \frac{3}{5}[$ étant donné que l'on a supposé $x < \frac{4}{3}$ et que la deuxième racine est bien plus grande.

Beaucoup ont fait une disjonction de cas sur x et non pas $(2x+1)$.

3. Il est nécessaire d'avoir $x \geqslant 2$ et $x \geqslant -\frac{3}{2}$ pour que les racines soient bien définies. Soit donc $x \geqslant 2$, on raisonne par équivalence:

$$\sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x-2 = 2x+3 \Leftrightarrow x = -5$$

La dernière égalité est fausse puisque l'on a supposé $x \geqslant 2$ donc, par équivalence, l'équation n'a pas de solution.

Certains m'ont écrit des inégalités strictes pour le domaine de définition ce qui est faux, la racine carrée est bien définie en 0.

Exercice 4 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n : "$u_n = n(n-1)$". La propriété est vraie aux rangs $0, 1, 2$. On suppose que pour un certain entier $n \geqslant 0$, P_n, P_{n+1} et P_{n+2} sont vraies, montrons que P_{n+3} est vraie. On a

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n \\ &= 3(n+2)(n+1) - 3(n+1)n + n(n-1) \text{ par hypothèses de récurrence} \\ &= 6(n+1) + n(n-1) \\ &= n^2 + 5n + 6 \\ &= (n+2)(n+3) \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n+3$, elle est donc héréditaire. Par le principe de récurrence triple, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n(n-1).$$

On pourrait aussi montrer l'hérédité ainsi : soit $n \geqslant 2$, on suppose que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k est vraie, montrons que P_{n+1} est vraie. Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$u_{n+1} = 3u_n - 3u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Remarque : pour que cela ait du sens, il faut bien supposer $n \geqslant 2$, ce qui est possible puisque l'on a initialisé jusqu'au rang 2 inclus.

On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3n(n-1) - 3(n-1)n + (n-2)(n-3) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= 6n - 6 + n^2 - 5n + 6 \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n+1$, elle est donc héréditaire. Par le principe de récurrence triple, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n(n-1).$$

On peut aussi le rédiger à l'aide d'une récurrence forte, on voit alors que l'on ne va pouvoir prouver l'hérédité que si l'on suppose $n \geqslant 2$, ce qui n'est pas possible si on ne montre que u_0 ! Il faut donc initialiser aux rangs $0, 1, 2$ puis supposer qu'il existe un entier n tel que P_k est vraie pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on montre alors, comme ci-dessus, que P_{n+1} est vraie (à condition d'avoir supposé $n \geqslant 2$), on a donc, par le principe de récurrence forte :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n(n-1).$$

Exercice 5 1. (a) On a $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou} \\ \\ x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

On a donc $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Il ne faut pas oublier de raisonner modulo 2π

(b) On fait un dessin si nécessaire. Pour $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(y) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, -\frac{\pi}{3} + 2k\pi < y < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

donc avec $y = x + \frac{\pi}{6}$, on a $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$. Or, $x \in [-\pi, \pi]$ et $\frac{\pi}{6} - 2\pi < -\pi \leqslant x \leqslant \pi < -\frac{\pi}{6} + 2\pi$ donc l'unique intervalle solution est pour $k = 0$, ainsi $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right[$.

2. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \neq \sqrt{3}$ car $\sqrt{3} > 1$. Le domaine de définition de f est donc $D = \mathbb{R}$.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x) \leqslant 1$ donc $-\cos(x) + \sqrt{3} > 0$ et $\sin(x) \geqslant -1$ donc $\sin(x) + 1 \geqslant 0$. On a donc f positive sur $\mathbb{R}$.

   Attention, certains ont cherché les points d'annulation de $\sin(x) + 1$, ce qui les a induit en erreur. Pensez donc à perdre cette habitude de chercher les points d'annulation pour déterminer le signe.

3. La fonction f est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

   quotient de fonctionS dérivableS est insuffisant Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) - 1}{(\sqrt{3} - \cos(x))^2}$$

4. Là il faut regarder les premières questions qui vous mettent sur la voie. En effet, on remarque que

$$f'(x) = \frac{2\cos(x + \frac{\pi}{6}) - 1}{(\sqrt{3} - \cos(x))^2},$$

   $f'(x)$ est donc du signe de $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$. On a donc le tableau de variations suivant:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		π
$f'(x)$	$-$	z	$+$	z	$-$		
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{3}+1}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}+1}$

5. (a) Le graphe de f présente des tangentes horizontales en les points où la dérivée s'annule donc en $x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{\pi}{6}$.

(b) On a $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$ et $f'(0) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}-1)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$, l'équation cartésienne de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 est donc

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}-1}(x+1).$$

(c) On a $f(\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$ et $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)^2} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$, l'équation cartésienne de la tangente au graphe de f au point d'abscisse π est donc :

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}+1}(1-x+\pi)$$

Exercice 6 1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. La fonction h_n est dérivable sur son domaine de définition et pour tout $x > -1$, on a

$$h_n'(x) = \frac{n}{1+x} + \frac{(x+1)-x}{(1+x)^2} = \frac{n(1+x)+1}{(1+x)^2}.$$

On en déduit que h_n est strictement croissante sur son domaine de définition. On a $h_n(0) = 0$ donc $h_n(x)$ est du même signe que x à savoir $h_n(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Beaucoup d'erreurs pour déterminer le signe de h_n'. La plus grosse erreur étant de ne pas remarquer que $-1 - \dfrac{1}{n}$ est strictement inférieur à -1 donc que l'inégalité $x > -1 - \dfrac{1}{n}$ est toujours vraie

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. La fonction f_n est dérivable sur son domaine de définition et pour tout $x > -1$, on a

$$f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(1+x) + \frac{x^n}{1+x} = x^{n-1}\left(n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right) = x^{n-1}h_n(x).$$

Une majorité écrasante n'a pas remarqué que la dérivée de f_n s'exprimait à l'aide de h_n (et donc que les questions précédentes étaient là pour une bonne raison)

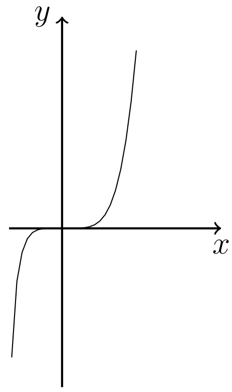
Si $n-1$ est pair, c'est-à-dire si n est impair, f_n' est du signe de h_n donc négative jusqu'à zéro puis positive. Si n est pair, alors f_n' est toujours positive.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = +\infty$ dans les deux cas.

Si n est pair $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = -\infty$, si n est impair, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = (-1)^n = -1$.

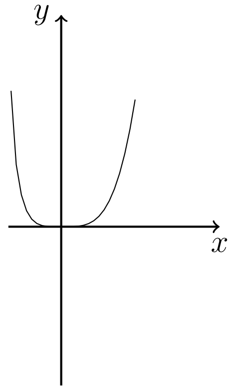
On a donc, si n est pair

x	-1		$+\infty$
$f_n'(x)$	||	$+$	
f_n	|| -∞	$\nearrow$	$+\infty$



et si n est impair

x	-1		0		$+\infty$
$f_n'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f_n	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



2. Soit n un entier naturel non nul.

   (a) La fonction f_n est continue. On a $f_n(0) = 0$ et $f_n(e-1) = (e-1)^n > 1$ donc l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution entre 0 et $e-1$. Par ailleurs, f_n étant strictement croissante, cette solution est unique. J'ai accepté tout ce qui parlait de 1 compris dans les images (pour l'existence d'un antécédent) et de stricte monotonie pour l'unicité. Je n'ai pas pénalisé les phrases du type " par le TVI, il existe un unique" même si ça m'a démangé, et je n'ai pas pénalisé non plus l'oubli de la continuité.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule $f_n(1) = \ln(2) < \ln(e)$ donc $f_n(1) < 1$, on en déduit que $f_n(1) < f_n(\alpha_n)$ et comme f_n est strictement croissante, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\alpha_n > 1$.

   (c) Soit $x > 1$ fixé et $n \in \mathbb{N}$. Alors $x^{n+1} > x^n$ et, comme $\ln(1+x) > 0$, on a bien $f_{n+1}(x) > f_n(x)$. On en déduit, en appliquant cette inégalité à $x = \alpha_{n+1}$, que

   $$f_n(\alpha_{n+1}) < 1.$$

   Or $1 = f_n(\alpha_n)$, on a donc $f_n(\alpha_{n+1}) < f_n(\alpha_n)$. Par stricte croissance de f_n, on a $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ donc $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Par ailleurs, on a vu qu'elle était minorée par 1, elle est donc convergente. Attention, on ne sait rien (encore) de la limite de la suite !!

3. (a) On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\alpha_n > 1$ donc, en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $l \geqslant 1$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Par définition de α_n, on a $\alpha_n^n \ln(1+\alpha_n) = 1$ donc $\alpha_n^n = \dfrac{1}{\ln(1+\alpha_n)}$.

   Par ailleurs, on sait que $1 < \alpha_n < \alpha_1$ puisque la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante et minorée par 1. On en déduit, par décroissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(1+x)}$, que

   $$\frac{1}{\ln(1+\alpha_1)} \leqslant \frac{1}{\ln(1+\alpha_n} \leqslant \frac{1}{\ln(2)},$$

   puis, en remplaçant $\dfrac{1}{\ln(1+\alpha_n}$ par α_n^n, l'encadrement souhaité à savoir :

   $$\frac{1}{\ln(1+\alpha_1)} \leqslant (\alpha_n)^n \leqslant \frac{1}{\ln(2)}.$$

   (c) On suppose par l'absurde que $l > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln(\alpha_n)} = +\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n) > 0$ puisque l'on a supposé $l > 1$. On obtient une contradiction car on a montré à la question précédente, que $\alpha_n^n \leqslant \dfrac{1}{\ln(2)}$.

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \text{ et } I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

(a) Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant x^{n+1},$$

donc, par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant J_n \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x$, soit $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+2}$. On en déduit, par le thm des gendarmes, que $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.

J'ai laissé cette question pour voir ce qu'il en ressortirait bien que n'ayons jamais vu ensemble ce type de majoration.

(b) On pose $u(x) = \ln(1+x)$ et $v'(x) = x^n$, on a $u'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. On a donc

$$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x,$$

donc

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}J_n.$$

(c) En passant à la limite dans l'égalité trouvée à la question précédente et en utilisant le fait que $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$(n+1)I_n = \ln(2) - J_n,$$

donc $\lim_{n\to+\infty}(n+1)I_n = \ln(2)$.

On remarque ensuite que $nI_n = \frac{n}{n+1}(n+1)I_n$, avec $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} nI_n = \ln(2)$.

Exercice 7 1. Soit $f = Id_{\mathbb{N}}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n+1) = n+1$ et $f\circ f(n) = f(f(n)) = f(n) = n$. On a donc bien $f(n+1) > f\circ f(n)$ donc $f = Id_{\mathbb{N}}$ vérifie la relation (1).

2. Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant la relation (1).

(a) On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 0$, la propriété est vraie car f est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrons que P_1 est vraie pour comprendre ce qui se passe (cela n'est pas nécessaire, P_0 suffit). Soit $p \geqslant 1$. On applique la relation (1), on obtient $f(p) > f\circ f(p-1)$. Or, par hypothèse, f est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc $f\circ f(p-1) \geqslant 0$. On en déduit que $f(p) > 0$ donc $f(p) \geqslant 1$. Ceci étant valable pour tout $p \geqslant 1$, la propriété P_1 est vraie.

Soit maintenant un entier $n \geqslant 1$ tel que, pour tout $p \geqslant n$, $f(p) \geqslant n$. Montrons que pour tout $p \geqslant n+1$, $f(p) \geqslant n+1$.

Soit $p \geqslant n+1$. On a $f(p) > f\circ f(p-1)$. On sait que $p-1 \geqslant n$ donc, par hypothèse de récurrence, $f(p-1) \geqslant n$. On peut donc appliquer (encore!) l'hypothèse de récurrence à l'entier $f(p-1)$. On obtient $f(f(p-1)) \geqslant n$ donc $f\circ f(p-1) \geqslant n$. Ainsi, on a $f(p) > n$ donc $f(p) \geqslant n+1$. L'hypothèse est héréditaire. Par le principe de récurrence, on a montré que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geqslant n\; f(p) \geqslant n.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a montré que $\forall p \geqslant n, f(p) \geqslant n$. En particulier, on a $f(n) \geqslant n$. Ceci étant valable pour tout entier n, on a montré

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geqslant n.$$

Beaucoup ont fait cette question en admettant la précédente, bon réflexe!

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente appliquée à l'entier $f(n)$, on a

$$f\left(f(n)\right) \geqslant f(n).$$

De plus, on a $f(n+1) > f \circ f(n)$ donc $f(n+1) > f(n)$. Ceci étant valable pour tout entier n, on a montré

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n+1) > f(n).$$

(d) On suppose, par l'absurde, qu'il existe n_0 tel que $f(n_0) \neq n_0$. On a montré que l'on a $f(n_0) \geqslant n_0$, on a donc $f(n_0) > n_0$. On a alors,

$$f \circ f(n_0) > f(n_0) \text{ puisque } f \text{ est strictement croissante,}$$

donc $f \circ f(n_0) \geqslant f(n_0) + 1$ et $f(n_0) \geqslant n_0 + 1$ donc $f \circ f(n_0) \geqslant n_0 + 2$. Comme f vérifie la relation (1), on a $f(n_0 + 1) > n_0 + 2$. On a donc $f \circ f(n_0 + 1) > f(n_0 + 2)$ par stricte croissance de f. Ceci contredit le fait que f vérifie (1). On a donc montré, par l'absurde, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$. On a donc $f = Id_{\mathbb{N}}$.

3. On a montré que si f vérifie (1), f est égale à l'identité. On a également montré que l'identité vérifiait bien la relation (1) donc, par analyse synthèse (à l'envers) on a montré que l'unique solution est l'identité.

Là encore, plusieurs d'entre vous ont su aller chercher ce point en admettant ce qui précédait.