Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2023-2024
Feuille 3

TD n3: Calculs algébriques.

classique demande réflexion

1 Manipulation et majoration de sommes

Exercice 1.
Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} x_k = n(n+2)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer les valeurs de

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{6} x_k$
2. $S_2 = \sum_{k=0}^{n+1} x_k$
3. $S_3 = \sum_{k=0}^{2n} x_k$
4. $S_4 = \sum_{k=0}^{n} 2x_k$
5. $S_5 = \sum_{k=n+1}^{2n} x_k$

Exercice 2.

1. Écrire la somme des entiers impairs compris entre 1 et 777 inclus à l'aide du symbole $\sum$ et la calculer.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)$.

Exercice 3.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire l'expression $U_n = 1 - 2x + 4x^2 + \cdots + (-1)^n 2^n x^n$ à l'aide du signe $\sum$ et la calculer.

2 Changement d'indice

Exercice 4.
On pose $S = \sum_{k=m}^{n} k$.

1. Faites un changement d'indices en conservant les mêmes bornes.
2. Retrouvez l'expression de S en calculant $2S$.

Exercice 5.
Soit $S = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)^2$. Faites un changement de variables dans S tel que :

1. La somme varie de 0 à $n-1$.
2. La somme soit comptée à l'envers avec les mêmes bornes.
3. La somme soit comptée à l'envers et commence à $k=0$.

3 Somme et produit particuliers

Exercice 6.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} 3^{1-k}$.

Exercice 7.
Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $\prod_{k=0}^{n} 2^k$.

Exercice 8.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\prod_{k=1}^{n} (5n+3-k)$.

Exercice 9.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

Exercice 10.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\prod_{i=1}^{n} 2i$. En déduire $\prod_{i=1}^{n} (2i+1)$.

4 Somme et produit doubles

Exercice 11.
Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\sum_{q=0}^{n} \sum_{p=0}^{q} \sum_{k=0}^{p} 2^k$$

Exercice 12.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$.

Exercice 13.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)$.

Exercice 14.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{p=0}^{k} p$.

Exercice 15.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{p=0}^{k} k$

Exercice 16.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{p=0}^{k} n$.

Exercice 17.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{i+j \leqslant n} i$.

Exercice 18.

Soit $n \geqslant 1$ et $x_1, x_2, ..., x_n$ des réels vérifiant : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = n$, et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = n$. Prouver que $x_k = 1 \; \forall k \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 19.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$.

5 Somme et produit télescopiques

Exercice 20.

Simplifier le produit $\displaystyle\prod_{k=3}^{31} \frac{2k-1}{2k+1}$ et l'écrire sous forme d'une fraction irréductible.

Exercice 21.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - k^3$.

1. Calculer cette somme en remarquant qu'elle est télescopique.
2. Exprimer cette somme en fonction de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ en développant son terme général.
3. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 22.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

Exercice 23.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

6 Binôme de Newton et coefficients binomiaux

Exercice 24.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} 2^{1-k}$.

Exercice 25.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tbinom{n}{k} (-1)^k$.

Exercice 26.

A l'aide de la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer les sommes suivantes:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\tbinom{n}{k}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\tbinom{n}{k}$.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k+1}\tbinom{n}{k}$.
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \tfrac{\alpha^k}{k+1}\tbinom{n}{k}$.
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}(-1)^k$.

Exercice 27.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

1. Exprimer S à l'aide du changement de variable $j = 2n+1-k$.
2. En déduire la valeur de $2S$ puis de S.

Exercice 28.

Soient $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des réels telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} \alpha_{n-k}$. Donner une expression de α_n en fonction de $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$.

Exercice 29.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \text{pair}}} \binom{n}{j}$ et $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \text{impair}}} \binom{n}{j}$.

7 Si besoin d'encore un peu d'entrainement

Exercice 30.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a \in \mathbb{R}$. On pose $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ka}{n}}$.

1. Expliciter V_1 et V_2.
2. Calculer V_n .

Exercice 31.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire le nombre $1,11\dots1$ (avec n chiffres après la virgule) sous la forme d'une somme de termes d'une suite géométrique et calculer cette somme. En faisant tendre n vers $+\infty$, en déduire que le nombre $1,11\dots$ (avec une " infinité ", de chiffres après la virgule) est rationnel et l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Même question avec $0,99\dots9$.

Exercice 32.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1)^2 - 2\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1)$.

Exercice 33.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2n-4+k)$

Exercice 34.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (2i-j)$.

Exercice 35.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{i+j<n} (i+j)$.

Exercice 36.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$.

Exercice 37.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)^4 - k^4$.

1. Calculer cette somme en remarquant qu'elle est télescopique.
2. Exprimer cette somme en fonction de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ en développant son terme général.
3. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Exercice 38.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kk!$.

Exercice 39.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Exercice 40.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \frac{1}{k(k+1)}}{\cos \frac{1}{k} \cos \frac{1}{k+1}}$.

Exercice 41.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}$.

Exercice 42.
Soit $(n,p,k) \in \mathbb{N}^3$ avec $k \leqslant p \leqslant n$. Montrer que $\displaystyle\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

Exercice 43.
Utiliser la formule du binôme de Newton pour montrer que $(1,01)^{100} > 2$.

Exercice 44.
Soient $k \leqslant n$ deux entiers, montrer que $\displaystyle\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Exercice 45.

1. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}$.

Exercice 46.

1. Montrer que si (α_i) est une famille d'entiers et a un réel, alors :
$$\prod_{i=1}^{n} a^{\alpha_i} = a^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{i+j\leqslant n} a^i b^j$ pour a et b réels.

8 Une fois qu'on est à l'aise

Exercice 47.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (3k+1)(3k-1)$.

Exercice 48.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n)$ $2n$ réels tels que:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_n \quad \text{et} \quad y_1 \leqslant y_2 \leqslant ... \leqslant y_n.$$

Montrer que : $\displaystyle\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.
On pourra examiner la quantité : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} (x_i - x_j)\,(y_i - y_j)$.

Exercice 49.

1. Soit une famille de réels $(s_{i\,j})_{i \in [\![1,n]\!],\, j \in [\![1,n]\!]}$ tels que $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $s_{i\,j} = s_{j\,i}$, et $s_{i\,i} = 0$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i\,j} = 2 \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} s_{i\,j}$.

2. En déduire que si $(a_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $(b_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ sont deux familles de réels :
$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$$

3. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwartz:
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$$

   Remarque : cette inégalité peut aussi se démontrer directement par récurrence.

Exercice 50.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \sin 1 \sin(k+1)$

Mémo

- Comment effectuer un changement d'indice?
  On pose le changement d'indice, on détermine les nouvelles bornes de cet indice puis on exprime le terme général en fonction du nouvel indice.
- Comment additionner deux sommes/multiplier deux produits?
  On se ramène à des bornes identiques, quitte à enlever des termes extrêmes.
- Comment permuter deux signes sommes/produits?
  Si les bornes ne dépendent pas des indices, on les permute sans rien changer. Sinon, il faut permuter le rôle des indices pour déterminer les bornes des deux sommes.
- Comment calculer une somme avec des coefficients binomiaux?
  Selon la somme, on fait apparaître la formule du binôme de Newton ou on utilise les relations du cours sur les coefficients binomiaux.
- Comment simplifier une expression avec des factorielles?
  Il faut revenir à la définition de la factorielle en tant que produit.
- Comment déterminer les coefficients binomiaux pour de petites puissances?
  il faut utiliser le triangle de Pascal.