

TD 4: Ensembles et applications.

 classique  demande réflexion

1 Relations entre ensembles

Exercice 1.

Montrer les égalités suivantes :

$$]-1, 1[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right] \text{ et } [-1, 1] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right]$$

Exercice 2.

Soit E un ensemble. Montrer par un raisonnement direct puis par contraposée l'assertion suivante :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad (A \cap B = A \cup B) \Leftrightarrow A = B,$$

Exercice 3.

Montrer que $\{z \in \mathbb{C}, |z + i| = |z - i|\} = \mathbb{R}$.

2 Images directe et réciproque par une application

Exercice 4.

Soit l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $f : x \mapsto x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants :

$$f([-3, -1]), f([-2, 1]), f([-3, -1] \cup [-2, 1]) \text{ et } f([-3, -1] \cap [-2, 1]).$$

2. Déterminer les ensembles suivants :

$$f^{-1}(]-\infty, 2]), f^{-1}([1, +\infty[), f^{-1}(]-\infty, 2] \cap [1, +\infty[) \text{ et } f^{-1}(]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[).$$

3 Détermination des propriétés d'une fonction

Exercice 5.

Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives:

$$\left. \begin{array}{l} 1. f_1 : \begin{cases}]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x + \frac{1}{x} \end{cases} \\ 2. f_2 : \begin{cases} [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x + \frac{1}{x} \end{cases} \\ 3. f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x - y, -2x + 2y) \end{cases} \end{array} \right|$$

Exercice 6.

Soit $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$. Est-elle injective? surjective?

Exercice 7.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle que $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{sinon.} \end{cases}$

Démontrer que $f \circ f = id$. Que peut-on en déduire sur f ?

4 Bijection induite et réciproque

Exercice 8.

On considère l'application $f : \begin{cases} [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 8} \end{cases}$ Montrer que f est injective. En déduire que f induit une bijection \tilde{f} sur un intervalle qu'on précisera et préciser la bijection réciproque de \tilde{f} .

Exercice 9.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?

2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

3. Montrer que la restriction $g : \begin{cases} [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est une bijection.

4. Retrouver le résultat des deux questions précédentes en étudiant les variations de f .

Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

1. Montrer que f induit une bijection \tilde{f} de \mathbb{R} vers $]-1, 1[$.

2. Déterminer l'expression de $(\tilde{f})^{-1}(y)$.

5 Exercices théoriques

Exercice 11.

On considère trois ensembles A, B, C et des applications $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$.

1. Montrer que $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective,
2. Montrer que $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

Exercice 12.

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ surjective telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq n$, montrer que $f(0) = 0$.

Exercice 13.

Soient E un ensemble et $h : E \rightarrow E$ une application. Montrer que h^2 bijective implique h bijective puis montrer que s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que h^n est bijective, alors h est bijective.

Exercice 14.

Soit E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f = f \circ f \circ f$. Montrer que

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective}.$$

Exercice 15.

Soit $f : X \rightarrow Y$. Montrer que pour tout $B \in \mathcal{P}(Y)$, $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.

6 Si besoin d'encore un peu d'entraînement

Exercice 16.

Soit E un ensemble. Montrer par un raisonnement direct et par contraposée l'assertion suivante :

$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3 \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Leftrightarrow B = C.$$

Exercice 17.

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, montrer que

$$E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B) \text{ et } E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B).$$

Exercice 18.

Montrer que $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C}, |z - 1| = |z + 1|\}$.

Exercice 19.

Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)\} = \{z \in \mathbb{C}, |z - 1| = |z - i|\}$

Exercice 20.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x^2 + 3$. Déterminer $f^{-1}([0, +\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty, -3])$ et $f([-2, 4])$.

Exercice 21.

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{cases}.$$

Déterminer $f([0, 1])$, $f([-3, 1])$ et $f^{-1}(] \frac{1}{4}, 1])$.

Exercice 22.

Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives.

$$1. f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 2y, x - y) \end{cases}$$

$$2. f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x - y^2 \end{cases}$$

$$3. f_3 : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 23.

Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ telle que $x \mapsto x^2 - 1$. f est-elle bijective ?

Exercice 24.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'image de $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \ln(x) \end{cases}$.

Exercice 25.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x + 1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{cases}$

1. Ces fonctions sont-elles injectives? surjectives?
2. Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 26.

L'application $f : \begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (n, m) & \longmapsto & (n + m, n - m) \end{cases}$ est-elle injective? surjective?

Exercice 27.

Soit la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{3x + 5}{x - 2} \end{cases}$.

Montrer que f induit une bijection d'une partie A de \mathbb{R} dans une partie B de \mathbb{R} . On note h la fonction induite, donner une expression de sa bijection réciproque.

Exercice 28.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \\ (u, v) & \longmapsto & \left(uv, \frac{u}{v} \right) \end{cases}$ Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .

Exercice 29.

Soit $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, (z, z') \mapsto (2z + z', 3z - z')$. Vérifier que f est bijective et donner l'expression de f^{-1} .

Exercice 30.

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications et $h : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (f(x), g(x)) \end{cases}$

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors h est injective.
2. On suppose f et g surjectives. h est-elle surjective?

7 une fois qu'on est à l'aise**Exercice 31.** 

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. Soient A et B deux sous-ensembles de E .

1. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et donner un exemple où il n'y a pas égalité.
2. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 32. 

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x - 2y, 2x + 3y) \end{cases}$

1. Montrer que f est bijective.
2. Soit $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x + y = 1\}$. Déterminer $f(\Delta)$ et $f^{-1}(\Delta)$.

Exercice 33.  

Soit E un ensemble.

1. Montrer qu'il existe une injection $E \rightarrow \mathcal{P}(E)$.
2. Soient $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ et $A := \{x \in E, x \notin f(x)\}$. Montrer que $A \notin \text{Im}(f)$. En déduire qu'il n'existe pas de bijection $E \rightarrow \mathcal{P}(E)$.

Exercice 34.

Soient X et Y deux ensembles et $f : X \rightarrow Y$ une application. Montrer l'équivalence :

f surjective $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{P}(Y), f(f^{-1}(B)) = B$.

Memo

- Comment montrer une inclusion $E \subset F$? Prendre un élément de E et montrer qu'il appartient à F .
- Comment montrer que deux ensembles sont égaux?
 - Procéder par double inclusion
 - Raisonner par équivalence.
- Comment déterminer l'image réciproque d'un ensemble ? Appliquer la définition: déterminer les antécédents des éléments de l'ensemble.
- Comment déterminer l'image d'une fonction/ d'un ensemble?
 - Chercher pour quel(s) Y l'équation $f(X) = Y$ admet des solutions
 - Dresser son tableau de variations (dans le cas d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R})
- Comment déterminer si une fonction est surjective?
 - Déterminer si l'équation $f(X) = Y$ admet des solutions
 - Exhiber un élément qui ne possède pas d'antécédent
 - Dresser le tableau de variations
- Comment déterminer si une fonction est injective?
 - Prendre deux éléments ayant même image et déterminer s'ils sont nécessairement égaux.
 - Trouver deux éléments distincts ayant même image
 - Déterminer ses variations (si c'est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R})
- Comment savoir si une fonction est bijective?
 - Étudier l'équation $f(X) = Y$
 - Exhiber l'inverse de la fonction
 - Étudier l'injectivité et la surjectivité
- Comment déterminer la bijection réciproque d'une fonction ? Résoudre $f(X) = Y$ c'est-à-dire exprimer Y en fonction de X .
- Comment montrer qu'une fonction induit une bijection?
 - Étudier l'équation $f(X) = Y$
 - Dresser le tableau de variations

