

Correction du TD n 3

Correction 1 1. $S_1 = 48$.

2. $S_2 = (n + 1)(n + 3)$.

3. $S_3 = 2n(2n + 2) = 4n(n + 1)$

4. $S_4 = 2n(n + 2)$.

5. $S_5 = S_3 - \sum_{k=0}^n x_k = 4n(n + 1) - n(n + 2) = n(3n + 2)$.

Correction 2 1. Cette somme s'écrit $\sum_{k=0}^{388} (2k + 1)$. On la calcule:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{388} (2k + 1) &= 2 \sum_{k=0}^{388} k + \sum_{k=0}^{388} 1 \\ &= 388 \times 389 + 389 \\ &= 389^2 \end{aligned}$$

2. On procède comme ci-dessus:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (2k + 1) &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\ &= (n - 1)n + n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

Correction 3 On écrit

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=0}^n (-2x)^k \\ &= \frac{1 - (-2x)^{n+1}}{1 + 2x} \end{aligned}$$

Correction 4 1. On pose $j = n + m - k$, alors si k varie de m à n , j varie de n à m . On remplace k par $n + m - j$. On a donc, en remettant les bornes dans l'ordre croissant :

$$S = \sum_{j=m}^n (n + m - j).$$

2. D'après la question précédente, on a $S = \sum_{k=m}^n (n + m - k)$ car j est une variable muette donc, en sommant les deux expressions connues de S , on a :

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{k=m}^n (n + m - k) + \sum_{k=m}^n k \\ &= \sum_{k=m}^n (n + m) \\ &= (n + m)(n - m + 1). \text{ car la somme possède } n + m - 1 \text{ termes} \end{aligned}$$

On en déduit que $S = \frac{(n + m)(n - m + 1)}{2}$.

Correction 5 1. On pose $j = k - 1$. k varie de 1 à n donc j varie de 0 à $n - 1$.

On a donc : $S = \sum_{k=1}^n (n + 1 - k)^2 = \sum_{j=0}^{n-1} (n - j)^2$.

2. On pose $j = n + 1 - k$. k varie de 1 à n donc j varie de n à 1. On a donc :

$$\sum_{k=1}^n (n + 1 - k)^2 = \sum_{j=1}^n j^2.$$

3. On pose $j = n - k$. k varie de 1 à n donc j varie de $n - 1$ à 0. On a donc :

$$\sum_{k=1}^n (n + 1 - k)^2 = \sum_{j=0}^{n-1} (j + 1)^2.$$

Correction 6 On a $\sum_{k=0}^n 3^{1-k} = \sum_{k=0}^n \frac{3}{3^k} = 3 \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k}$.

On utilise ensuite la formule de la somme géométrique:

$$3 \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} = 3 \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{2} \left(1 - 3^{-(n+1)} \right).$$

Correction 7 On a $\prod_{k=0}^n 2^k = 2^{\sum_{k=0}^n k} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Correction 8 On pose $j = 5n + 3 - k$. Quand k vaut 1, j vaut $5n + 2$, quand k vaut n , j vaut $4n + 3$. On a donc :

$$\prod_{k=1}^n (5n + 3 - k) = \prod_{j=4n+3}^{5n+2} j = \frac{\prod_{j=1}^{5n+2} j}{\prod_{j=1}^{4n+2} j} = \frac{(5n+2)!}{(4n+2)!}.$$

Correction 9 On sait que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $k! \leq n!$ donc, par sommation des inégalités, on obtient

$$\sum_{k=0}^n k! \leq n.n! \leq (n+1).n!.$$

On a donc bien l'inégalité souhaitée puisque $(n+1).n! = (n+1)!$

Correction 10 On a $\prod_{i=1}^n 2i = 2^n \prod_{i=1}^n i = 2^n n!$. Pour le deuxième produit, on remarque que :

$$\prod_{i=1}^n (2i+1) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq 2n+1 \\ k \text{ impair}}} k.$$

De plus, le produit des entiers impairs inférieurs à $2n+1$ est égal au produit de tous les entiers inférieurs à $2n+1$ divisé par le produit des pairs, autrement dit :

$$\prod_{i=1}^n (2i+1) = \frac{\prod_{j=1}^{2n+1} j}{\prod_{i=1}^n 2i},$$

ce qui implique, en utilisant le résultat trouvé pour le premier produit:

$$\prod_{i=1}^n (2i+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

Correction 11 On écrit

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^n \sum_{p=0}^q \sum_{k=0}^p 2^k &= \sum_{q=0}^n \sum_{p=0}^q (2^{p+1} - 1) \\ &= \sum_{q=0}^n \sum_{p=0}^q 2^{p+1} - \sum_{q=0}^n \sum_{p=0}^q 1 \\ &= \sum_{q=0}^n 2(2^{q+1} - 1) - \sum_{q=0}^n (q+1) \\ &= \sum_{q=0}^n 2^{q+2} - \sum_{q=0}^n 2 - \sum_{q=0}^n q - \sum_{q=0}^n 1 \\ &= 4(2^{n+1} - 1) - 3(n+1) - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 2^{n+3} - 4 - \frac{(n+1)(n+6)}{2} \end{aligned}$$

Correction 12 On écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k 2^k &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k 2^k \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n 2^k \\ &= \sum_{j=1}^n 2^j \frac{2^{n-j+1} - 1}{2 - 1} \\ &= \sum_{j=1}^n 2^{n+1} - \sum_{j=1}^n 2^j \\ &= n 2^{n+1} - 2(2^n - 1) \\ &= n 2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 \end{aligned}$$

Correction 13 On coupe la somme en deux :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i + \sum_{1 \leq i, j \leq n} j.$$

On a :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n i = \sum_{j=1}^n \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

De même,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j = \sum_{i=1}^n \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

On a donc :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j) = n^2(n + 1).$$

Remarque. On peut aussi dire que i et j jouent des rôles symétriques pour justifier l'égalité des deux sommes.

Correction 14 On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{p=0}^k p &= \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} \text{ en utilisant la formule trouvée à l'exercice 21} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{k=1}^n \sum_{p=0}^k p = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Correction 15 On a :

$$\sum_{k=1}^n \sum_{p=0}^k k = \sum_{k=1}^n k(k+1).$$

On reconnaît la somme calculée dans l'exercice 14. On a donc :

$$\sum_{k=1}^n \sum_{p=0}^k k = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Correction 16 On a

$$\sum_{k=1}^n \sum_{p=0}^k n = \sum_{k=1}^n n(k+1) = n \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{n^2(n+3)}{2}$$

Correction 17 On pose $k = i + j$. L'entier k varie de 0 à n , $j = k - i$ et i varie donc de 0 à k (car i est forcément plus petit que $i + j$). On a donc :

$$\sum_{i+j \leq n} i = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k i = \sum_{k=0}^n \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n k.$$

La première somme a été calculée à l'exercice 21. On a donc :

$$\sum_{i+j \leq n} i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{12} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Correction 18 Nous allons calculer la somme $S = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i - x_j)^2$. On développe son terme général :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j + \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_j^2 \end{aligned}$$

On a :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{j=1}^n n = n^2.$$

De même, $\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_j^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j^2 = \sum_{i=1}^n n = n^2$. Quant à la somme du milieu, elle est égale à

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_i x_j = \sum_{j=1}^n \left(x_j \sum_{i=1}^n x_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) = n^2.$$

On en déduit que $S = 0$. Or, c'est la somme de carrés réels donc positifs, ils sont donc tous nuls. On en déduit que les réels sont tous égaux et, comme leur somme vaut n , ils sont tous égaux à 1.

Correction 19 On coupe la somme en deux :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \max(i, j) + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \max(i, j) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j j + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} i \\
&= \sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{i=2}^n i(i-1) \\
&= \sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{i=1}^n i(i-1) \\
&= \sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n i \\
&= 2 \left(\sum_{j=1}^n j^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n i \right) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} \text{ en utilisant la formule trouvée à l'exercice 21}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

Correction 20 On écrit

$$\begin{aligned}
\prod_{k=3}^{31} \frac{2k-1}{2k+1} &= \prod_{k=3}^{31} \frac{2(k-1)+1}{2k+1} \\
&= \frac{5}{63}
\end{aligned}$$

Correction 21 1. D'après la formule de la somme télescopique, on a :

$$S_n = (n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n.$$

2. On écrit :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n (k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3) \\
&= 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\
&= 3 \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) + \frac{3n(n+1)}{2} + n
\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, on a $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}S_n - \frac{n(3n+5)}{6}$. En utilisant l'expression de S_n trouvée à la première question, on trouve :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n}{3} - \frac{n(3n+5)}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6},$$

ce qui, après factorisation, donne :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Correction 22 On écrit $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$. On reconnaît alors une somme télescopique, on a donc :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Correction 23 On écrit $\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k}$. On reconnaît alors un produit télescopique, on a donc :

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.$$

Correction 24 On écrit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{1-k} &= 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{-k} 1^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{1-k} \text{ par la formule du binôme de Newton} \\
&= 2 \left(\frac{1}{2} + 1 \right)^n \\
&= \frac{3^n}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{1-k} = \frac{3^n}{2^{n-1}}.$$

Correction 25 On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k &= -1 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \\
&= -1 + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} \\
&= -1 + (1-1)^n \text{ par la formule du binôme de Newton}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k = -1.$$

Correction 26 1. 2^n

2. $2^{n-1}n$

3. $n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}$.

4. $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

5. $\frac{(1+\alpha)^{n+1}-1}{\alpha(n+1)}$ si $\alpha \neq 0$, 1 sinon.

6. 0 donc $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + (-1)^k) = 2 \sum_{1 \leq k \leq n} \binom{n}{2k}$.

Correction 27 1. On pose $j = 2n+1-k$. On a alors $k = 2n+1-j$. Par ailleurs, k variant de 0 à n , j varie de $n+1$ à $2n+1$. On a donc :

$$S = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{2n+1-j}.$$

Par symétrie des coefficients binomiaux, on a $\binom{2n+1}{2n+1-j} = \binom{2n+1}{j}$. De plus, j étant une variable muette, on a :

$$S = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}.$$

2. On a $2S = S + S = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$, en utilisant les deux expressions de S que l'on connaît. On a donc :

$$2S = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}.$$

On reconnaît la formule du binôme de Newton. On a donc :

$$2S = (1+1)^{2n+1} = 2^{2n+1},$$

d'où

$$S = 2^{2n}.$$

Correction 28 On a :

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha_{n-k} = \alpha_n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \alpha_{n-k},$$

d'où

$$0 = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \alpha_{n-k} = n\alpha_{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \alpha_{n-k}.$$

On en déduit que :

$$\alpha_{n-1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \alpha_{n-k}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\alpha_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} \alpha_{n+1-k}.$$

Correction 29 D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k},$$

et

$$0 = ((-1)+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k.$$

En additionnant les deux, on obtient :

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + (-1)^k).$$

Or, dans cette somme, les termes correspondants à k impair sont nuls. On a donc :

$$2^n = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} (1 + (-1)^k) = 2 \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}.$$

On en déduit que :

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}.$$

On écrit ensuite :

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} - \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}. \\ &= 2^n - 2^{n-1} \\ &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que :

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}.$$

Correction 30 1. On a $V_0 = 1$ et $V_1 = 1 + ea/n$.

2. On écrit

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (e^{a/n})^k \\ &= \frac{e^a - 1}{e^{a/n} - 1} \end{aligned}$$

Correction 31 1. Le nombre s'écrit

$$\sum_{k=0}^n 10^{-k}$$

Il vaut

$$\sum_{k=0}^n 10^{-k} = \frac{1 - 10^{-(n+1)}}{1 - 10^{-1}} = \frac{1 - 10^{-(n+1)}}{0.9}$$

Lorsque n tend vers l'infini, on obtient

$$1,1111\dots = \frac{1}{0.9} = \frac{10}{9}$$

2. On commence par écrire le nombre $0.999\dots 9$ avec n chiffres après la virgule. Il vaut

$$\sum_{k=1}^n 9 \cdot 10^{-k} = 0.9 \frac{1 - 10^{-n}}{1 - 10^{-1}} = 1 - 10^{-n}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$0.99999\dots = 1$$

Correction 32 On écrit :

$$\sum_{k=1}^{n+1} (k+1)^2 = \sum_{k=1}^n (k+1)^2 + \underbrace{(n+2)^2}_{k=n+1},$$

et

$$\sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^n k(k+1) + \underbrace{0(0+1)}_{k=0} + \underbrace{(n+1)(n+2)}_{k=n+1}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^{n+1} (k+1)^2 - 2 \sum_{k=0}^{n+1} k(k+1) &= \sum_{k=1}^n (k^2 + (k+1)^2 - 2k(k+1)) + (n+2)^2 - 2(n+1)(n+2) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n 1 \right) - n(n+2) \\ &= n - n(n+2) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$S = -n(n+1).$$

Correction 33 On pose $j = 2n - 4 + k$. Quand k vaut 0, j vaut $2n - 4$, quand k vaut n , j vaut $2n - 4$. On a donc :

$$\prod_{k=0}^n (2n - 4 + k) = \prod_{j=2n-4}^{3n-4} j = \frac{\prod_{j=1}^{3n-4} j}{\prod_{j=1}^{2n-5} j} = \frac{(3n-4)!}{(2n-5)!}.$$

Correction 34 On écrit :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i, j \leq n} (2i - j) &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} 2i - \sum_{1 \leq i, j \leq n} j \\
&= \sum_{1 \leq i, j \leq n} 2i - \sum_{1 \leq i, j \leq n} j \text{ car les deux variables sont muettes} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i \\
&= \sum_{i=1}^n ni \\
&= \frac{n^2(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

On a donc $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (2i - j) = \frac{n^2(n+1)}{2}$.

Correction 35 On écrit $\sum_{i+j < n} (i + j) = \sum_{i+j < n} i + \sum_{i+j < n} j = 2 \sum_{i+j < n} i$ car i et j ont des rôles symétriques dans les deux sommes. On pose $k = i + j$. Comme $k < n$, il varie de 0 à $n - 1$ et i varie de 0 à k . On a donc :

$$\sum_{i+j < n} (i + j) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^k i = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + \sum_{k=0}^{n-1} k.$$

La première somme a été calculée à l'exercice 21. On a donc :

$$\sum_{i+j < n} (i + j) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}.$$

Correction 36 On coupe la somme en deux :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \min(i, j) + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \min(i, j) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j i + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} j \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} + \sum_{i=2}^n \frac{i(i-1)}{2} \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{i(i-1)}{2} \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} + \sum_{j=1}^n \frac{j(j-1)}{2} \text{ car } i \text{ est une variable muette} \\
&= \sum_{j=1}^n j^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ en utilisant la formule trouvée à l'exercice 21}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Remarque. On a calculé $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$ à l'exercice précédent, on peut vérifier que

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) + \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j) = n^2(n+1).$$

Correction 37 1. D'après la formule de la somme télescopique, on a :

$$S_n = (n+1)^4 - 1 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n.$$

2. On écrit :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 - k^4) \\
&= 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\
&= 4 \left(\sum_{k=1}^n k^3 \right) + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + nen \text{ utilisant l'exercice 21}
\end{aligned}$$

3. D'après la question précédente, on a :

$$4 \sum_{k=1}^n k^3 = S_n - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n.$$

En utilisant l'expression de S_n trouvée à la première question, on trouve :

$$4 \sum_{k=1}^n k^3 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n = n^4 + 2n^3 + n^2,$$

ce qui, après factorisation, donne :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Correction 38 On écrit $kk! = (k+1-1) \cdot k! = (k+1)! - k!$. On reconnaît alors une somme télescopique d'où :

$$\sum_{k=1}^n kk! = \sum_{k=1}^n (k+1)! - k! = (n+1)! - 1.$$

Correction 39 On écrit : $\prod_{k=2}^n \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$. On reconnaît deux

produits télescopiques, on a donc : $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2} \times \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n}$.

Correction 40 On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{k}\right)\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)} &= \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{1}{k}\right)\cos\left(\frac{1}{k+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{k+1}\right)\cos\left(\frac{1}{k}\right)}{\cos\left(\frac{1}{k}\right)\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{1}{k}\right)}{\cos\left(\frac{1}{k}\right)} - \frac{\left(\sin\frac{1}{k+1}\right)}{\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)}. \end{aligned}$$

On reconnaît une somme télescopique, on a donc :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{k}\right)\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)} = \tan(1) - \tan\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Correction 41 On écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \right) - \binom{n}{n} \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} \right) - \binom{n}{n} \\ &= 2^n - 1 \text{ par la formule du binôme de Newton} \end{aligned}$$

On a donc $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} = 2^n - 1$.

Correction 42 On a :

$$\begin{aligned} \binom{n}{p} \binom{p}{k} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \frac{p!}{k!(p-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!(p-k)!k!} \\ &= \frac{k!(n-k)!(p-k)!(n-p)!}{k!(n-k)!(p-k)!(n-p)!} \\ &= \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} \end{aligned}$$

donc

$$\binom{n}{p} \binom{p}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}.$$

Correction 43 On écrit

$$\begin{aligned} (1, 01)^{100} &= (1 + 10^{-2})^{100} \\ &= \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 10^{-2k} \end{aligned}$$

Correction 44 Il suffit de l'écrire. On a :

$$\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{n+1}{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1},$$

car $(n+1) - (k+1) = n - k$.

Correction 45 1. On écrit :

$$\frac{1}{n^{k-1}} \binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} = \frac{1}{n^{k-1}} \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} - \frac{1}{n^k} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

On a :

$$nk(n^{k-1}(k-1)!(n-k+1)!) = n^k k!(n-k+1)!$$

et

$$(n-k+1)(n^k k!(n-k!)) = n^k k!(n-k+1)!$$

donc le dénominateur commun est $(n^k k!(n-k+1)!)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{k-1}} \binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} &= \frac{n!(nk - (n-k+1))}{n^k k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n+1)(k-1)}{n^k k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!(k-1)}{n^k k!(n+1-k)!} \\ &= \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

On a bien l'égalité souhaitée.

2. On utilise la question précédente, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n^{k-1}} \binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} \right) \\ &= \frac{1}{n^0} \binom{n}{0} - \frac{1}{n^n} \binom{n}{n} \\ &\text{car on reconnaît une somme télescopique} \\ &= \frac{n^n - 1}{n^n} \end{aligned}$$

Il est intéressant de remarquer qu'on peut également faire la question 2 directement :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k} - \frac{n}{n^{n+1}} + 1 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n+1} k \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1} - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} - \frac{1}{n^n} + 1 \\ &= \frac{n+1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} - \frac{1}{n^n} + 1 \\ &= 1 - \frac{1}{n^n} \end{aligned}$$

en utilisant l'exercice ??.

Correction 46 1. On raisonne par récurrence sur n . Pour $n=1$, le résultat est clair. On suppose le résultat vrai au rang n . On a :

$$\prod_{i=1}^{n+1} a^{\alpha_i} = a^{\alpha_{n+1}} \prod_{i=1}^n a^{\alpha_i},$$

donc

$$\prod_{i=1}^{n+1} a^{\alpha_i} = a^{\alpha_{n+1}} a^{\sum_{i=1}^n \alpha_i},$$

par hypothèse de récurrence. On a donc :

$$\prod_{i=1}^{n+1} a^{\alpha_i} = a^{\alpha_{n+1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i} = a^{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i}.$$

Le résultat est vrai au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, il est vrai pour tout entier n .

2. On pose $k = i + j$, on a $j = i - k$. k varie alors de 0 à n et i varie de 0 à k . On a :

$$\prod_{i+j \leq n} a^i b^j = \prod_{k=0}^n \prod_{i=0}^k a^i b^{k-i} = \prod_{k=0}^n \left(\prod_{i=0}^k a^i \prod_{i=0}^k b^{k-i} \right).$$

D'après ce qui précède, on a :

$$\prod_{i=0}^k a^i = a^{\sum_{i=0}^k i} = a^{\frac{k(k+1)}{2}},$$

et

$$\prod_{i=0}^k b^{k-i} = \sum_{i=0}^k b^{k-i} = \sum_{j=0}^k b^j = b^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$

On a donc :

$$\prod_{i+j \leq n} a^i b^j = \prod_{k=0}^n a^{\frac{k(k+1)}{2}} b^{\frac{k(k+1)}{2}} = \prod_{k=0}^n (ab)^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$

On applique, à nouveau, la question 1. On a donc :

$$\prod_{i+j \leq n} a^i b^j = (ab)^{\sum_{k=0}^n \frac{k(k+1)}{2}} = (ab)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}},$$

en utilisant le résultat de l'exercice 14.

On peut aussi écrire

$$\prod_{i+j \leq n} a^i b^j = \prod_{i+j \leq n} a^i \prod_{i+j \leq n} b^j,$$

puis

$$\prod_{i+j \leq n} a^i = \prod_{i=0}^n \prod_{j=0}^{n-i} a^i = \prod_{i=0}^n a^{i(n-i+1)} = a^{\sum_{i=0}^n i(n+1-i)}.$$

On a

$$\sum_{i=0}^n i(n+1-i) = (n+1) \sum_{i=0}^n i - \sum_{i=0}^n i^2 = \frac{(n+1)^2 n}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

on a donc

$$\prod_{i+j \leq n} a^i = a^{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}},$$

et, par symétrie,

$$\prod_{i+j \leq n} b^j = b^{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}} \text{ d'où } \prod_{i+j \leq n} a^i b^j = (ab)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}.$$

Correction 47 On écrit :

$$\prod_{k=1}^n (3k+1)(3k-1) = \frac{\prod_{k=1}^n (3k+1)(3k-1)3k}{\prod_{k=1}^n 3k}.$$

On a $\prod_{k=1}^n 3k = 3^n \prod_{k=1}^n k = 3^n n!$.

On remarque ensuite que le produit $\prod_{k=1}^n (3k+1)(3k-1)3k$ correspond aux produits

de tous les entiers compris entre 2 (qui correspond à $k = 1$ dans $3k - 1$) et $3n + 1$ (qui correspond à $k = n$ dans $(3k + 1)$). En effet, tout entier s'écrit de la forme $3k$, $3k - 1$ ou $3k + 1$. On en déduit que $\prod_{k=1}^n (3k + 1)(3k - 1)3k = (3n + 1)!$ d'où

$$\prod_{k=1}^n (3k + 1)(3k - 1) = \frac{(3n + 1)!}{3^n n!}.$$

Correction 48 Il suffit de remarquer que la somme $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i - x_j)(y_i - y_j)$ est positive. En effet, si $i < j$, on a le produit de deux termes positifs, si $i > j$, on a le produit de deux termes négatifs.

On développe maintenant cette somme, on a

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i - x_j)(y_i - y_j) &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i y_i - x_i y_j - x_j y_i + x_j y_j) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_i - \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j - \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_j y_i + \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_j y_j \end{aligned}$$

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_i = n \sum_{i=1}^n x_i y_i = n \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

et

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_j y_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_j y_j = n \sum_{j=1}^n x_j y_j = n \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

De plus,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j \right),$$

et de même,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_j y_i = \left(\sum_{i=1}^n x_j \right) \left(\sum_{j=1}^n y_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j \right),$$

car i et j sont des variables muettes.

On a donc :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i - x_j)(y_i - y_j) = 2n \sum_{k=1}^n x_k y_k - 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j \right).$$

Comme cette somme est positive, on a donc

$$n \sum_{k=1}^n x_k y_k \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j \right),$$

ce qui est le résultat souhaité.

Correction 49 1. Il suffit d'écrire

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} s_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} s_{ij} + \sum_{i=1}^n s_{ii} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} s_{ij}.$$

On a $\sum_{i=1}^n s_{ii} = 0$ et, comme $s_{ij} = s_{ji}$, $\sum_{1 \leq i < j \leq n} s_{ij} = \sum_{1 \leq j < i \leq n} s_{ij}$.

Ainsi,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} s_{ij} = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} s_{ij}$$

On peut visualiser ces trois sommes en disant que l'on coupe le tableau en trois parties, la partie strictement au dessus de la diagonale ($j > i$), la diagonale ($i = j$) et la partie strictement en dessous de la diagonale ($i > j$)

2. On va calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_i b_j)^2 - 2a_i b_j a_j b_i + \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_j b_i)^2 \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_i b_j)^2 - \sum_{1 \leq i, j \leq n} 2a_i b_j a_j b_i + \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_j b_i)^2 \end{aligned}$$

On écrit maintenant

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_i b_j)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^2 b_j^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j^2 \right) = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right),$$

car i et j sont des indices muets.

De même, on a

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_j b_i)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right).$$

On s'intéresse maintenant à la somme du milieu. On a

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} 2a_i b_j a_j b_i = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_i a_j b_j = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \left(\sum_{j=1}^n a_j b_j \right).$$

Or

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{j=1}^n a_j b_j = \sum_{k=1}^n a_k b_k,$$

car i et j sont des indices muets. On a donc :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2.$$

On utilise maintenant la question 1. En effet, en posant $s_{ij} = (a_i b_j - a_j b_i)^2$, on a bien $s_{ii} = 0$ et $s_{ij} = s_{ji}$ donc on peut appliquer la question 1. On a donc

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

On en déduit que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2,$$

ce qui est précisément le résultat souhaité.

3. On a fait le plus dur à la question précédente !!! Il suffit de remarquer que la somme de gauche est positive car c'est une somme de carrés, on obtient alors l'inégalité souhaitée.

Correction 50 On a :

$$\begin{aligned} \sin(1) \sin(k+1) &= \frac{1}{2} (\cos(k) - \cos(k+2)) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(k) - \cos(k+1) + \cos(k+1) - \cos(k+2)). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \sin(1) \sin(k+1) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} (\cos(k) - \cos(k+1)) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} (\cos(k+1) - \cos(k+2)).$$

On reconnaît deux sommes télescopiques, la somme vaut donc :

$$\frac{1}{2} (1 - \cos(n+2) + \cos 1 - \cos(n+3)).$$