Lycée du Parc
842.

Calculs algébriques

1 Sommes et produits

1.1 Sommes

1.1.1 Premières propriétés

On rappelle la définition suivante:

Définition 1. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes ou réels. Alors $\sum\limits_{i\in I} a_i$ est la somme des éléments de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

Par convention, si $I=\emptyset$, alors $\sum\limits_{i\in I} a_i = 0$.

Exemples 1.

1. *Si* $I=[|1,n|]$, *alors* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1+\ldots+a_n$
2. *Si* $I=[|n,m|]$, *alors* $\sum\limits_{i=n}^{m} a_i = a_n+\ldots+a_m$
3. *On a* $\sum\limits_{i\in I} a_i = \sum\limits_{j\in I} a_j = \sum\limits_{k\in I} ak$

Écrire les sommes suivantes de façon symbolique (à l'aide du signe $\sum$) :

1. A=2+4+6+8+10
2. B=1-2+3-4+5-6+7-8+9-10
3. C=5+7+9+...+23
4. D=8+10+...+24
5. E=1+$\frac{1}{100}$+$\frac{1}{10000}$+$\frac{1}{1000000}$+$\frac{1}{100000000}$

On peut couper une somme en deux (ou trois ..) ainsi :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i,\ \text{si } m<n,$$

En particulier, on a, pour $n \geqslant 1$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i + a_n = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) - a_{n+1} = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) - a_0.$$

On peut aussi séparer les termes d'indices pairs et impairs:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i \text{ pair}}} a_i + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i \text{ impair}}} a_i$$

Proposition 1.
La somme est linéaire c'est-à-dire:

- $\sum\limits_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum\limits_{i\in I} a_i + \sum\limits_{i\in I} b_i$.
- $\sum\limits_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda \sum\limits_{i\in I} a_i$.

Méthode 1.
Comment effectuer un changement d'indice dans une somme?

- On définit un nouvel indice en fonction de l'indice de départ.
- On calcule les nouvelles bornes de la somme avec ce nouvel indice.
- On exprime le terme général de la somme à l'aide du nouvel indice.
- On écrit la nouvelle somme en ordonnant les bornes dans l'ordre croissant

Exemples 2.

1. $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{n-i}$.

Comme l'indice est muet, on a $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j = \sum\limits_{j=0}^{n} a_{n-j}$.

2. comment compter à l'envers la somme $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j = ?$

1.1.2 Sommes particulières

- $\sum\limits_{i\in I} a = na$ avec n le nombre d'éléments de I.
- soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ alors $\sum\limits_{k=n}^{m} u_k = u_n\left(\dfrac{1-q^{m-n+1}}{1-q}\right)$.
- $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
- $a^n - b^n = (a-b)\sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.
- $\sum\limits_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$ (somme télescopique).

Applications:

- L'ensemble $[\![0,n]\!]$ contient $n+1$ éléments, on a donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 3 = 3(n+1)$.
- Que vaut $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i - a_{i-1}$? $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i - a_{i+1}$?
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $S_n = {}^{n}_{k=p} u_k$. Combien y a-t-il de termes de la suite u dans S_n ?
- Soit $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$.
- Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
- Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est convergente.

1.1.3 Sommes doubles

Définition 2. Soit (a_{ij}) une famille finie de complexes indexée par deux indices i et j variant dans deux ensembles I et J.
On appelle somme double la somme de tous les éléments de la famille. On la note :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij}.$$

On a :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} a_{ij}.$$

Si les bornes ne sont pas indépendantes, il faut être prudent pour permuter les signes somme dans l'expression. Considérons par exemple l'expression $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} a_{ij}$.

Faisons un dessin. On cherche à sommer les cellules grises du tableau suivant :

j i	0	1	$\dots$	$n-1$	n
1					
2			$\iddots$		
$\vdots$					
n					

On commence par déterminer l'intervalle maximal dans lequel varie j : pour $i = 1$, j atteint sa valeur maximale $n-1$ donc j varie entre 0 et $n-1$.

Exprimons maintenant l'intervalle, qui doit dépendre de j, dans lequel varie i. On sait que $j \leqslant n-i$ donc $i \leqslant n-j$. De plus, $i \geqslant 1$ donc i varie entre 1 et $n-j$. On a donc :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} a_{ij} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} a_{ij}.$$

Exemples 3.

1. *Modéliser les termes de la somme* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{ij}$. *Écrire ces sommes sous la forme d'une seule somme puis permuter les signes sommes.*

2. *Mêmes questions avec* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij}$.

3. *Traiter le cas* $i < j$. *Faire dessin, exprimer avec deux sommes puis permuter.*

1.2 Produits

1.2.1 Généralités

Définition 3. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes ou réels. Alors $\displaystyle\prod_{i \in I} a_i$ est le produit des éléments de la famille $(a_i)_{i \in I}$.

Par convention, si $I = \emptyset$, alors $\displaystyle\prod_{i \in I} a_i = 1$.

Exemples 4.

1. *Si* $I = [|1, n|]$, *alors* $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \dots a_n$

2. *Si* $I = [|n, m|]$, *alors* $\displaystyle\prod_{i=n}^{m} a_i = a_n a_{n+1} \dots a_m$

3. *On a* $\displaystyle\prod_{i \in I} a_i = \prod_{j \in I} a_j = \prod_{k \in I} a_k$

Remarque: Comme pour la somme, on peut couper un produit en deux :

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{m} a_i \times \prod_{i=m+1}^{n} a_i, \text{ si } m < n$$

Proposition 2.

- $\prod_{i\in I}(a_i b_i) = \prod_{i\in I} a_i \prod_{i\in I} b_i$.
- $\prod_{i\in I} \lambda a_i = \lambda^n \prod_{i\in I} a_i$ où n désigne le nombre d'élément de I. En particulier, $\prod_{i\in I} a = a^n$ avec n le nombre d'éléments de I.
- $\prod_{k=m}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_m}{a_{n+1}}$

Exemple 5. *Soient $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = n(n-1)...(n-p+1)$. Combien y a-t-il de facteurs dans P_n ?*

Remarque: Sommes et produits

1. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calculer (a+b)(c+d).
2. $n \in \mathbb{N}^\star$, $(a_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \subset \mathbb{R}$, $(b_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \subset \mathbb{R}$, a-t-on $\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$?
3. a-t-on $\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$?
4. revient-il au même de faire des produits de sommes et des sommes de produits ?

1.2.2 Factorielle

Définition 4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On définit $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

On pose $0! = 1$.

Proposition 3.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $1 \leqslant m < n$ On a

- $(n+1)! = (n+1).n!$
- $m \ldots (n-1)n = \frac{n!}{(m-1)!}$

Exemple 6. *Exprimer le produit des entiers pairs puis des entiers impairs.*

1.2.3 Coefficients binomiaux et binôme de Newton

Définition 5. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \leqslant n$. On définit le coefficient binomial "k parmi n", noté $\dbinom{n}{k}$, comme l'entier

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Remarque:
Il ne parait pas évident que ce nombre est un entier. Ce sera plus clair quand nous l'interpréterons comme le nombre de sous-parties d'un ensemble.

Proposition 4.
Soit $(n, k) \in (\mathbb{N})^2$ avec $k \leqslant n$. On a :

- $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$.
- $\dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1} = \dbinom{n+1}{k+1}$ (formule de Pascal).
- $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n}{k}\dbinom{n-1}{k-1}$.

Applications:
On peut montrer par récurrence sur n, que pour tout $k \leqslant n$, $\binom{n}{k}$ est entier.

Proposition 5 (Formule du binôme de Newton)**.**
Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemples 7.

1. *triangle de Pascal, calcul de* $(a+b)^3, (a+b)^5$.
2. *Que vaut* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ *?*
3. *Calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$.