Lycée du Parc
PCSI 842 Année 2024-2025
DS 1

Devoir surveillé 1.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star, u_{n+1} = u_n + 3u_{n-1}$. Montrer que $u_n \leqslant 3^n$ pour tout n.

Exercice 2.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ $|x-2| \leqslant 3 - |2x-1|$.

Exercice 3.

1. (a) Énoncer la définition d'une fonction croissante sur $[0,+\infty[$.
   (b) Énoncer l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction f suivante est croissante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+x} \end{array} \right.$$

3. Déduire des questions précédentes que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Exercice 4.
Soit $z = x + iy$ un nombre complexe différent de i, on pose $Z = \dfrac{z-1+2i}{z-i}$.

1. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $Z \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $Z \in i\mathbb{R}$.

Exercice 5.
Soit a, b deux réels tels que $0 < a < b$, montrer que $\dfrac{(b-a)^2}{8b} \leqslant \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$.

Exercice 6.
Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) + f(y)| = |x+y|$$

1. On pose:

$$f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{array} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x \end{array}$$

   Montrer que f_1 et f_2 vérifient (E).

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (E).

   (a) Montrer que $f(0) = 0$.

   (b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|$$

   (c) En raisonnant par l'absurde, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x)$$

3. Conclure. On précisera bien le raisonnement utilisé.

Exercice 7.
Soient z et z' dans $\mathbb{C}$ tels que $|z| < 1$ et $|z'| < 1$, montrer que $\left| \dfrac{z - z'}{1 - \overline{z}z'} \right| < 1$.

Exercice 8.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $k \geqslant 1$,

$$\begin{cases} u_{2k} = 2u_k \\ u_{2k+1} = u_k + u_{k+1} \end{cases}$$

Déterminer une expression de la suite.

Exercice 9.
On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2) \end{array} \right.$.

1. Tracer ses variations. On précisera sa limite en $+\infty$.

2. Montrer que f s'annule une seule fois sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On note α l'unique réel positif tel que $f(\alpha) = 0$.

3. Montrer que α est minoré par 1.

4. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}^+$.

5. Exprimer l'intégrale de $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ en fonction de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

6. On admet que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction du DS n 1

Exercice 1 On raisonne par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$. La propriété $HR(n)$: "$u_n \leqslant 3^n$ est vraie aux rangs 0 et 1 car $1 \leqslant 1$ et $2 \leqslant 3$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $HR(n)$ et $HR(n+1)$ sont vraies, montrons que $HR(n+2)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + 3u_n \\ &\leqslant 3^{n+1} + 3.3^n \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= 2.3^{n+1} \\ &\leqslant 3^{n+2} \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n+2$.

Par le principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 3^n$.

Attention, pour une récurrence double, il est nécessaire d'initialiser aux rangs 0 et 1. Si vous décidez de faire une récurrence forte et que vous initialisez au rang 0, vous prenez ensuite un entier $n \geqslant 0$ et vous supposez que pour tout $k \in [\![0, n]\!], HR(k)$ est vraie. Pour montrer que $HR(n+1)$ est vraie, vous allez écrire $u_{n+1} = u_n + 3u_{n-1}$ ce qui n'a de sens que si n vaut au moins 1. Et c'est là que le bas blesse si vous n'avez pas montré $HR(1)$!
Attention à bien faire apparaître l'argument qui montre l'hérédité (même si je suis d'accord qu'il est simple ici puisqu'on utilise uniquement $2 \leqslant 3$). En effet, comme vous savez ce que vous voulez montrer, vous pourriez tenter un coup de bluff et dans le doute, on ne vous mettra pas la totalité des points.

Exercice 2 On raisonne par disjonction de cas :

- Si $x \in \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$, alors $|2x-1| = 1-2x$ et $|x-2| = 2-x$, on a donc

$$\begin{aligned} |x-2| \leqslant 3 - |2x-1| &\Leftrightarrow 2-x \leqslant 3-(1-2x) \\ &\Leftrightarrow 2-x \leqslant 2+2x \\ &\Leftrightarrow 3x \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ car } x \leqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Si $x \in \left]\dfrac{1}{2}, 2\right]$, alors $|2x-1| = 2x-1$ et $|x-2| = 2-x$, on a donc 7

$$\begin{aligned} |x-2| \leqslant 3 - |2x-1| &\Leftrightarrow 2-x \leqslant 3-(2x-1) \\ &\Leftrightarrow 2-x \leqslant 4-2x \\ &\Leftrightarrow x \leqslant 2 \end{aligned}$$

- Enfin, si $x > 2$, alors $|x-2| = x-2$ et $|2x-1| = 2x-1$, on a donc

$$\begin{aligned} |x-2| \leqslant 3 - |2x-1| &\Leftrightarrow x-2 \leqslant 3-(2x-1) \\ &\Leftrightarrow 3x \leqslant 6 \\ &\Leftrightarrow x \leqslant 2 \end{aligned}$$

  ce qui est impossible.

  Par disjonction de cas, on a montré que l'ensemble des solutions est $[0, 2]$.

Pensez à bien raisonner par équivalence ! Si vous raisonnez par implication, il faut ensuite vérifier que les réels trouvés sont bien solutions.

Exercice 3 1. (a) Une fonction est croissante si $\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2$, $x \leqslant y$, on a $f(x) \leqslant f(y)$.

Pensez à dire de quoi vous donnez la définition ! Attention, on demande une fonction croissante sur $[0,+\infty[$, par sur $\mathbb{R}$.

(b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|x+y| \leqslant |x|+|y|$.

Pensez à définir x et y !

2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, alors $f(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}$. La fonction $x \mapsto 1+x$ est croissante, on en déduit que $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est décroissante puis que f est croissante.

3. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors
$$|x+y| \leqslant |x|+|y|\,,$$
d'après l'inégalité triangulaire donc, par croissance de f, on a
$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}.$$
Or,
$$\begin{aligned}\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} &= \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|}\\ &\leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}\end{aligned}$$
On a donc bien l'inégalité souhaitée.

Attention à bien traduire la croissance de f par $f(|x+y|) \leqslant f\left(|x|+|y|\right)$ et pas $f(|x+y|) \leqslant f(|x|) + f(|y|)$.

Exercice 4 1. On peut raisonner par équivalence :
$$\begin{aligned} Z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow Z = \overline{Z}\\ &\Leftrightarrow (z-1+2i)(\overline{z}+i) = (\overline{z}-1-2i)(z-i)\\ &\Leftrightarrow |z|^2 - \overline{z} + 2i\overline{z} + iz - i - 2 = |z|^2 - z - 2iz - i\overline{z} + i - 2\\ &\Leftrightarrow z - \overline{z} + 3i(z+\overline{z}) - 2i = 0\\ &\Leftrightarrow 2iy + 6ix - 2i = 0\\ &\Leftrightarrow 3x + y = 1\end{aligned}$$
L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des affixes des points de la droite d'équation $y = 1-3x$ privé du point de coordonnées $(1,0)$ qui correspond à i

On peut aussi déterminer la forme algébrique de Z. On écrit
$$\begin{aligned}\frac{z-1+2i}{z-i} &= \frac{(z-1+2i)(\overline{z}+i)}{|z-i|^2}\\ &= \frac{z\overline{z} + iz - \overline{z} - i + 2i\overline{z} - 2}{|z-i|^2}\\ &= \frac{x^2+y^2+ix-y-x+iy-i+2ix+2y-2}{|z-i|^2}\\ &= \frac{x^2+y^2-x+y-2+i\,(3x+y-1)}{|z-i|^2}\end{aligned}$$

On a $\mathcal{I}m(Z) = \dfrac{3x+y-1)}{|z-i|^2}$ donc $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{I}m(Z) = 0 \Leftrightarrow 2x+y-1=0$ et on retrouve le même ensemble.

2. Si on a déterminé la forme algébrique de Z, c'est immédiat de trouver l'ensemble des solutions. En effet,
$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}e(Z) = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-x-y-2=0.$$
Pour déterminer cet ensemble, il faut faire apparaître des débuts d'identité remarquable:
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0$$
ce qui se réécrit
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$
On en déduit que l'ensemble recherché est l'ensemble des affixes des points du cercle de centre $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{5}{2}}$ privé du point de coordonnées $(1,0)$ qui correspond à i

Si on n'a pas la forme algébrique, on peut raisonner par équivalence :
$$\begin{aligned}
Z \in i\mathbb{R} \quad & \Leftrightarrow Z = -\overline{Z} \\
& = |z|^2 - \overline{z} + 2i\overline{z} + iz - i - 2 = -|z|^2 + z + 2iz + i\overline{z} - i + 2 \\
& = 2|z|^2 - (z+\overline{z}) + i(\overline{z} - z) - 4 = 0 \\
& = 2|z|^2 - 2x + i(-2iy) - 4 \\
& = x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0
\end{aligned}$$
et on retombe sur la même équation.

BEAUCOUP d'erreurs de calcul sur cette question !! certains multiplient par $z+i$ et obtiennent z^2+1 au dénominateur qui n'a pas de raison d'être réel !

Exercice 5 Soit a, b deux réels tels que $0 < a < b$. On raisonne par équivalence:
$$\begin{aligned}
\frac{(b-a)^2}{8b} \leqslant \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \quad & \Leftrightarrow \frac{(b-a)^2}{8b} \leqslant \frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2}{2} \\
& \Leftrightarrow (b-a)^2 \leqslant 4b\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2 \quad \text{car } b > 0 \\
& \Leftrightarrow b - a \leqslant 2\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a}) \text{ car les deux membres sont positifs} \\
& \Leftrightarrow 0 \leqslant b + a - 2\sqrt{ab} \\
& \Leftrightarrow 0 \leqslant \left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2
\end{aligned}$$
La dernière inégalité est vraie. Par équivalence, on en déduit que la première l'est aussi.

Il est impératif de bien justifier chaque équivalence !

Exercice 6 1. On pose:
$$\begin{aligned}
f_1 : \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\
x & \mapsto x
\end{aligned}$$

Montrons que f_1 vérifie (E). Soit donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $f(x) = x$ et $f(y) = y$ donc

$$|f(x) + f(y)| = |x + y|$$

On a montré que la fonction f_1 vérifie la propriété (E). On pose :

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -x \end{aligned}$$

Montrons que f_2 vérifie (E). Soit donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $f(x) = -x$ et $f(y) = -y$ donc

$$|f(x) + f(y)| = |-x - y| = |-(x + y)| = |x + y|$$

On a montré que la fonction f_2 vérifie la propriété (E).

Pensez à définir x et y avant de vous lancer dans la démonstration

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (E).
   (a) Montrons que $f(0) = 0$. On applique la propriété (E) à $x = y = 0$. On a alors $|2f(0)| = 0$ donc $f(0) = 0$.
   (b) Montrons que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|$$

   Soit $x \in \mathbb{R}$, on applique la propriété (E) à $y = 0$:

   $$|f(x) + f(0)| = |x + 0|,$$

   d'où $|f(x)| = |x|$ puisque l'on a vu, à la question précédente, que $f(0) = 0$.

   Là encore, pensez à définir x
   (c) On suppose par l'absurde que

   $$(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq x) \text{ et } (\exists x' \in \mathbb{R}, f(x') \neq -x')$$

   On sait $|f(x)| = |x|$ donc $f(x) = \pm x$. Comme on a : $f(x) \neq x$, on en déduit que $f(x) = -x$. De même, on montre que $f(x') = x'$. On applique maintenant la propriété (E) à x et x':

   $$|f(x) + f(x')| = |x + x'|,$$

   ce qui donne, en remplaçant par les expressions de $f(x)$ et $f(x')$:

   $$|x - x'| = |x + x'|.$$

   On a donc $x - x' = \pm(x + x')$ ce qui implique $x = 0$ ou $x' = 0$. Or, on sait que $f(0) = 0 = -0$ ce qui contredit l'hypothèse faite sur x et x'.

   Par l'absurde, on a montré que

   $$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x)$$

   Cette question était un massacre car vous n'avez pas traduit correctement la négation de ce que vous souhaitiez montrer. $P \cup Q$ se nie en non$(P) \cap$ non(Q) ce qui signifie l'existence d'un réel qui n'est pas égal à son image ET l'existence d'un réel (qui n'a pas de raison d'être le même) dont l'image n'est pas égale à son opposé.

3. On a montré à la question 2 que si une fonction f vérifie (E), alors $f = f_1$ ou $f = f_2$ (phase d'analyse). Réciproquement, f_1 et f_2 vérifie la propriété (E) d'après la question 1. On en déduit, par analyse synthèse, que les fonctions f qui vérifient (E) sont exactement f_1 et f_2.

   Beaucoup ont reconnu une analyse synthèse mais on eu du mal à me l'expliquer correctement

Exercice 7 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-z'}{1-\overline{z}z'}\right| < 1 \quad &\Leftrightarrow |z-z'| < |1-\overline{z}z'| \\
&\Leftrightarrow |z-z'|^2 < |1-\overline{z}z'|^2 \text{ car les deux membres sont positifs} \\
&\Leftrightarrow (z-z')(\overline{z}-\overline{z}') < (1-\overline{z}z')(1-z\overline{z}') \\
&\Leftrightarrow |z|^2 - z'\overline{z} - z\overline{z'} + |z'|^2 < 1 - \overline{z}z' - z\overline{z'} + |z|^2|z'|^2 \\
&\Leftrightarrow 0 < 1 - |z|^2 - |z'|^2 - |z|^2|z'|^2 \\
&\Leftrightarrow 0 < (1-|z|^2)(1-|z'|^2)
\end{aligned}$$

La dernière assertion est vraie donc, par équivalence, la première l'est aussi et on a bien $|z-z'| < |1-\overline{z}z'|$.

On peut aussi poser $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ mais il ne faut pas se perdre! On a $\overline{z}z' = (xx' + yy') + i(xy' - x'y)$ donc

$$\begin{aligned}
|z-z'| < |1-\overline{z}z'| \quad &\Leftrightarrow |z-z'| < |1-\overline{z}z'| \\
&\Leftrightarrow |z-z'|^2 < |1-\overline{z}z'|^2 \text{ car les deux membres sont positifs} \\
&\Leftrightarrow (x-x')^2 + (y-y')^2 < (1-(xx'+yy'))^2 + (xy'-x'y)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2 < 1 + (xx'+yy')^2 - 2(xx'+yy') + (xy'-x'y)^2 \\
&\Leftrightarrow |z|^2 + |z'|^2 < 1 + |zz'|^2 \\
&\Leftrightarrow 0 < 1 - |z|^2 - |z'|^2 - |z|^2|z'|^2 \\
&\Leftrightarrow 0 < (1-|z|^2)(1-|z'|^2)
\end{aligned}$$

La dernière assertion est vraie donc, par équivalence, la première l'est aussi et on a bien $|z-z'| < |1-\overline{z}z'|$.

peu traitée ou mal traitée en utilisant une fausse inégalité triangulaire avec un signe $-$ (ou encore en m'écrivant que le quotient de deux quantités inférieures à 2 est inférieur à 1.

Exercice 8 On commence par calculer les premiers termes. On a $u_2 = 2u_1 = 2$, $u_3 = u_2 + u_1 = 3$, $u_4 = 2u_2 = 4$. Il semble que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$. Montrons-le par récurrence forte sur n. On pose $HR(n)$: "$u_n = n$". La propriété est vraie au rang 1. Soit maintenant un entier $n \geqslant 1$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!], HR(k)$ est vraie, montrons que $HR(n+1)$ est vraie. On raisonne par disjonction de cas:

- Si $n+1$ est pair, $n+1 = 2q$ avec q un entier. On a alors $q = \dfrac{n+1}{2} < n+1$ donc $q \in [\![1, n]\!]$. Par hypothèse de récurrence, $u_q = q$ donc $u_{n+1} = 2u_q = 2q = n+1$.

- Si $n+1$ est impair, alors $n+1 = 2q+1$ et $u_{n+1} = u_q + u_{q+1}$. Or $2q \leqslant n$ et $2q+1 \geqslant 2$ donc $q \in [\![1, n]\!]$ et $q \leqslant \dfrac{n}{2} < n$ donc $q+1 \leqslant n$. On peut donc bien appliquer l'hypothèse de récurrence aux rangs q et $q+1$. On a alors

$$u_{n+1} = q + q + 1 = 2q + 1 = n + 1,$$

  et la propriété est vraie

On a montré que pour $HR(n+1)$ est vraie, par disjonction de cas. La propriété est initialisée et héréditaire donc, par le principe de récurrence forte, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$.

La plupart d'entre vous a trouvé la formule à trouver, la rédaction de la récurrence forte a été parfois confuse.

Exercice 9 1. Pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = 2 - \dfrac{2}{1+x^2} - \ln(1+x^2)$ donc $f'(x) = \dfrac{4x}{(1+x^2)^2} - \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{2x(1-2x^2)}{(1+x^2)^2}$. On en déduit que $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1-2x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3} - \ln(3)$	$\searrow$	$-\infty$

En effet, $\forall x \geqslant 0$, $f(x) = \dfrac{2}{1+\frac{1}{x^2}} - \ln(1+x^2)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Il n'est pas nécessaire de calculer le discriminant pour trouver les racines de x^2-1, il n'est pas non plus nécessaire de poser un tableau de signe pour un polynôme de degré 2

2. On remarque que f est continue et que$f(1) = 1-\ln(2) \geqslant 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ce qui impose que $f(x)$ sera négative pour x suffisamment grand. Par le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule donc une fois sur $[1,+\infty[$. De plus, f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ (car $1 \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$), on a donc un unique point d'annulation de f sur $[1,+\infty[$. Par ailleurs, f est strictement positive sur $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et également sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ puisque qu'elle y décroit vers une valeur strictement positive. On en déduit que f s'annule en un unique point α sur $\mathbb{R}^+$.

   On y reviendra mais le TVI ne donne pas l'unicité ! Pour avoir tous les points, il fallait f continue, f <u>strictement</u> décroissante, et traiter le cas $]0,1]$. Oubliez l'argument " continue car dérivable" car si vous savez qu'elle est dérivable en tant que quotient/produit/somme de fonctions dérivables, elle est continue en tant que quotient/produit/somme de fonctions continues, pourquoi invoquez la dérivabilité?

3. D'après l'étude faite à la question précédente, $f(x)$ est positive pour $x \leqslant \alpha$ et négative pour $x \geqslant \alpha$.

4. On procède par intégration par parties. On pose $u(x) = \ln(1+x^2)$ et $v'(x) = 1$. On a $u'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ et $v(x) = x$ donc

$$\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \ln(2) - \int_0^1 \frac{2x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

   peu traitée...pourquoi?

5. On écrit

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{2x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2} - \int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{4x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2} - \ln(2) \\
&= 4\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x - \ln(2) \\
&= 4\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \ln(2) \\
&= 4 - \ln(2) - \pi.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 - \ln(2) - \pi.$$

l'astuce du +1-1 a été vu par au moins une personne!