Lycée Le Parc 842.

Ensembles et applications

1 Ensemble

1.1 Définitions

Rappel :
Un ensemble est une collection d'objets précis, appelés *éléments* dont l'identification n'est pas ambiguë.

Définition 1. Soit E un ensemble. On dit que x est un élément de E lorsque x appartient à E. On note alors $x \in E$. Lorsque x n'appartient pas à E, on note $x \notin E$.

Exemple 1. *Soit* $E = \{0, 2, 4, 7\}$*, alors* $1 \notin E$, $0 \in E$.

Nous avons vu que l'on peut également définir un ensemble en décrivant ses éléments
S'il est défini en décrivant ses éléments, on précise ce que sont ses éléments et quelle(s) propriété(s) particulière(s) ils possèdent.

Exemples 2.

1. *Soit* $E = \{$*garçons aux cheveux noirs*$\}$. *On peut aussi écrire, si* G *désigne l'ensemble des garçons,* $E = \{g \in G$ *tel que* g *a les cheveux noirs*$\}$. *Les mots "tel que" sont souvent simplement remplacés par une virgule ou une barre /.*

2. $F = \{n \in \mathbb{Z}, n$ *est divisible par 7*$\}$.

   Remarque. *n est une variable muette, l'ensemble F est donc égal à* $F = \{m \in \mathbb{Z}, m$ *est divisible par 7*$\}$ *ou encore* $F = \{n \in \mathbb{Z}, \exists q \in Z, n = 7q\}$.

Définition 2. On appelle singleton d'un ensemble E un sous-ensemble de E ne contenant qu'un élément a de E. On le note $\{a\}$.

Définition 3. On appelle ensemble vide l'ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$.

Définition 4. Soient A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B lorsque tout élément de A est un élément de B. On le note $A \subset B$. On dit aussi que A est un sous-ensemble (ou une partie) de B.

Autrement dit, si A et B sont deux sous-ensembles d'un ensemble E, on a , pour tout $x \in E$:

$$A \subset B \text{ si } x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Par convention, l'ensemble vide est inclus dans tous les ensembles.
La négation se note $A \not\subset B$ et l'inclusion stricte :$A \subsetneq B$ (A inclus dans B mais pas égal à B).

Méthode 1.
Pour montrer l'inclusion $A \subset B$, on prend un élément de A et on montre qu'il appartient à B.

Exemples 3.

1. *Soit* $E = \{0, 2, 4, 7\}$ *et* $F = \{0, 4\}$, *alors* $F \subset E$.

2. *Soit* $E = \{z \in \mathbb{C}, |z - 2i| = |z + 2i|\}$, *montrer que* $\mathbb{R} \subset E$.

3. *Soit* E *l'ensemble des multiples de 3 et* F *l'ensemble des multiples de 6. Montrer que* $F \subset E$. *A-t-on l'inclusion réciproque?*

4. *un exemple plus tordu: Considérons l'ensemble suivant:* $E = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$. *Les éléments de* E *sont donc des ensembles. On a alors* $\{1, 2\} \in E$ *et* $\{\{1, 2, 3\}\} \subset E$. *Que dire de* $F = \{\emptyset, \{1\}\}$*?*

5. *Soit* $E = \{$*fonctions de la forme* $f : x \mapsto ax + b, a > 0, b \in R\}$ *et* F *l'ensemble des fonctions croissantes. Montrer que* $E \subset F$.

$$\text{On a :}\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Exercice 1. Soit E l'ensemble des entiers de la forme $k^2 - 1$ avec k non multiple de 3 et F l'ensemble des multiples de 3, montrer que $E \subset F$. A-t-on $F \subset E$?

Proposition 1.
Soient A,B et D trois sous-ensembles d'un ensemble E. Si $A \subset B$ et $B \subset D$ alors $A \subset D$.

Définition 5. Deux ensembles A et B sont égaux si $A \subset B$ et $B \subset A$. On le note $A = B$.

Autrement dit, si A et B sont deux sous-ensembles d'un ensemble E, on a, pour tout $x \in E$,

$$A = B \text{ si } x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Méthode 2.
Soit A, B deux sous-ensembles de E. Pour montrer $A = B$,

- soit on raisonne par double inclusion (on montre $A \subset B$ puis $B \subset A$), ce qui revient à montrer l'implication $x \in A \Rightarrow x \in B$ puis à montrer sa réciproque $x \in B \Rightarrow x \in A$.
- soit on montre l'équivalence: $x \in A \Leftrightarrow x \in B$

Exemples 4.

1. *Soit* $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ *et* $E = \{z \in \mathbb{C}^\star, \overline{z} = \dfrac{1}{z}\}$. *Montrer que* $E = \mathbb{U}$.

2. *Soit* $E = \{z \in \mathbb{C}, |z - 3| = |z + 3|\}$ *et* $F = i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C}, \mathcal{R}e(z) = 0\}$. *Montrer que* $E = F$.

⚠ Si on raisonne par équivalence, on ne suppose pas $x \in A$! on prend $x \in E$.

1.2 Opérations sur les parties d'un ensemble

Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. On appelle

- **réunion** de A et B l'ensemble $A \cup B = \{x \in E, x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- **intersection** de A et B l'ensemble $A \cap B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- **complémentaire de A dans E** l'ensemble noté $\overline{A}$, A^c (ou encore $E \setminus A$ quand on veut préciser E) défini par $\overline{A} = \{x \in E, x \notin A\}$.

Exemples 5.

1. *Soit $A =]1, 3]$ et $B = [2, 5]$ deux parties de $\mathbb{R}$. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A}$, $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A \cup B}$.*
2. *Soit E l'ensemble des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F l'ensemble des fonctions dérivables. Que vaut $E \cap F$? $E \cup F$? $\overline{E}$?*
3. *Soit D et D' deux droites du plan. Déterminer $D \cap D'$ et $D \cup D'$ en procédant par disjonction de cas.*

Méthode 3.

- Pour montrer qu'un élément x appartient à $A \cap B$, on montre qu'il appartient à A ET à B.
- Pour montrer qu'un élément x appartient à $A \cup B$, on montre qu'il appartient soit à A, soit à B.

Définition 6. Deux parties A et B d'un ensemble E sont disjointes si $A \cap B = \emptyset$.

Ne pas confondre distincts et disjoints !!

Proposition 2.
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On a :

- $A \cup A = A$
- $A \cap A = A$
- $A \setminus A = \emptyset$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $A \cup \overline{A} = E$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Proposition 3.
Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E, alors l'intersection et la réunion sont distributives respectivement par rapport à la réunion et l'intersection; précisément:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

On le montre par double inclusion.

Proposition 4 (Lois de Morgan)**.** *Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Alors*

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

On peut définir une réunion ou une intersection d'un plus grand nombre d'ensembles: Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des sous-ensembles d'un ensemble F, on définit

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \{x \in F, \exists i \in [\![1, n]\!], x \in E_i\}$$

et

$$\bigcap_{i=1}^{n} E_i = \{x \in F, \forall i \in [\![1, n]\!], x \in E_i\}$$

- Un élément de $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ est un élément qui appartient à au moins un des E_i.
- Un élément de $\bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$ est un élément qui appartient à tous les E_i.

On définit, de même, la réunion et l'intersection d'un nombre infini d'ensemble : $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} E_i$ et $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} E_i$.

1.3 Produit cartésien

Définition 7. On appelle couple une paire ordonnée.

$(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ si et seulement si $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

Définition 8. Soient E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien de E et F, l'ensemble

$$E \times F = \{(x, y); x \in E, y \in F\}$$

Exemples 6. *1. $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des couples (x, y) avec $x \geqslant 0$ et $y \in \mathbb{Q}$.*

2. E^2 désigne l'ensemble des couples d'éléments de E.

3. $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ sont deux ensembles distincts.

Définition 9. Soient $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles. On appelle n-uplets la donnée ordonnée de n éléments $x_1, \ldots, x_n$ vérifiant $\forall i \in [|1, n|], x_i \in E_i$. L'ensemble de ces n-uplets est appelé produit cartésien de $E_1, \ldots, E_n$ et noté $E_1 \times \ldots \times E_n$.

Exemple 7. *On note E^n l'ensemble des n-uplets d'éléments d'un ensemble E.*

1.4 Ensemble des parties d'un ensemble

Notations : Soit E un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Exemples 8.

1. *Soit* $E = \{1, 2, 3\}$.
2. *Soit* $F = [\![1, 6]\!]$.

Remarque. *Pour tout ensemble E, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ contient toujours $\emptyset$ et E.*

Définition 10. Soit $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ un ensemble de parties d'un ensemble E. On dit que $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ est une partition de E si :

- $\forall i \in [\![1, n]\!], E_i \neq \emptyset$,
- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i = E$
- $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $E_i \cap E_j = \emptyset$.

Exemples 9.

1. *Donner toutes les partitions possibles de* $E = \{1, 2, 3\}$.
2. *Donner des exemples de partitions de* $\mathbb{N}$.
3. *Donner des exemples de partitions de* $\mathbb{R}$.

On peut généraliser la définition ci-dessus à une partition infinie. Donner un exemple de partition infinie de $\mathbb{N}$ puis de $\mathbb{R}$.

2 Applications

2.1 Definitions

Définition 11. Une application (ou fonction) f est la donnée

- d'un ensemble de départ (ou de définition) E
- d'un ensemble d'arrivée F
- pour tout x de E, d'un unique élément de F, noté $f(x)$.

On écrit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$.

Définition 12. Soit f une application de E dans F et y un élément de F. On dit que x est un antécédent de y par f si $x \in E$ et $f(x) = y$.

⚠ Un élément de F n'admet pas nécessairement un antécédent.

Exemple 10. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$, $g : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$, $h : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$

$k : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ *et* $l : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^- & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$

Tous les éléments de l'espace d'arrivée admettent-ils un antécédent? Lorsqu'un élément admet un antécédent, cet antécédent est-il unique?

Définition 13. Soit $f : E \to F$ une fonction et A une partie de E. On appelle restriction de f à A la fonction notée $f|_A$ définie par:

$$f|_A : \left\{ \begin{array}{lcl} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

Il est également possible de "réduire" l'ensemble d'arrivée sous certaines conditions:

Définition 14. Soit $f : E \to F$ une fonction et B une partie de F telle que $\forall x \in E, f(x) \in B$. On appelle corestriction de f à B la fonction notée $f|^B$ définie par:

$$f|^B : \left\{ \begin{array}{lcl} E & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

On peut aussi réduire les deux ensembles en même temps !

Exemple 11. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ *, on peut considérer la fonction* $f|_{\mathbb{R}^+}^{\mathbb{R}^+}$.

Si on reprend l'exemple précédent, g et h sont des restriction/corestriction de f. On remarque qu'elles ne possèdent pas les mêmes propriétés que f.

2.2 Fonctions particulières:

- La fonction identité: $f : \left\{ \begin{array}{lcl} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$. On la note généralement id_E.
- La fonction diagonale: $\left\{ \begin{array}{lcl} E & \to & E \times E \\ x & \mapsto & (x, x) \end{array} \right.$.
- La fonction caractéristique d'un ensemble: soit E un ensemble et A une partie de E, on définit alors $\mathbb{1}_A : \left\{ \begin{array}{lcl} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$

Exercice 2. Soit E un ensemble et A, B deux parties de E.

1. Montrer que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B$
2. Montrer que $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
3. Montrer que $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
4. Montrer que $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$

2.3 Composée de deux applications

Définition 15. Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions. On définit $g \circ f : E \to G$ par: $\forall x \in E, g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$.

Exemples 12.

1. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array} \right.$ *et* $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$. *Expliciter* $g \circ f$ *et* $f \circ g$.

2. *Soit* $f : E \to F$ *une fonction, alors* $f \circ id_E = f$ *et* $id_F \circ f = f$.

3. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, x+1) \end{array} \right.$ *et* $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \right.$. *Expliciter* $g \circ f$ *et* $f \circ g$.

2.4 Image directe/réciproque

Définition 16. Soient $f : E \to F$ une fonction et A une partie de E. On appelle image directe de A par f et on note $f(A)$ le sous-ensemble de F suivant:

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\}$$

On a donc $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, f(x) = y$

$$\boxed{\text{On a } f(A) \subset F}$$

Définition 17. Soit $f : E \to F$ une fonction. On appelle image de f noté $\mathrm{Im}(f)$ l'image directe de son ensemble de départ. Autrement dit, $\mathrm{Im}(f) = \{y \in F, \exists x \in E, f(x) = y\}$.

$$\boxed{\text{On a } \mathrm{Im}(f) \subset F}$$

Exemples 13.

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$, *alors* $f([-1, \frac{1}{2}]) = [0, 1]$.

2. *Soit* f *une fonction continue à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Si* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, *alors* $Im(f) = \mathbb{R}$.

3. *De manière plus générale, un tableau de variations complet (avec limites et valeurs) permet de déterminer l'image d'une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*: Déterminer l'image de la fonction*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-3, 2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^3 + 3x^2 - 12x \end{array} \right. .$$

4. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z+1}{z-1} \end{array} \right.$, *déterminer son image.*

⚠ On peut définir la composée $f \circ g$ de deux fonctions dès lors que l'image de g est incluse dans l'ensemble de définition de f.

Définition 18. Soit $f : E \to F$ une application et $B \subset F$. On appelle image réciproque de B noté $f^{-1}(B)$ l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

$$\boxed{\text{On a } f^{-1}(B) \subset E}$$

Exemple 14. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$, *que vaut* $f^{-1}([0,1])$*?* $f^{-1}([-1,1])$*?* $f^{-1}([-1,2])$*?*

3 Applications injectives, surjectives, bijectives

3.1 Applications injective

Définition 19. Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est injective (ou que c'est une injection) lorsque tout élément de F possède au plus un antécédent. On a donc

$$\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

ou encore

$$\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

Un élément de F n'admet pas forcément un antécédent par f !

Exemple 15. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ *n'est pas injective mais* $f|_{\mathbb{R}^+}$ *oui.*

Méthode 4.
Pour montrer que $f : E \to F$ est injective, on prend deux éléments x, x' dans l'espace de départ et on suppose que $f(x) = f(x')$. On montre alors que <u>nécessairement</u> $x = x'$. C'est la méthode employée dans la majorité des cas.

Exemples 16.

1. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+3 \end{array} \right.$. *L'application est-elle injective?*
2. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y, 2x-y) \end{array} \right.$. *L'application est-elle injective?*
3. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \right.$. *L'application est-elle injective?*
4. *Soit* $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, y-x) \end{array} \right.$. *L'application est-elle injective?*
5. *Soit* $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y, y-x) \end{array} \right.$. *L'application est-elle injective?*

Méthode 5.
Pour montrer que $f : E \to F$ est injective, on prend deux éléments <u>distincts</u> x, x' dans l'espace de départ et on montre que $f(x) \neq f(x')$.

Exemple 17. *Une application strictement monotone est injective.*

Méthode 6.
On étudie l'équation $f(x) = a$ avec $a \in F$ et on montre qu'il y a au plus une solution. L'avantage de cette méthode est qu'en étudiant le nombre de solutions de cette équation, on peut conclure sur l'injectivité (ou la non injectivité) de la fonction.

Exemples 18.

1. *Soit* $f : \left\{\begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+3 \end{array}\right.$. *L'application est-elle injective?*

2. *Soit* $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y, 2x-y) \end{array}\right.$. *L'application est-elle injective?*

3. *Soit* $h : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y, y-x) \end{array}\right.$. *L'application est-elle injective?*

4. *Soit* $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \left(2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i, x_1 + 2\sum\limits_{i=2}^{n} x_i, \dots, \sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i + 2x_n\right) \end{array}\right.$. *g est-elle injective?*

Méthode 7.
Pour montrer qu'une application n'est pas injective, il suffit de trouver deux éléments distincts x et x' de E ayant même image.

Exemples 19.

1. $f : \left\{\begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}\right.$

2. *Soit* $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}\right.$. *L'application est-elle injective?*

3. *Soit* $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, y-x) \end{array}\right.$. *L'application est-elle injective?*

Théorème 5.
La composée de deux applications injectives est injective.

Proposition 6.
On se donne $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Si $g \circ f$ est injective alors f injective.

Preuve:

Soient $x, x' \in E^2$ *tels que* $f(x) = f(x')$. *On applique* g, *on obtient* $g(f(x)) = g(f(x'))$ *soit* $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ *mais* $g \circ f$ *est injective donc on a* $x = x'$. *On a montré que* f *est injective.*

⚠ La fonction g n'est pas nécessairement injective.

Exemple 20.

$$f : \left\{\begin{array}{lll} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}\right. \quad \text{et } g : \left\{\begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}\right.$$

Alors $g \circ f : \left\{\begin{array}{lll} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}\right.$ *est injective bien que* g *ne le soit pas.*

Remarque. *Dans le cas d'une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *une fonction est injective si et seulement si toute droite horizontale intersecte le graphe de la fonction en au plus un point.*

3.2 Application surjective

Définition 20. Soit $f : E \to F$. On dit que f est surjective (ou que c'est une surjection) si tout élément de F possède au moins un antécédent:

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$$

Autrement dit, f est surjective si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Remarque. *Pour toute fonction f, la corestriction $f|^{Im(f)}$ est surjective.*

Un élément de F peut admettre plusieurs antécédents (voire une infinité!!).

Méthode 8.
Pour montrer que $f : E \to F$ est surjective, on prend un élément y de l'espace d'arrivée F et on montre qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$ (autrement dit, on montre que l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution dans E.)

Exemples 21.

1. *L'application* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 3x - 4 \end{array} \right.$ *est-elle surjective?*
2. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 2y, 2x - y) \end{array} \right.$. *L'application est-elle surjective?*
3. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \right.$. *L'application est-elle surjective?*
4. *Soit* $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, y - x) \end{array} \right.$. *L'application est-elle surjective?*
5. *Soit* $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x - y, y - x) \end{array} \right.$. *L'application est-elle surjective?*
6. *Soit* $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z+1}{z-1} \end{array} \right.$. *L'application est-elle surjective?*

Théorème 7.
La composée de deux fonctions surjectives est surjective.

Proposition 8.
On se donne $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
Si $g \circ f$ est surjective alors g surjective.

On ne peut rien dire de f.

Exemple 22. *Soit* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ *et* $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right.$.

Remarque. *Dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, toute droite horizontale de la forme $y = a$ avec a un élément de l'image de f, intersecte le graphe de f en au moins un point. Autrement dit, f est surjective si et seulement si pour tout $a \in Im(f)$, la droite d'équation $y = a$ intersecte le graphe de f.*

3.3 Application bijective

Définition 21. On dit qu'une application est bijective si elle est injective et surjective. Autrement dit, $f : E \to F$ est bijective si tout élément de F admet un unique antécédent par f:

$$\forall y \in F\ \exists! x \in E, f(x) = y$$

Méthode 9.
Pour montrer qu'une application est bijective, on peut

- Montrer qu'elle est injective ET surjective.
- Prendre un élément de l'ensemble d'arrivée et montrer qu'il possède un unique antécédent (autrement dit, montrer que, pour tout y, l'équation $f(x) = y$ possède une UNIQUE solution.

Exemples 23.

1. *Soit* $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}\right.$. *L'application est-elle bijective?*
2. *Soit* $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(xy, \dfrac{y}{x}\right) \end{array}\right.$. *L'application est-elle bijective?*
3. *Soit* $h : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [2, +\infty[\\ x & \longmapsto & e^x + e^{-x} \end{array}\right.$. *L'application est-elle bijective?*
4. *Soit* $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x - e^{-x} \end{array}\right.$, *l'application est-elle bijective?*

Proposition 9.
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$, alors

- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.
- Si f est bijective et g est injective (resp. surjective), alors $g \circ f$ est injective (resp.surjective).
- Si g est bijective et f est injective (resp. surjective), alors $g \circ f$ est injective (resp.surjective).

Définition 22. Soit $f : E \to F$ une application bijective. On appelle application réciproque (ou bijection réciproque) la fonction définie de $F \to E$ qui à tout élément y de F associe son unique antécédent par f. On la note f^{-1}. On a donc $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

⚠ On ne peut parler de f^{-1} que si **on sait** que f est bijective !

Remarque. *ne pas confondre avec la notation de l'image réciproque qui, elle, est définie pour toute fonction. (et non, il n'y a pas de problème de notation car SI f est bijective, on peut montrer (mais c'est coton) que l'image réciproque $f^{-1}(B)$ coïncide avec l'image directe de B par f^{-1}.*

Proposition 10.
Soit $f : E \to F$ une fonction bijective, alors $f \circ f^{-1} = id_F$ et $f^{-1} \circ f = id_E$.

Méthode 10.
Comment déterminer la bijection réciproque d'une fonction ?

- Si vous avez montré que la fonction était bijective, vous avez peut être déterminé, pour y quelconque, son unique antécédent. Dans ce cas, f^{-1} est la fonction qui a y associe cet antécédent.
- L'énoncé vous dit que f est bijective, vous posez $f(x) = y$. L'unique solution de cette équation sera l'image de y par f^{-1}

Exemples 24.

1. *Montrer que* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-2y) \end{array} \right.$ *est bijective et donner l'expression de sa bijection réciproque.*
2. *Donner l'expression de la bijection réciproque de* $x \mapsto e^x - e^{-x}$

Proposition 11.
Soit $f : E \to F$ une application. On suppose qu'il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$. Alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

Exemple 25. *Soit* $f : E \to E$ *une fonction telle que* $f \circ f = id_E$. *Peut-on affirmer que* f *est bijective?*

Proposition 12.
Soit $f : E \to F$ une fonction. On dit que f induit une bijection s'il existe $A \subset E$ et $B \subset F$ tels que $f|_A^B$ est bijective.

Exemple 26. *Montrer que* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 3x + 2 \end{array} \right.$ *induit une bijection* h *de* $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$ *vers* $\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[$ *et donner l'expression de sa bijection réciproque.*

Proposition 13.
Soit $f : I \to J$ une fonction bijective avec I et J des intervalles de $\mathbb{R}$.

- Le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la première bissectrice $y = x$.
- Si f est continue, alors f^{-1} est continue.
- Si f est strictement monotone, alors f^{-1} l'est aussi et de même sens de variations que f.