Correction du TD n 4

Correction 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $-1 < -1 + \dfrac{1}{n} \leqslant 1 - \dfrac{1}{n} < 1$ donc $\left[-1+\dfrac{1}{n}, 1-\dfrac{1}{n}\right] \subset]-1,1[$. On en déduit que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star}\left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] \subset]-1,1[$$

Pour l'inclusion réciproque, on se donne $x \in]-1,1[$. On a $x < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n} = 1$ donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x \leqslant 1 - \dfrac{1}{n} < 1$. De même, on a $-1 < x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -1 + \dfrac{1}{n} = -1$ donc il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $-1 \leqslant -1 + \dfrac{1}{n} < x$. En prenant $n = \max(n_1, n_2)$, on a $x \in \left[-1+\dfrac{1}{n}, 1-\dfrac{1}{n}\right]$ donc $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^\star}\left[-1+\dfrac{1}{n}, 1-\dfrac{1}{n}\right]$.

On a montré l'égalité par double inclusion.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $[-1,1] \subset \left]-1-\dfrac{1}{n}, 1+\dfrac{1}{n}\right[$. Ceci étant valable pour tout entier non nul n, on a

$$[-1,1] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star}\left]-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$$

Soit maintenant $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^\star}\left]-1-\dfrac{1}{n}, 1+\dfrac{1}{n}\right[$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, -1-\frac{1}{n} < x < 1+\frac{1}{n}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $x \in [-1,1]$.

On a montré l'égalité par double inclusion.

Correction 2 Montrons l'assertion par un raisonnement direct.

Si $A = B$, on a $A \cap B = A \cup B$. On suppose maintenant que A et B sont tels que $A \cap B = A \cup B$. Montrons que $A = B$. On le montre par double inclusion. Soit $x \in A$ montrons qu'il est aussi dans B. Comme $x \in A$ alors $x \in A \cup B$ donc $x \in A \cap B$ (car $A \cup B = A \cap B$). Ainsi $x \in B$ ce qui montre l'inclusion $A \subset B$.

Soit maintenant $x \in B$, par le même raisonnement on montre que $x \in A$. Par double inclusion, on a montré $A = B$.

Ensuite, comme demandé, nous le montrons par contraposée. On suppose $A \neq B$, montrons que $A \cap B \neq A \cup B$.

Si $A \neq B$ cela veut dire qu'il existe un élément $x \in A \setminus (A \cap B)$ ou alors un élément $x \in B \setminus (A \cap B)$. Quitte à échanger les rôles de A et B, nous supposons qu'il existe $x \in A \setminus (A \cap B)$. Alors $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$. Donc $A \cap B \neq A \cup B$.

Supposons maintenant $A \cap B \neq A \cup B$ et montrons que $A \neq B$. On sait que $A \cap B \subset A \cup B$ donc $A \cap B \neq A \cup B$ s'il existe $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. On a alors $x \in A$ ou $x \in B$.

- Si $x \in A$, alors $x \notin B$ puisque $x \notin A \cap B$. On a donc $A \neq B$.
- Si $x \in B$, alors $x \notin A$ puisque $x \notin A \cap B$. On a donc $A \neq B$.

On a montré, par disjonction de cas, que $A \neq B$. On a donc montré l'équivalence par contraposée.

Correction 3 On raisonne par équivalence:

$$\begin{array}{ll} & |z+i| = |z-i| \\ \Leftrightarrow & |z+i|^2 = |z-i|^2 \text{ par positivité des quantités} \\ ssi & z\overline{z} - iz + i\overline{z} + 1 = z\overline{z} + iz - i\overline{z} + 1 \\ \Leftrightarrow & 2\left(iz + \overline{iz}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & 4\mathcal{R}e(iz) = 0 \\ \Leftrightarrow & \mathcal{I}m(z) = 0 \text{ car } \mathcal{R}e(iz) = -\mathcal{I}m(z) \\ \Leftrightarrow & z \in \mathbb{R} \end{array}$$

On a montré que :

$$z \in \{z \in \mathbb{C}, |z+i| = |z-i|\} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R},$$

les deux ensembles sont donc égaux.

On peut aussi raisonner géométriquement. On note M, A et B les images de z, i et $-i$. On a

$$|z+i| = |z-i| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \text{ appartient à la médiatrice de [AB]} \Leftrightarrow M \text{ appartient à } O_x \Leftrightarrow$$

On a donc l'égalité entre les deux ensembles.

Correction 4 1. On a

- $f([-3,-1]) = [1,9]$,
- $f([-2,1]) = [0,4]$,
- $f([-3,-1] \cup [-2,1]) = f([-3,1]) = [0,9] = f([-3,-1]) \cup f([-2,1])$ et
- $f([-3,-1] \cap [-2,1]) = f([-2,-1]) = [1,4] = f([-3,-1]) \cap f([-2,1])$.

2. On a

   - $f^{-1}(]-\infty,2]) = [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$
   - $f^{-1}([1,+\infty) =]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$,
   - et $f^{-1}(]-\infty,2]\cap[1,+\infty[) = f^{-1}([1,2]) = [-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]$.
   - $f^{-1}(]-\infty,1]\cup[2,+\infty[) = f^{-1}(\mathbb{R}\setminus]1,2[) =]-\infty,-\sqrt{2}]\cup[-1,1]\cup[\sqrt{2},+\infty[= \mathbb{R}\setminus f^{-1}(]1,2[)$.

Correction 6 Soit $a\in\mathbb{R}$, on cherche à résoudre l'équation $f(x)=a$. On raisonne par équivalence:

$$f(x)=a \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = a \Leftrightarrow 1-x = e^a(1+x) \Leftrightarrow 1-e^a = x(1+e^a).$$

On a $e^a \neq -1$, donc $x=\dfrac{1-e^a}{1+e^a}$. On veut $x\in]-1,1[$, on raisonne par équivalence :

$$-1<\frac{1-e^a}{1+e^a}<1 \Leftrightarrow -1-e^a<1-e^a<1+e^a,$$

Le dernier encadrement est vrai donc, par équivalence, l'unique solution trouvée appartient bien à $]-1,1[$. L'équation a une unique solution donc f est bijective.

Correction 7 Soit $x\in\mathbb{Q}$ alors $f(x)=x$ donc $f\circ f(x)=f(x)=x$. Soit $x\notin\mathbb{Q}$ alors $f(x)=1-x$ donc $f\circ f(x)=f(1-x)$. Or $1-x\notin\mathbb{Q}$. En effet, si on suppose, par l'absurde, que c'est le cas, alors $1-(1-x)\in\mathbb{Q}$ ce qui est une contradiction. On a donc $f\circ f(x)=f(1-x)=1-(1-x)=x$. Donc pour tout $x\in[0,1]$ on a $f\circ f(x)=x$. Et donc $f\circ f = id$.

On en déduit que f est bijective et que $f^{-1}=f$.

Correction 8 L'application $x\mapsto x^2-4x+8$ est strictement croissante sur $[2,+\infty[$, la racine carrée aussi. En tant que composée de fonctions strictement croissantes, l'application f est strictement croissante donc injective.

On sait qu'elle est surjective si on la corestreint à son image, on va donc déterminer celle-ci. Comme f est croissante, on sait que

$$\mathrm{Im}(f) = f([2,+\infty[) = \left[f(2), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [2,+\infty[.$$

L'application f induit donc une bijection de $[2,+\infty[$ sur lui-même.

Pour déterminer la bijection réciproque, on se donne $a\in[2,+\infty[$ et on résout $f(x)=a$ (en cherchant x dans $[2,+\infty[$).
On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} f(x)=a &\Leftrightarrow \sqrt{x^2-4x+8}=a \\ &\Leftrightarrow x^2-4x+8=a^2 \text{ par positivité des quantités} \quad . \\ &\Leftrightarrow x^2-4x+(8-a^2)=0 \end{aligned}$$

Le discriminant vaut $4(a^2-4)$, il est donc positif et les racines réelles sont

$$\begin{cases} \dfrac{4\pm\sqrt{4(a^2-4)}}{2} = 2\pm\sqrt{a^2-4} \text{ si } a\neq 2 \\ 2 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Si $a>2$, on a $2-\sqrt{a^2-4}<2$ donc l'unique solution appartenant à $[2,+\infty[$ est $2+\sqrt{a^2-4}$. Si $a=2$, on retrouve l'unique solution 2. On en déduit que

$$\tilde{f}^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \longrightarrow & [2,+\infty[\\ x & \longmapsto & 2+\sqrt{x^2-4} \end{array} \right. .$$

Correction 9 1. L'équation $f(x)=y$ est équivalente à l'équation

$$yx^2-2x+y=0.$$

Si $y\neq 0$ et le discriminant et strictement négatif, (par exemple pour $y=2$), alors l'équation n'a pas de solution réelle donc f n'est pas surjective. Si le discriminant est strictement positif, l'équation a deux racines réelles distinctes donc f n'est pas injective.

2. Si $y=0$, l'unique solution est $x=0$, si $y\neq 0$, cette équation d'ordre 2 en x admet des solutions si et seulement si son discriminant $\Delta = 4-4y^2$ est positif ou nul donc il y a des solutions si et seulement si $y\in[-1,1]\setminus\{0\}$. Ainsi, l'équation $f(x)=y$ admet au moins une solution si et seulement si $y\in[-1,1]$, nous venons de montrer que $f(\mathbb{R})$ est exactement $[-1,1]$.

3. Soit $y\in[-1,1]\setminus\{0\}$ alors les solutions possibles de l'équation $g(x)=y$ sont :

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-y^2}}{y},$$

pour $y\neq 0$ et 0 si $y=0$. Montrons que la seule solution dans $[-1,1]$ est $\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$. On a $\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in[-1,1]$.

En effet, $0<\sqrt{1+y^2}<1$ donc $\dfrac{1}{2}<\dfrac{|y|}{1+\sqrt{y^2}}<1$ puis $\frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}}\in[-1,1]$.
Montrons que l'autre solution n'appartient pas à $[-1,1]$. Il faut éliminer le cas où $y=\pm1$ car les deux solutions sont alors égales. Si $y\in]0,1[$, on a

$$\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}>1 \Leftrightarrow \sqrt{1-y^2}>y-1$$

et la deuxième inégalité est vraie donc $\dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} > 1$.

Si $y \in]-1,0[$, on a

$$\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} < -1 \Leftrightarrow \sqrt{1-y^2} > -y+1$$

et la deuxième inégalité est vraie donc $\dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} < -1$

On a montré que pour tout $y \in [-1,1]$, l'équation $g(x) = y$ admettait une unique solution dans $[-1,1]$ donc g est bijective.

4. On a $f'(x) = \frac{2-2x^2}{1+x^2}$, donc f' est strictement positive sur $]-1,1[$ et f est strictement croissante sur $[-1,1]$. On en déduit que f est injective et $f([-1,1]) = [-1,1]$ donc la restriction de f, $g : [-1,1] \longrightarrow [-1,1]$, est une bijection.

Correction 10 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On étudie l'équation $f(x) = a$. On remarque que $|f(x)| < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, il n'y a donc pas de solution si a n'appartient pas à $]-1,1[$. Soit maintenant $a \in]-1,1[$ et cherchons $x \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{x}{1+|x|} = a$.

On remarque que x et a sont de même signe.

- Si $a > 0$, on cherche une solution $x > 0$ et $f(x) = a \Leftrightarrow \dfrac{x}{1+x} = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{1-a}$.
- Si $a < 0$, on cherche une solution $x < 0$ et $f(x) = a \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x} = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{1+a}$.
- Si $a = 0$, alors $x = 0$.

On a montré que pour tout $a \in]-1,1[$, l'équation $f(x) = a$ admet une unique solution, f induit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

2. D'après le travail fait à la question précédente, si $y \in]-1,1[$, l'unique antécédent de y par f est $\dfrac{y}{1-|y|}$.

Correction 11 1. Supposons $g \circ f$ injective, et montrons que f est injective : Soit $(a,a') \in A^2$ tel que $f(a) = f(a')$, montrons que $a = a'$. On applique g à l'égalité, on obtient $g \circ f(a) = g \circ f(a')$. Or $g \circ f$ est injective donc $a = a'$. On a montré que f est injective.

2. Supposons $g \circ f$ surjective, et montrons que g est surjective : soit $c \in C$, montrons qu'il admet un antécédent par g. Comme $g \circ f$ est surjective il existe $a \in A$ tel que $g \circ f(a) = c$; posons $b = f(a)$, alors $g(b) = c$. On a montré que tout élément c de C admet un antécédent par g donc g est surjective.

Correction 12 On note k un antécédent de 0. On a alors $f(k) = 0$. Or, par hypothèse, $f(k) \geqslant k$ donc $0 \geqslant k$. Comme k est un entier naturel, on a $k = 0$.

Correction 13 On suppose h^2 bijective alors $h^2 = h \circ h$ est injective et surjective ce qui implique, d'après le résultat vu en cours, que h est injective et surjective donc bijective.

On suppose maintenant h^n bijective alors $h^n = h \circ h^{n-1}$ est surjective donc h l'est et $h^n = h^{n-1} \circ h$ est injective donc h l'est. On en déduit que h est bijective.

Correction 14 Montrons-le par double implication. Supposons tout d'abord f injective. Montrons que f est surjective. Soit $x \in E$, alors $f(x) = f(f \circ f(x))$ donc, par injectivité de f, $f \circ f(x) = x$. Ainsi, $f(x)$ est un antécédent de x par f. Ceci étant valable pour tout $x \in E$, f est surjective.

Supposons maintenant f surjective. Montrons que f est injective. On suppose donc qu'il existe (a,b) tel que $f(a) = f(b)$, montrons que $a = b$. La fonction f étant surjective, il existe $(a',b') \in E^2$ tel que $f(a') = a$ et $f(b') = b$. On a alors $f(a') = f \circ f \circ f(a') = f \circ f(a)$ et $f(b') = f \circ f(b)$. Comme $f(a) = f(b)$, on a $f \circ f(a) = f \circ f(b)$ donc $f(a') = f(b')$ c'est-à-dire $a = b$, par définition de a' et b' donc f est injective.
Par double implication, on a montré l'équivalence.

Correction 15 Soit $B \in \mathcal{P}(Y)$, alors $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset f(X)$ et $\forall c \in f\left(f^{-1}(B)\right)$, il existe $a \in f^{-1}(B)$, $f(a) = c$ et $f(a) \in B$ puisque $a \in f^{-1}(B)$. On a donc $c \in B$ ce qui montre l'inclusion $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B \cap f(X)$.
Soit maintenant $y \in B \cap f(X)$, alors $y \in f(X)$ donc il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Or, $y \in B$ donc $f(x) \in B$ ce qui est équivalent à $x \in f^{-1}(B)$. On a donc $y \in f\left(f^{-1}(B)\right)$ ce qui montre l'autre inclusion.

Correction 16 On commence par le raisonnement direct. Si $B = C$, on a bien $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Soient maintenant A, B, C tels que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$. Montrons que $B = C$. On le montre par double inclusion. Soit $x \in B$, alors $x \in A \cup B$. Or $A \cup B = A \cup C$ donc $x \in A$ ou $x \in C$. Si $x \in C$, c'est gagné. Si $x \in A$, alors $x \in B \cap A$. Or $A \cap B = A \cap C$, on a donc $x \in C$. Ainsi, on a montré que pour tout $x \in B$, on a $x \in C$ d'où l'inclusion. L'autre inclusion se montre en inversant les rôles de B et C.

Montrons maintenant l'équivalence par contraposée. Supposons $B \neq C$ montrons que $A \cap B \neq A \cap C$ ou $A \cup B \neq A \cup C$. Comme $B \neq C$, il existe $b \in B \setminus (B \cap C)$ ou $c \in C \setminus (B \cap C)$. S'il existe $b \in B \setminus (B \cap C)$, on a $b \notin c$ et on a deux cas possibles :

- $b \in A$: dans ce cas $b \in A \cap B$ mais $b \notin A \cap C$ puisque $b \notin C$, ce qui montre que $A \cap C \neq A \cap B$.

- $b \notin A$: dans ce cas $b \in A \cup B$ mais $b \notin A \cup C$ puisque $b \notin C$ ce qui montre que $A \cup C \neq A \cup B$.

S'il existe $c \in C \setminus (B \cap C)$, le raisonnement est identique.

Correction 17 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} x \in E \setminus (A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ et } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in E \setminus A \text{ et } x \in E \setminus B \\ &\Leftrightarrow x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)\,. \end{aligned}$$

À nouveau, on raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} x \in E \setminus (A \cap B) &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in E \setminus A \text{ ou } x \in E \setminus B \\ &\Leftrightarrow x \in (E \setminus A) \cup (E \setminus B)\,. \end{aligned}$$

Correction 18 On peut raisonner par équivalence. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{array}{ll} & |z-1| = |z+1| \\ \Leftrightarrow & |z-1|^2 = |z+1|^2 \text{ par positivité du module} \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow & -2x = 2x \\ \Leftrightarrow & x = 0 \\ \Leftrightarrow & z \in i\mathbb{R} \end{array}.$$

On a bien l'équivalence entre $z \in i\mathbb{R}$ et $|z-1| = |z+1|$ donc les deux ensembles sont égaux.

On peut aussi raisonner par double inclusion. Si $z \in i\mathbb{R}$, alors $z = ib$, $b \in \mathbb{R}$ donc

$$\begin{aligned} |z-1| &= \sqrt{(-1)^2 + b^2} \\ &\sqrt{1 + b^2} \\ &= |z+1| \end{aligned}$$

On a donc l'inclusion $i\mathbb{R} \subset \{z \in \mathbb{C}, |z+1| = |z-1|\}$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z+1| = |z-1|$. On pose $z = a + ib$ avec a, b réels.

On a

$$\sqrt{(a+1)^2 + b^2} = \sqrt{(a-1)^2 + b^2}$$

donc, en élevant au carré

$$a^2 + 2a + 1 + b^2 = a^2 - 2a + 1 + b^2$$

ce qui impose $a = 0$. Ainsi, $z = ib$ donc $z \in i\mathbb{R}$.

Par double inclusion, on a montré l'égalité des deux ensembles.

On peut également raisonner de manière géométrique en notant M, A et B les images de z, -1 et 1. On a alors

$|z+1| = |z-1| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M$ appartient à la médiatrice de [AB] $\Leftrightarrow M$ appartient à $O_y \Leftrightarrow$

Correction 19 On peut raisonner par équivalence. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{array}{ll} & |z-1| = |z-i| \\ \Leftrightarrow & |z-1|^2 = |z-i|^2 \text{ par positivité du module} \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \\ \Leftrightarrow & -2x = -2y \\ \Leftrightarrow & x = y \\ \Leftrightarrow & \mathcal{R}e(z) = \mathcal{I}m(z) \end{array}.$$

On a montré qu'un complexe appartient au premier ensemble si et seulement s'il appartient au deuxième, les deux ensembles sont donc égaux.

On peut aussi raisonner par double inclusion.

Soit donc $z \in \{z \in \mathbb{C}, \mathcal{R}e(z) = \mathcal{I}m(z)\}$, alors $z = a + ia$. On a alors

$$|z-1| = \sqrt{(a-1)^2 + a^2}$$

et

$$|z-i| = \sqrt{a^2 + (a-1)^2}$$

donc $|z-i| = |z-1|$ et le premier ensemble est inclus dans le deuxième.

Soit maintenant $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-1| = |z-i|$, montrons que z vérifie $\mathcal{R}e(z) = \mathcal{I}m(z)$.

On pose $z = a + ib$ avec a, b réels. On a

$$|z-1| = \sqrt{(a-1)^2 + b^2} \text{ et } |z-i| = \sqrt{a^2 + (b-1)^2}.$$

On élève au carré, on obtient

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 = a^2 + b^2 - 2b + 1,$$

d'où, après simplification, $a = b$. On a donc bien $\mathcal{R}e(z) = \mathcal{I}m(z)$ ce qui montre l'inclusion réciproque. Les deux ensembles sont bien égaux.

On peut également raisonner de manière géométrique en notant M, A et B les images de z, 1 et i. On a alors

$|z-1| = |z-i| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M$ appartient à la médiatrice de [AB] $\Leftrightarrow M$ appartient à la dro

Correction 20 On a $f^{-1}([0,+\infty[) = \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty,-3]) = \emptyset$ et $f^{-1}([-2,4]) = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Correction 21 Le plus simple est de tracer le tableau de variations de la fonction. La fonction f est dérivable, on a $f' : x \mapsto -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$. On a donc :

x	0		1
f	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

On a donc :

$$f([0,1]) = \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

De même, on a :

x	-3		0		1
f	$\frac{1}{10}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

On en déduit que :

$$f([-3,1[) = \left[\frac{1}{10}, 1\right].$$

Enfin, pour déterminer l'image réciproque, on se donne $x \in \mathbb{R}$ et on raisonne par équivalence :

$$\frac{1}{4} < f(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant 1 + x^2 < 4 \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}.$$

On a donc l'égalité :

$$f^{-1}\left(\left]\frac{1}{4}, 1\right]\right) =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[.$$

Correction 22

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$f_1(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y &= a \\ x - y &= b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x &= a+b \\ 3y &= a-b \end{cases}$$

Ainsi (a,b) admet un unique antécédent par f_1, on en déduit que f_1 est bijective.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$, alors $f_2(a,0) = a$ donc f_2 est surjective. En revanche, $f_2(0,1) = f_2(0,-1)$ donc elle n'est pas injective.

3. Soit $k \in \mathbb{Z}$,

   - Si $k \geqslant 0$, alors $f_3(2k) = k$.
   - Si $k < 0$, alors $f_3(-2k-1) = k$

   On a montré que f_3 était surjective. Montrons que f_3 est injective. Soit donc $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $f_3(a) = f_3(b)$.

   - Si a est pair, alors $f_3(a) = \frac{a}{2}$ donc $f_3(b) \geqslant 0$ ce qui impose b pair et $\frac{b}{2} = \frac{a}{2}$ donc $a = b$.
   - De même, si a est impair, alors $f_3(a)$ est strictement négatif donc $f_3(b)$ aussi, on a donc a et b impairs d'où $\frac{a+1}{2} = \frac{b+1}{2}$ et $a = b$

   La fonction f_3 est bien injective, elle est donc bijective.

Correction 23

- Montrons que f est injective : Soit $(x,y) \in [1,+\infty[^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors $x^2 - 1 = y^2 - 1$ d'où $x = \pm y$. Or, x et y sont positifs, on a donc $x = y$ et f est injective.
- Montrons que f est surjective : soit $y \in [0,+\infty[$. Montrons qu'il existe un réel $x \in [1,+\infty[$ tel que $y = f(x) = x^2 - 1$. On remarque que le réel $x = \sqrt{y+1}$ convient, on a donc bien f surjective.

On a montré que f est bijective.

Correction 24 On va déterminer son tableau de variations. Pour cela, on remarque que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$:

$$f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(x) + x^{n-1} = x^{n-1}(n\ln(x) + 1).$$

On a donc :

$$f_n'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow n\ln(x) + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant e^{-\frac{1}{n}}.$$

On a le tableau de variations suivant :

x	0		$e^{-\frac{1}{n}}$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{en}$	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que l'image de f_n est $\left[-\frac{1}{en}, +\infty\right[$.

Correction 25 La fonction f n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{N}$, elle est injective car $f(n) = f(n') \Rightarrow n = n'$. La fonction g est surjective car pour tout $x \in \mathbb{N}$, $x+1$ est un antécédent par g. En revanche, elle n'est pas injective car $g(0) = g(1) = 0$. Soit $x \in \mathbb{N}^\star$, on a $f \circ g(x) = f(x-1) = (x-1)+1 = x$ et $f \circ g(0) = f(0) = 1$ donc

$$f \circ g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{N}$, alors $g \circ f(x) = g(x+1) = (x+1)-1 = x$ donc $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$.

Remarque. *On a $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$ mais $f \circ g \neq id_{\mathbb{N}}$ et ni f ni g n'est bijective.*

Correction 26 Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, résolvons le système $f(n,m) = (a,b)$. On trouve $n = \dfrac{a+b}{2}$ et $m = \dfrac{a-b}{2}$. Si a et b ne sont pas de même parité, il n'existe pas de solution dans $\mathbb{Z}$ donc f n'est pas surjective.
En revanche, si un antécédent existe (dans $\mathbb{Z}^2$), il est unique, égal à $\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2}\right)$ donc f est injective.

Correction 27 On se donne un élément $a \in \mathbb{R}$ et on cherche à résoudre l'équation $f(x) = a$ avec $x \neq 2$. On raisonne par équivalence:

$$f(x) = a \Leftrightarrow \frac{3x+5}{x-2} = a \Leftrightarrow 3x+5 = a(x-2) \Leftrightarrow (a-3)x = 5+2a.$$

On voit, ici, que pour $a = 3$, l'équation n'a pas de solution. De plus, si $a \neq 3$, l'équation a une unique solution : $x = \dfrac{5+2a}{a-3}$. On en déduit que f induit une bijection h de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ et l'expression de la bijection réciproque est

$$h^{-1}(x) = \frac{5+2x}{x-3}.$$

Correction 28 Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, on étudie l'équation $f(x,y) = (a,b)$. On a donc

$$f(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} xy = a \\ \dfrac{x}{y} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = ab \\ xy = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{ab} \\ y = \sqrt{\dfrac{a}{b}} \end{cases}$$

On cherche (x,y) dans $(\mathbb{R}_+^\star)^2$ donc (a,b) admet un unique antécédent dans $(\mathbb{R}_+^\star)^2$ qui est $\left(\sqrt{ab}, \sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)$. L'application réciproque est donc $f^{-1} : (x,y) \mapsto \left(\sqrt{xy}, \sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)$.

Correction 29 Comme on demande l'application réciproque, on va chercher à résoudre l'équation $f(z,z') = (a,b)$ pour un couple $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ donné. On raisonne par équivalence:

$$\begin{cases} 2z + z' = a \\ 3z - z' = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5z = a+b \\ 5z' = 3a - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{a+b}{5} \\ z' = \dfrac{3a-2b}{5} \end{cases}.$$

On a montré que l'équation possède une unique solution, l'application est donc bijective. De plus, l'unique antécédent de (a,b) est $\left(\dfrac{a+b}{5}, \dfrac{3a-2b}{5}\right)$ donc

$$f^{-1} : (z,z') \mapsto \left(\frac{z+z'}{5}, \frac{3z-2z'}{5}\right).$$

Correction 30

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $h(a) = h(b)$. On a alors

   $$(f(a), g(a)) = (f(b), g(b))$$

   donc $f(a) = f(b)$ et $g(a) = g(b)$. Par injectivité de f, on a $a = b$ donc h est injective.

   Remarque. *l'injectivité d'une seule des deux fonctions suffit.*

2. C'est faux. En effet, étant donné $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on sait qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = a$ et $x' \in \mathbb{R}$ tel que $g(x') = b$ mais il n'y a aucune raison pour que $x = x'$. Pour se convaincre, on peut considérer la fonction $h : x \mapsto (x,x)$. On a $f = id = g$ et les deux fonctions sont surjectives (et même bijectives), pourtant l'élément $(1,2)$ n'admet pas d'antécédent par h.

Correction 31

1. Soit $y \in f(A \cap B)$, alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $f(x) = y$.
   On a $x \in A$ donc $y = f(x) \in f(A)$.
   De même, $x \in B$ donc $y = f(x) \in f(B)$ d'où $y \in f(A) \cap f(B)$ ce qui montre l'inclusion

   $$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

   L'inclusion réciproque est fausse en général.
   Contre-exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ et $A = \mathbb{R}_+^\star, B = \mathbb{R}_-^\star$. On a $A \cap B = \emptyset$ et $f(A) = f(B) = \mathbb{R}_+^\star$ donc $f(A) \cap f(B) \neq f(A \cap B)$.

2. Soit $y \in f(A \cup B)$, alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Si $x \in A$, alors $y = f(x) \in f(A)$. Si $x \in B$, alors $y = f(x) \in f(B)$. On a donc $y \in f(A) \cup f(B)$ d'où l'inclusion

   $$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B).$$

Soit maintenant $y \in f(A) \cup f(B)$, alors soit $y \in f(A)$, soit $y \in f(B)$. Si $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Comme $A \subset A \cup B$, on a $x \in A \cup B$ donc $y \in f(A \cup B)$. De même, si $y \in f(B)$, alors il existe $x \in B$ tel que $y = f(x)$ et comme $B \subset A \cup B$, on a $x \in A \cup B$ donc $y \in f(A \cup B)$. On a bien l'inclusion réciproque

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$$

d'où l'égalité.

Correction 32 1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, résolvons le système $f(x, y) = (a, b)$:

$$\begin{cases} x - 2y & = a \\ 2x + 3y & = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y & = b - 2a \\ 7x & = 3a + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = \dfrac{3a + 2b}{7} \\ y & = \dfrac{b - 2a}{7} \end{cases}.$$

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, le système admet une unique solution dans $\mathbb{R}^2$ donc f est bijective.

2. On commence par remarquer que les éléments de Δ s'écrivent $(x, 1 - 2x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} (a, b) \in f(\Delta) & \Leftrightarrow \exists (x, y) \in \Delta, f(x, y) = (a, b) \\ & \Leftrightarrow \exists (x, 1 - 2x) \in \mathbb{R}^2, f(x, 1 - 2x) = (a, b) \\ & \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, (5x - 2, 3 - 4x) = (a, b) \end{aligned}$$

Le système

$$\begin{cases} 5x - 2 & = & a \\ 3 - 4x & = & b \end{cases}$$

est équivalent à

$$\begin{cases} 5x & = & a + 2 \\ 4x & = & 3 - b \end{cases}.$$

Il admet une solution si et seulement si $4(a + 2) = 5(3 - b)$ ce qui se réécrit $4a + 5b = 7$.

Par équivalence, on a montré :

$$f(\Delta) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2, 4a + 5b = 7\}.$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} (x, y) \in f^{-1}(\Delta) \Leftrightarrow \quad & f(x, y) \in \Delta \\ \Leftrightarrow \quad & (x - 2y, 2x + 3y) \in \Delta \\ \Leftrightarrow \quad & 2(x - 2y) + (2x + 3y) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 4x - y = 1 \end{aligned}$$

Par équivalence, on a montré que :

$$f^{-1}(\Delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 4x - y = 1\}.$$

Correction 33 1. Il suffit de considérer l'application qui à x associe le singleton $\{x\}$. Elle est bien définie de E dans $\mathcal{P}(E)$ et $\{x\} = \{y\} \Leftrightarrow x = y$ donc elle est injective.

2. Si $A \in \mathrm{Im}(f)$, alors, il existe $a \in E$ tel que $f(a) = A$. On a alors

   - Si $a \in A$, alors par définition de A, $a \notin f(a) = A$ ce qui est absurde.
   - Si $a \notin A$, alors, par définition de A, $a \in f(a)$. Or $f(a) = A$, on obtient, à nouveau, une contradiction.

   Un tel élément a de E ne peut donc pas exister ce qui montre qu'une application de E dans $\mathcal{P}(E)$ ne peut pas être surjective, il n'existe donc pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

Correction 34 On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} f \text{ surjective} & \Leftrightarrow f(X) = Y \\ & \Leftrightarrow \forall B \subset Y, B \cap f(X) = B \\ & \Leftrightarrow \forall B \subset Y, f(f^{-1}(B)) = B \text{d'après l'exercice 15} \end{aligned}$$

On a donc bien l'équivalence souhaitée.