

## Programme de colles: semaine 5. (semaine démarrant le 14 octobre.)

### Question de cours:

- Montrer que si  $f : E \rightarrow F$  et qu'il existe  $g : F \rightarrow E$  telle que  $g \circ f = id_E$  et  $f \circ g = id_F$ , alors  $f$  est bijective.
- Citer des  $DL_2$  en 0 de fonctions usuelles.
- Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$  (en admettant le thm de limite monotone et l'unicité de la limite).
- Montrer que si  $\beta > 0$  alors  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} = 0$  (en admettant  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ ).

### Ensemble et applications

- Définition d'ensembles, sous-ensemble.
- Définition de la réunion/l'intersection/le complémentaire.
- Égalité de deux ensembles.
- Définition de la fonction caractéristique d'un sous-ensemble  $A$  de  $E$ .
- Définition de fonction/image d'un point/antécédent.
- Définition de l'image d'une fonction notée  $\text{Im}(f)$  et de l'image directe d'un ensemble  $f(A)$ .
- Définition de l'image réciproque d'un ensemble noté  $f^{-1}(B)$ .
- Définition de restriction/corestriction d'une fonction
- Définition de fonction surjective, caractérisation par son image. Traduction géométrique dans le cas d'une fonction de la variable réelle définie dans  $\mathbb{R}$ .
- Définition de fonction injective, cas des fonctions strictement monotones.
- Définition de fonction bijective, définition de la bijection réciproque.
- S'il existe  $g$  telle que  $g \circ f = id$  et  $f \circ g = id$  alors  $f$  bijective et  $g = f^{-1}$ .
- Si  $f$  est bijective, alors  $f^{-1}$  aussi et  $(f^{-1})^{-1} = f$ .
- Définition de bijection induite.
- Monotonie de la réciproque d'une bijection strictement monotone, graphe de  $f^{-1}$ .

On rajoute le début du cours sur les fonctions usuelles avec l'introduction des notations de Landau :  $\sim$  et  $o(\ )$ . Les élèves doivent être capables de trouver un équivalent simple ou de calculer une limite à l'aide d'équivalents ou de  $DL_2$ . Nous n'avons pas vu les formules de Taylor, nous avons juste donné les  $DL_2$  des fonctions usuelles. L'idée est de commencer à manipuler.

### Fonctions usuelles

- Définition de  $\ln$  comme l'unique solution au pb de Cauchy...
- équation fonctionnelle du  $\ln$ , propriétés.
- Définition de  $e$  comme unique antécédent de 1 par  $\ln$ .
- Définition de la fonction  $\exp$  telle que  $\exp|_{\mathbb{R}^+}$  soit la bijection réciproque de  $\ln$ .
- Propriétés de l'exponentielle.
- Définition de la puissance réelles, propriétés.
- thm de croissances comparées.

Aucun exercice fait sur la croissance comparée (td lundi/mardi) donc privilégiez le chapitre précédent, manipulation  $\sim$  et  $o(\ )$  et exercices  $\exp/\ln$  utilisant les propriétés de terminal si vous collez en début de semaine.