Lycée du Parc
PCSI 842 — Année 2023-2024
eDS 2

Devoir surveillé 2.

Chaque résultat doit être justifié, les réponses doivent être soulignées ou encadrées. Les étapes des éventuels calculs doivent apparaître sur la copie. On peut admettre un résultat ou une question en le précisant explicitement. La clarté et la précision de la rédaction ainsi que la présentation de la copie seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1.

1. On considère les fonctions suivantes:

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2-(x-1)^2 \end{array} \right. \quad \text{et } g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{(x^2)} \end{array} \right.$$

   On rappelle que $e \approx 2.7$.

   (a) Étudier f et g.

   (b) Tracer f et g sur une même figure.

   (c) f est-elle injective? surjective?

   (d) g est-elle injective? surjective?

2. On considère les fonctions suivantes:

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} g(x) & \text{si } x \leqslant 1 \\ f(x) & \text{si } x > 1 \end{array} \right. \end{array} \right. , \quad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{si } x \leqslant 0 \\ g(x) & \text{si } x > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\text{et } f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{si } x \leqslant 1 \\ g(x) & \text{si } x > 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

3. f_1 est-elle injective? surjective? bijective? Si oui, on calculera sa bijection réciproque.

4. f_2 est-elle injective? surjective? bijective? Si oui, on calculera sa bijection réciproque.

5. f_3 est-elle injective? surjective? bijective? Si oui, on calculera sa bijection réciproque.

Exercice 2.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit x un nombre réel non multiple de l'entier π.

1. On définit, pour n dans $\mathbb{N}^*$, le produit $P_n(x)$ par: $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$
   (a) Exprimer $\sin\left(\dfrac{x}{2^{n-1}}\right)$ en fonction de $\cos\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.
   (b) Démontrer que $2\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right) P_n(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2^{n-1}}\right) P_{n-1}(x)$.
   (c) En déduire que $\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right) P_n(x) = \dfrac{1}{2^n}\sin(x)$
2. Déterminer la limite de $P_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   On rappelle que $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin(u)}{u} = 1$
3. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit

$$u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} \text{ (} n \text{ radicaux)}$$

   (a) i. Pour $a \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(2a)$ en fonction de $\cos^2(a)$.
   ii. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$
   (b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{1}{2^n}\prod\limits_{k=1}^{n} u_k$
   En utilisant les questions précédentes, déterminer la limite de v_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par $u_n = \left(\binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{n}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\prod\limits_{p=0}^{n} p! = \prod\limits_{p=1}^{n} p^{n-p+1}$.
2. En déduire que $\prod\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \prod\limits_{p=1}^{n} p^{2p-n-1}$.
3. (a) Montrer que $\sum\limits_{p=1}^{n} (2p-n-1) = 0$.
   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $\ln(u_n) = \dfrac{1}{n(n+1)}\sum\limits_{p=1}^{n} (2p-n-1)\left(\ln\left(\dfrac{p}{n+1}\right) - 1\right)$.

Exercice 4.

Dans cet exercice, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$$

1. Calculer explicitement a_4 sans symbole $\sum$.
2. Dans cette question seulement, on suppose que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme b_0. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer a_n en fonction de n, q et b_0.
3. Dans cette question seulement, on suppose que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme b_0.
   (a) Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$.
   (b) En déduire pour $n \in \mathbb{N}$ une expression de a_n, en fonction de n, b_0 et r.
4. Retour au cas général:
   (a) Montrer que si k, n et m sont trois entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant m$ alors $\displaystyle\binom{m+1}{n}\binom{n}{k} = \binom{m+1}{k}\binom{m+1-k}{n-k}$.
   (b) Montrer que si k et m sont deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant m$ alors $\displaystyle\sum_{j=0}^{m-k} (-1)^j \binom{m+1-k}{j} = (-1)^{m-k}$.
   (c) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le nombre b_{n+1} en fonction de a_{n+1} et des nombres $b_0, b_1, \ldots, b_n$.
   (d) Montrer la formule d'inversion de Pascal :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$$

On considère la suite définie par $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $e_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $e_n = ne_{n-1} + (-1)^n$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e_k.$$

5. Calculer e_k pour k variant de 1 à 5 puis f_k pour k variant de 0 à 5;
6. Déterminer une expression de f_n en fonction de n.
7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Correction du DS n 2

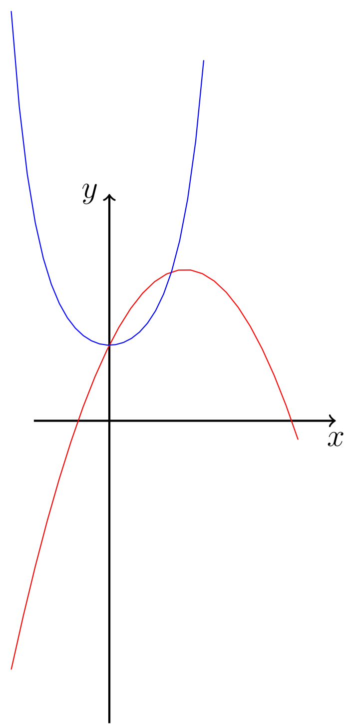
Exercice 1 1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = -2(x-1)$ donc $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1$, on a donc

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = 2xe^{x^2}$ donc $g'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$, on a donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

(b) On a la figure suivante :



Ici, il était essentiel de s'appliquer pour réussir la suite. Les deux graphes s'intersectent en le point d'abscisse (0,1) (notamment) et en le point d'abscisse 1*, le graphe de* f *est en dessous de celui de* g *puisque* $f(1) = 2 < 2 = g(1)$*.*

(c) La fonction f n'est pas injective car $f(0) = f(2) = 1$. On peut aussi raisonner avec le TVI : $1 \in f(]-\infty, 1[) =]-\infty, 2[$ donc 1 admet un antécédent dans $]-\infty, 1[$. De même, $1 \in f(]1, +\infty[) =]-\infty, 2[$ donc 1 admet également un antécédent dans $]1, +\infty[$. Ces deux antécédents sont distincts donc f n'est pas injective.

Elle n'est pas surjective car son image vaut $]-\infty, 2]$, le réel 3 (par exemple) n'admet donc pas d'antécédent.

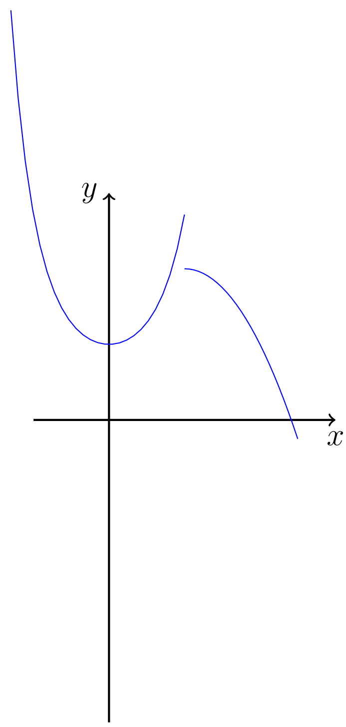
Attention à donner un vrai argument ! Me dire qu'elle n'est pas surjective car certains éléments de son espace d'arrivée n'ont pas d'antécédent ou qu'elle n'est pas injective car certains éléments ont deux antécédents distincts revient à me dire " elle n'est pas surjective/injective car elle n'est pas surjective/injective.

(d) La fonction g n'est pas injective car $g(-1) = g(1)$. On peut aussi appliquer le TVI deux fois: $2 \in f(]-\infty, 0[) =]1, +\infty[$ donc 2 admet un antécédent dans $]-\infty, 0[$. De même, $2 \in f(]0, +\infty[) =]1, +\infty[$ donc 2 admet également un antécédent dans $]0, +\infty[$. Ces deux antécédents sont distincts donc g n'est pas injective. Elle n'est pas surjective car son image vaut $[1, +\infty[$ ou bien car 0 n'admet pas d'antécédent puisqu'une exponentielle est toujours strictement positive.

2. On a $f(1) = 2 \neq g(1)$ donc f_1 n'est pas continue. D'après l'étude faite précédemment, on a

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f_1	$+\infty$	↘	1	↗	e ‖ 2	↘	$-\infty$

et la figure suivante :



D'après le tableau de variations, on a $\mathrm{Im}(f_1) = [1, +\infty[\cup]-\infty, 2[= \mathbb{R}$ et f_1 est surjective. Elle n'est pas injective car $g(-1) = g(1)$ ou bien : $\dfrac{3}{2} \in f_1(]0, 1[) =]1, 2[$ et $\dfrac{3}{2} \in f_1(]1, +\infty[) =]-\infty, 2[$. Ainsi, $\dfrac{3}{2}$ admet (au moins) deux antécédents distincts donc f_1 n'est pas injective.

Certains ont raisonné avec l'équation $f(x) = a$ mais en raisonnant avec x alors que l'on cherche précisément à savoir si x existe, c'est donc sur a qu'il faut raisonner ! Voilà comment vous auriez pu rédiger:

Soit $a \in \mathbb{R}$, on étudie l'équation $f_1(x) = a$.

- si $a \in]-\infty, 1[$, alors $a \notin f_1(]-\infty, 1])$, on cherche donc une solution à $f_1(x) = a$ dans $]1, +\infty[$. Or $f_1|_{]1,+\infty[} = f|_{]1,+\infty[}$ donc

$$\begin{aligned} f_1(x) = a &\Leftrightarrow f(x) = a \\ &\Leftrightarrow 2 - (x-1)^2 = a \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 = 2 - a \\ &\Leftrightarrow |x - 1| = \sqrt{2-a} \\ &\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{2-a} \text{ car on résout sur }]1, +\infty[\\ &\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2-a} \end{aligned}$$

Sia

$]1, 2[$, alors

$$_1(x) = a$$

$$\Leftrightarrow f(x) = a \text{ ou } g(x) = a$$

$$\Leftrightarrow (2 - (x-1)^2 = a \text{ et } x > 1) \text{ ou } \Big(e^{x^2} = a \text{ et } x \leqslant 1$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \pm\sqrt{2-a} \text{ ou } x^2 = \ln(a)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2-a} \text{ ou } x = \pm\sqrt{\ln(a)}$$

- Enfin, si $a \in]2, +\infty[$, alors $a \in f_1(]-\infty, 1[)$ et $f_1|_{]-\infty,1[} = g|_{]-\infty,1[}$ et on cherche à résoudre dans $]-\infty, 1[$. On a

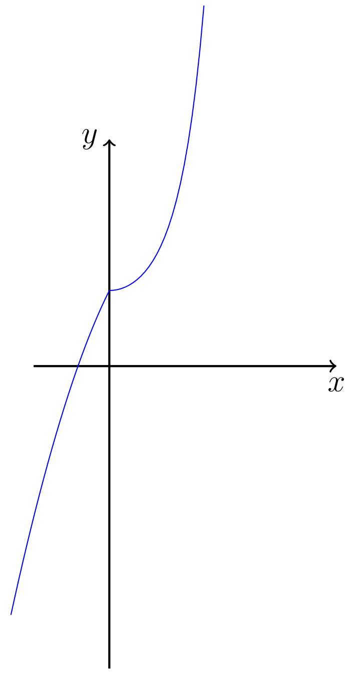
$$\begin{aligned} f_1(x) = a &\Leftrightarrow g(x) = a \\ &\Leftrightarrow e^{x^2} = a \\ &\Leftrightarrow x^2 = \ln(a) \text{ car } a > 0 \\ &\Leftrightarrow x = \pm \ln(a) \\ &\Leftrightarrow x = -\ln(a) \text{ car on résout sur }]-\infty, 1[\end{aligned}$$

On a montré que pour tout $a \in \mathbb{R}$ l'équation $f_1(x) = a$ admet toujours une solution donc f_1 est surjective. En revanche, elle admet parfois plusieurs solutions distinctes, elle n'est donc pas injective.

3. On a $f(0) = g(0) = 1$ donc f_2 est continue. D'après l'étude faite précédemment, on a :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f_2	$-\infty$	$\nearrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

et la figure suivante :



La fonction f_2 est strictement croissante donc injective. Son image vaut $\mathbb{R}$, elle est donc bijective. Soit $a \in \mathbb{R}$, on doit résoudre $f_2(x) = a$. On remarque que

- Si $a > 1$, $a \in f_2(]0, +\infty[)$ donc $f_2(x) = a \Leftrightarrow e^{x^2} = a \Leftrightarrow x^2 = \ln(a) \Leftrightarrow x = \sqrt{\ln(a)}$ car $f_2^{-1}(]1, +\infty[) =]0, +\infty[$, on cherche donc un antécédent positif.
- De même, si $a \leqslant 1$, $a \in f_2(] - \infty, 0[)$ donc $f_2(x) = a \Leftrightarrow 2 - (x-1)^2 = a \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2 - a \Leftrightarrow |1 - x| = \sqrt{2-a} \Leftrightarrow 1 - x = \sqrt{2-a}$ car, cette fois-ci, l'antécédent recherché est négatif donc $x - 1 < 0$. On a donc $x = 1 - \sqrt{2-a}$.

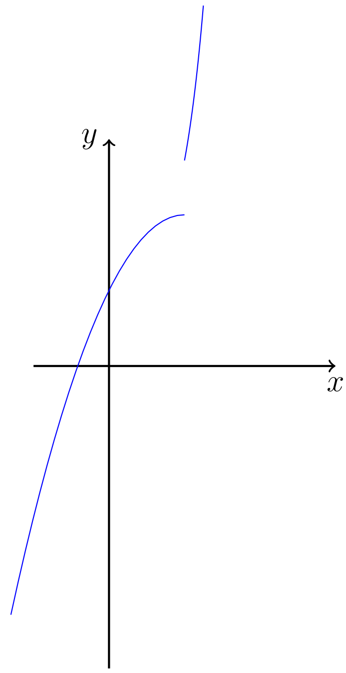
On en déduit que

$$f_2^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sqrt{\ln(x)} & \text{si } x > 1 \\ 1 - \sqrt{2-x} & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

Beaucoup de rédactions très confuses sur cette question et des erreurs dans la conclusion pour la définition de f_2^{-1}.

4. On a $f(1) \neq g(1)$ donc f_3 n'est pas continue. D'après l'étude faite précédemment, on a :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f_3	$-\infty \nearrow 2$	$\|$	$e \nearrow +\infty$



La fonction f_3 est strictement croissante donc injective. Son image vaut $]-\infty, 2] \cup]e, +\infty$, elle n'est donc pas surjective.

Exercice 2 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit x un nombre réel non multiple de l'entier π.*

1. *On définit, pour n dans $\mathbb{N}^*$, le produit $P_n(x)$ par:*

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

   (a) *Exprimer* $\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)$ *en fonction de* $\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$. On a

$$\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) = \sin\left(2\frac{x}{2^n}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

   (b) *Démontrer que* $2\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) P_n(x) = \sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) P_{n-1}(x)$.

$$2\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) P_n(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \underbrace{2\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)}_{=\sin\left(2.\frac{x}{2^n}\right)}\prod_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

   On a donc bien l'égalité souhaitée.

   De manière générale, on évite les quotients quand ce n'est pas indispensable et si on le fait, on s'assure qu'on ne divise pas par une quantité qui peut s'annuler.

   (c) *En déduire que*

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sin(x)$$

D'après la question précédente, la suite $\left(\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) P_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ (correspondant à $n=1$). Or $\sin(x) = \sin\left(2.\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

donc $\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin(x)$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)P_n(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2}\sin(x) = \frac{1}{2^n} \times \sin(x).$$

J'ai vu de la récurrence, ou de la récurrence descendante... pourquoi pas.

2. *Déterminer la limite de $P_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.*
   On écrit
   $$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sin(x) \times \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$$
   Or, quand n tend vers $+\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ donc, par composition de limites, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} = 1$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.
   Celle-là vous a posé pas mal de problème...

3. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit :
   $$u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} \text{ (} n \text{ radicaux)}$$
   (a) i. *Pour $a \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(2a)$ en fonction de $\cos^2(a)$.*
   On a $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$.

   ii. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$
   On va le montrer par récurrence sur n. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $HR(n)$: " $u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ ".
   Initialisation: On a $u_1 = \sqrt{2}$ et $2\cos\frac{\pi}{2^2} = \sqrt{2}$ donc la propriété est vraie au rang 1.
   Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $HR(n)$ est vraie, montrons que $u_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$. On remarque que $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, on a donc, en appliquant l'hypothèse de récurrence au rang n :
   $$u_{n+1} = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} = \sqrt{4\left(\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2}\right)} = 2\sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2}}.$$
   En utilisant la question précédente, on a donc
   $$u_{n+1} = 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\right|.$$
   Reste à remarque que $\frac{\pi}{2^{n+2}} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ est positif.
   On a donc
   $$u_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right),$$
   ce qui achève de montrer l'hérédité.

Par le principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

Vous allez me trouver dur mais le seul point difficile (quand on avait la question précédente) était de justifier correctement l'hérédité expliquant pourquoi la racine carrée de $\cos^2$ *était* $\cos$*, j'ai donc mis 0 quand vous avez appliqué la racine sans réfléchir.*

(b) *Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose :*

$$v_n = \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n} u_k$$

En utilisant les questions précédentes, déterminer la limite de v_n lorsque $n \to +\infty$.

On remplace u_k par son expression :

$$v_n = \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n} 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) = \prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) = P_n\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Exercice 3 1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\prod_{p=0}^{n} p! = \prod_{p=1}^{n} p^{n-p+1}$.*

On écrit

$$\begin{aligned}
\prod_{p=0}^{n} p! &= \prod_{p=1}^{n} p! \text{ car } 0! = 1\\
&= \prod_{p=1}^{n}\prod_{k=1}^{n} k\\
&= \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=k}^{n} k\\
&= \prod_{k=1}^{n} k^{n-k+1} \text{ car c'est un produit constant}\\
&= \prod_{p=1}^{n} p^{n-p+1} \text{ car l'indice est muet}
\end{aligned}$$

Ceux qui ont réussi cette question, l'ont pour la plupart fait par récurrence sur n:

On pose $HR(n)$: "$\displaystyle\prod_{p=0}^{n} p! = \prod_{p=1}^{n} p^{n-p+1}$". Pour $n = 0$, on a $1 = 1$ ce qui est vrai. Soit n un entier tel que $\displaystyle\prod_{p=0}^{n} p! = \prod_{p=1}^{n} p^{n-p+1}$, montrons que $\displaystyle\prod_{p=0}^{n+1} p! = \prod_{p=1}^{n+1} p^{n-p+2}$.

On a

$$\begin{aligned}
\prod_{p=0}^{n+1} p! &= (n+1)!\prod_{p=0}^{n} p! \\
&= (n+1).n!\prod_{p=0}^{n} p! \\
&= (n+1).n!\prod_{p=1}^{n} p^{n-p+1} \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= (n+1)\prod_{p=1}^{n} p \prod_{p=1}^{n} p^{n-p+1} \\
&= (n+1)\prod_{p=1}^{n} p^{n-p+2} \\
&= (n+1)^{n-(n+1)+2}\prod_{p=1}^{n} p^{n-p+2} \\
&= \prod_{p=1}^{n+1} p^{n-p+2}
\end{aligned}$$

La formule est vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, le résultat est vrai pour tout entier n.

C'est vrai tout le temps mais : FAITES apparaître les étapes de vos raisonnements !!! Au bout de la 10ème copie, je connais les étapes mais à la première, sachant que je n'ai pas fait comme ça, je suis parfois obligée de vraiment réfléchir à comment vous passez d'une ligne à la suivante.

2. *En déduire que* $\displaystyle\prod_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \prod_{p=1}^{n} p^{2p-n-1}$.

On écrit

$$\begin{aligned}
\prod_{p=0}^{n} \binom{n}{p} &= \prod_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{\displaystyle\prod_{p=0}^{n} n!}{\displaystyle\prod_{p=0}^{n} p! Prodp0n(n-p)!}
\end{aligned}$$

Or, $Prodp0n(n-p)! = Prodp0np! = \displaystyle\prod_{p=1}^{n} p^{2p-n-1}$ d'après la question précédente et

$$\prod_{p=0}^{n} n! = \prod_{p=0}^{n}\prod_{k=1}^{n} k = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=0}^{n} k = \prod_{k=1}^{n} k^{n+1} = \prod_{p=1}^{n} p^{n+1}$$

On en déduit que

$$\prod_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \frac{\displaystyle\prod_{p=1}^{n} p^{n+1}}{\displaystyle\prod_{p=1}^{n} p^{2n-2p+2}} = \prod_{p=1}^{n} p^{2p-n-1},$$

on a bien le résultat souhaité.

Beaucoup de tentatives d'arnaques sur cette question. Sachez que ça se voit que vous tentez d'arnaquer et ça me met de très mauvaise humeur et suspicieuse sur toute la fin de la copie !

3. (a) *Montrer que* $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}(2p-n-1)=0$.

On a $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}(2p-n-1)=2\sum_{p=1}^{n}p-(n+1)\sum_{p=1}^{n}1=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n(n+1)=0$, on a bien le résultat souhaité.

100% de réussite sur cette question !

(b) *En déduire que pour tout* $n\geqslant 1$, $\ln(u_n)=\displaystyle\frac{1}{n(n+1)}\sum_{p=1}^{n}(2p-n-1)\left(\ln\left(\frac{p}{n+1}\right)-1\right)$.

On a

$$u_n=,$$

donc

$$\begin{aligned}\ln(u_n)&=\ln\left(\left(\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}\right)\\&=\frac{1}{n(n+1)}\ln\left(\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)\\&=\frac{1}{n(n+1)}\ln\left(\prod_{p=1}^{n}p^{2p-n-1}\right)\\&=\frac{1}{n(n+1)}\sum_{p=1}^{n}(2p-n-1)\ln(p)\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n}(2p-n-1)\left(\ln\left(\frac{p}{n+1}\right)-1\right)&=\sum_{p=1}^{n}(2p-n-1)\ln(p)-\sum_{p=1}^{n}(2p-n-1)\left(\ln(n+1)+1\right)\\&=\sum_{p=1}^{n}(2p-n-1)\ln(p)\text{ car }\sum_{p=1}^{n}(2p-n-1)=0\end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité souhaitée.

Moi aussi elle m'a fait buggé cette question au premier regard, on se demande bien d'où sort ce $\ln\left(\dfrac{p}{n+1}\right)$ et puis en écrivant simplement les choses, ça tombe tout seul. Il faut donc parfois accepter de se lancer dans le calcul à l'aveugle !

Exercice 4 1. On a $a_4=b_0+4b_1+6b_2+4b_3+b_4$.

Étonnamment, beaucoup d'erreurs sur cette question.

2. Dans cette question seulement, on suppose que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q\in\mathbb{R}$ et de premier terme b_0.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n=b_0q^n$. Soit $n\in\mathbb{N}$,

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_0q^k)=b_0\left(1+q\right)^n$$

.

certains ont mélangé avec la somme géométrique...

3. Dans cette question seulement, on suppose que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme b_0.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = nr + b_0$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrons que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$.

   On peut considérer la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$ et remarquer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = f'(1)$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$, on a donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$.

   On peut aussi le montrer directement. La formule est vraie pour 0, on suppose $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \times k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-1-j)} \text{ en posant } j = k-1 \\
&= n\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} \\
&= n2^{n-1}
\end{aligned}$$

   Beaucoup de tentatives d'arnaques là aussi ! Plutôt que de faire de mémoire en écrivant des trucs faux, assurez-vous que chaque étape est juste.

   (b) En déduire pour $n \in \mathbb{N}$ l'expression de a_n en fonction de n, b_0 et r.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (kq + b_0) \\
&= q\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k + b_0 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
&= qn2^{n-1} + b_0 2^n
\end{aligned}$$

4. <u>Retour au cas général:</u>

   (a) Montrons que si k, n et m sont trois entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant m$ alors $\binom{m+1}{n}\binom{n}{k} = \binom{m+1}{k}\binom{m+1-k}{n-k}$.

Soit k, n et m trois entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant m$. On a alors

$$\begin{aligned}
\binom{m+1}{n}\binom{n}{k} &= \frac{(m+1)!n!}{(m+1-n)!n!k!(n-k)!} \\
&= \frac{(m+1)!}{(m+1-n)!k!(n-k)!} \\
&= \frac{(m+1)!(m+1-k)!}{(m+1-n)!(m+1-k)!k!(n-k)!} \\
&= \frac{(m+1)!}{(m+1-k)!k!} \times \frac{(m+1-k)!}{(m+1-n)!(n-k)!} \\
&= \binom{m+1}{k}\binom{m+1-k}{n-k}
\end{aligned}$$

On a bien l'égalité souhaitée.

(b) Montrons que si k et m sont deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant m$ alors $\displaystyle\sum_{j=0}^{m-k} (-1)^j \binom{m+1-k}{j} = (-1)^{m-k}$.

Soit donc k et m deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant m$.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m-k} (-1)^j \binom{m+1-k}{j} &= \left(\sum_{j=0}^{m-k+1} \frac{m-k+1}{j}(-1)^j\right) - (-1)^{m-k+1} \\
&= (1+(-1))^{m-k+1} - (-1)^{m-k+1} \\
&= 0 + (-1)^{m-k+2} \\
&= (-1)^{m-k}
\end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité souhaitée.

J'ai eu le sentiment que $-(-1)^{m-k+1} = (-1)^{m-k}$ en avez fait douter quelques uns...

(c) On souhaite exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le nombre b_{n+1} en fonction de a_{n+1} et des nombres $b_0, b_1, \ldots, b_n$. On sait que

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k + b_{n+1}
\end{aligned}$$

on a donc

$$b_{n+1} = a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k.$$

Mais pourquoi vous m'enlever le signe somme et vous mettez des points de suspension??? comment pouvez-vous penser que je vais préférer...?

(d) On va montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$$

par récurrence forte sur n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $HR(n)$: " $\displaystyle b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$".

Pour $n = 0$, HR(0) s'énonce $b_0 = a_0$ ce qui est vrai.

Soit maintenant un entier n tel que $\forall k \in [\![0, n]\!], HR(k)$ est vraie, montrons que $HR(n+1)$ est vraie c'est-à-dire que

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} a_k.$$

On utilise la question précédente pour écrire

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k \\
&= a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} a_j \\
&= a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{n+1}{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} a_j \\
&= a_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{n+1}{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} a_j \\
&= a_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n+1}{i+j} \binom{i+j}{j} (-1)^{i} a_j \text{ en posant } i = k-j \\
&= a_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n+1}{j} \binom{n+1-j}{i} (-1)^{i} a_j \text{ en utilisant la question 4a} \\
&= a_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j+1}{i} (-1)^{i} a_j \\
&= a_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} (-1)^{n-j} a_j \text{ en utilisant la question 4b} \\
&= a_{n+1} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} (-1)^{n-j+1} a_j \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n-j+1} a_j
\end{aligned}$$

La propriété est héréditaire et initialisée. Par le principe de récurrence forte, elle est donc vraie pour tout entier n.

Très peu traitée pourtant tout a été fait avant.

On considère la suite définie par $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $e_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $e_n = ne_{n-1} + (-1)^n$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e_k.$$

5. On a

$$e_1 = 0,\ e_1 = 0,\ e_3 = 2,\ e_4 = 9 \text{ et } e_5 = 44.$$

On en déduit

- $f_0 = e_0 = 1$
- $f_1 = e_0 + e_1 = 1$
- $f_2 = e_0 + 2e_1 + e_2 = 2$

- $f_3 = 6$
- $f_4 = 24$
- $f_5 = 5!$

Là encore, je suis étonnée du nombre d'erreurs qui découlent d'une mauvaise compréhension de la définition de ces deux suites.

6. Nous allons montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n = n!$. Pour cela, on va montrer que $f_{n+1} = (n+1)f_n$. Comme $f_0 = 1$, on aura alors que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que la factorielle et comme les premiers termes sont identiques, on aura égalité.

   On peut également montrer ceci par récurrence simple sur n. L'initialisation a été faite à la question précédente, l'hérédité va découler du fait que $f_{n+1} = (n+1)f_n$ ce que nous allons donc montrer maintenant.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} e_k \\
&= e_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} e_k \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(ke_{k-1} + (-1)^k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} ke_{k-1} + 1 + (1+(-1))^{n+1} - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+1)!}{(k-1)!(n+1-k)} e_{k-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{(n+1)!}{j!(n-j)!} e_j \text{ en posant } j = k-1 \\
&= (n+1)\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} e_j \\
&= (n+1)f_n
\end{aligned}$$

   Remarque: On peut s'éviter d'enlever le premier terme de la somme en remarquant que la relation $e_n = ne_{n-1} + (-1)^n$ est également valable pour $n = 0$.

   Ceux qui ont remarqué que $f_n = n!$ se sont arrêtés là...

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors d'après la formule d'inversion de Pascal, on a

$$\begin{aligned}
e_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k!(-1)^{n-k} \\
&= n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= n!\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \text{ en posant } j = n-k
\end{aligned}$$

   L'indice j étant muet, on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$. $e_n = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$..