

Devoir maison 1.
à rendre le 14 octobre

Exercice 1.

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies sur \mathbb{N} et à valeurs dans \mathbb{N} qui vérifient la propriété (*) suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) + f(f(n)) = 2n \quad (*)$$

1. On considère dans cette question une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui vérifie (*).
 - (a) Déterminer la valeur de $f(0)$.
 - (b) Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $f(p) = f(q)$. Montrer que $p = q$.
 - (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f(k) = k$.
Montrer que pour tout $i \geq n + 1$, $f(i) \geq n + 1$, puis que $f(n + 1) = n + 1$.
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui vérifient (*).

Exercice 2.

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 + 3x + 4 \end{cases} .$$

1. Montrer que f est bijective et calculer $f^{-1}(0)$.
2.
 - (a) Montrer que f^{-1} est dérivable et exprimer sa dérivée en fonction de f^{-1} .
 - (b) Calculer $(f^{-1})'(0)$.
3.
 - (a) Montrer que f^{-1} est deux fois dérivable et exprimer sa dérivée seconde en fonction de f^{-1} .
 - (b) Calculer $(f^{-1})''(0)$.